Les outils pour réussir

Ce chapitre propose quelques pistes d'utilisation d'outils numériques pour répondre aux questions courantes des différents chapitres précédents. Si son contenu n'est pas exhaustif et ne peut l'être, il permet une ouverture vers une utilisation meilleure des outils disponibles.

L'utilisation d'un outil informatique permet de concentrer ses efforts sur le sens de la question et non sur les techniques opératoires en jeux.

Les outils pour réussir

PYTHON p. 270

Le langage de programmation que nous mettons en avant dans ce manuel est **Python** (3.4.2 et plus) avec la bibliothèque adaptée au lycée (lycee.py).

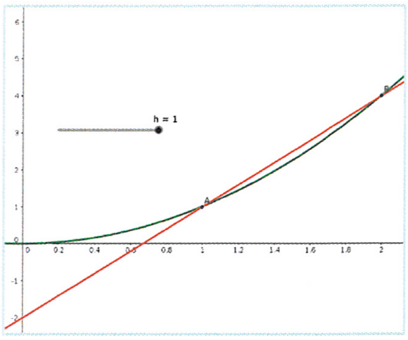
Edupython est disponible sur le site : http://edupython.tuxfamily.org/

GEOGEBRA p. 275

GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique qui contient aussi, entre autres, un tableur et un module de calcul formel.

Il est disponible sous différents supports d'installation à l'adresse : https://www.geogebra.org/.

Un espace de diffusion lui est consacré sur le portail : http://tube.geogebra.org/.



LE TABLEUR p. 278

Le tableur est un outil informatique permettant d'avoir des feuilles de calculs à disposition. Son environnement favorisera la répétition d'un même type d'opérations et leurs représentations sous la forme de diagrammes adaptés.

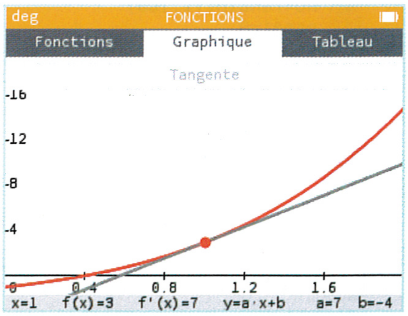
Plusieurs tableurs sont disponibles, par exemple : **Calc** de LibreOffice ou **Excel** de Microsoft.

	A	B
1	n	u_n
2	0	58
3	1	=B2-6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8		

LA CALCULATRICE p. 280

La **calculatrice**, *via* ses différents menus, va permettre de travailler les différentes notions de ce manuel.

Les modèles que nous allons exploiter sont :
CASIO Graph 35+ (p. 280),
TI– 83 Premium CE (p. 284)
NumWorks (p. 289)



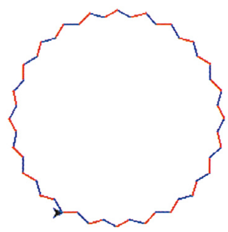
PYTHON

1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Un algorithme est une suite d'actions permettant de réaliser quelque chose.

EXEMPLE Algorithme avec la tortue logo permettant de construire une figure géométrique complexe.

```
REPETER l'action pour le nombre i allant de 0 à 47:
      SI i est pair :
      ALORS :         peindre en couleur rouge
                      avancer sur 15 pixels
                      tourner à droite de 45°
      SINON : peindre en couleur bleue
                      avancer sur 15 pixels
                      tourner à gauche de 60°
      FIN SI
                         FIN REPETER
```



Un algorithme est une suite d'actions simples et si claires qu'elles ne peuvent pas être soumises à interprétation. Si une action d'un algorithme peut être soumise à interprétation, elle fait elle-même l'objet d'un algorithme.

Un algorithme peut être explicité en **langage naturel**.

Un **langage de programmation** est un **code défini**, avec des règles lexicales et syntaxiques (du vocabulaire et une grammaire), qui permet de transcrire un algorithme en programme, en vue de la faire exécuter par une machine : calculatrice, ordinateur, robot, automate de production, processeur…

Algo, vous avez dit algo ? Codons maintenant !

Le classique : devinez un nombre

Avant cette réforme des programmes, « l'algo » se résumait souvent en un codage de la dichotomie du type : « Tu penses à quel nombre ? Ton nombre est trop grand/ trop petit. »

```python
from lycee import *

nb=randint(1,100)
essai=0
reponse=0

while reponse!=nb:
    reponse=demande("Tu penses a quel nombre ?")
    essai+=1
    if reponse>nb:
        print("Ton nombre est trop grand")
    if reponse<nb:
        print("Ton nombre est trop petit")
print("Bravo !")
print("Tu as trouve en ",essai," coups")

```

Un travail simplifié si on utilisait les entrées/sorties et que la partie algorithmique était à la charge du joueur comme dans le code suivant :

```
...module lycee actif....
Tu penses a quel nombre ?50
Ton nombre est trop petit
Tu penses a quel nombre ?75
Ton nombre est trop grand
Tu penses a quel nombre ?60
Bravo !
Tu as trouve en  3  coups
```

L'idée d'une programmation fonctionnelle permet de retirer l'essentiel et de faire « jouer » l'ordinateur contre lui-même.

```python
from lycee import *

def trouvons(nb):
    essai=0
    reponse=0
    mini=1
    maxi=100
    while reponse!=nb:
        reponse=int((mini+maxi)/2)
        essai+=1
        if reponse>nb:
            maxi=reponse
        if reponse<nb:
            mini=reponse
    return essai

nb=randint(1,100)

print(nb,trouvons(nb))

```

Ainsi, l'algo ci-contre permet d'avoir une fonction trouvant le nombre cherché et retournant le nombre de coup pour le trouver.

Comme le programme est figé, personne n'a intérêt à choisir 50 ou 75…

Du coup, le codage permet de se poser d'autres questions, par exemple : pour un tel algorithme quel est le nombre le plus intéressant à faire deviner ?

```python
L=[]
for nb in range(1,100):
    L.append(trouvons(nb))

print(L)
print(moyenne(L))
```

De même, en moyenne, en combien de coups pouvons-nous trouver n'importe quel nombre entre 1 et 100 ?

Ainsi, cette boucle nous confirme que l'on trouvera en moyenne en 6 coups environ, un nombre inférieur à 100.

```python
from lycee import *

def trouvons(nb):
    essai=0
    reponse=0
    mini=1
    maxi=100
    while reponse!=nb:
        reponse=randint(mini,maxi)
        essai+=1
        if reponse>nb:
            maxi=reponse
        if reponse<nb:
            mini=reponse
    print(nb,essai)
    return essai

```

Mais, n'y a-t-il pas d'algorithme plus rentable ? Le hasard peut-il contrôler le hasard ?

À vous de faire fonctionner voire étudier ce dernier codage, pour se poser ce genre de questions !

2 Étude de fonctions

Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Représentation graphique de la fonction C sur l'intervalle voulu

Fichier Edition Rechercher Affichage Projet Exécuter

Nouveau Fichier...

```
1 from lycee import *
2
3 def f(x):
4     return -2*x*x+4*x+1
5
6 xmin=-3
7 xmax=4
8 pas=0.1
9
10 x=xmin
11
12 while x<=xmax:
13     repere.plot(x,f(x),'ro')
14     x=x+pas
15 repere.show()
```

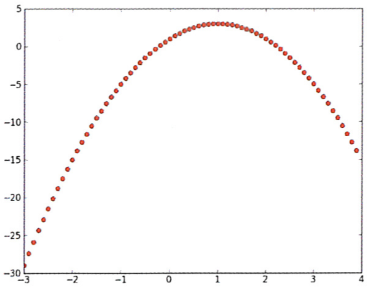


Tableau de valeurs de la fonction C

Il suffit de remplacer la ligne 13 par : `print('f(',x,')=',f(x))` et de supprimer la ligne 15 du programme précédent.

Recherche du maximum de la fonction C

Il suffit de se déplacer sur l'intervalle et de tester lorsque la fonction arrête d'être croissante pour trouver un maximum.

```
from lycee import *
def f(x):
    return -2*x*x+4*x+1
xmin=-3
xmax=4
pas=0.1
x=xmin

oncherche=1
maxiold=f(x)
while oncherche==1:
    if f(x+pas)<=maxiold:
        oncherche=0
    else:
        x=x+pas
        maxiold=f(x)

print('Maximum en x=',x)
print('Avec f(x)=',f(x))
```

Console Python

```
Maximum en x= 1.0000000000000016
Avec f(x)= 3.0
>>>
```

La variable `oncherche` permet de vérifier l'état de la recherche (1 : on continue et 0 : on affiche le résultat trouvé).

3 Données statistiques

Soit les données statistiques suivantes :

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

Calcul de la moyenne

On crée dans Edupython deux listes :

```
Liste1=[2,3,4,5,6,7,8]
Liste2=[3,6,8,9,7,3,2]
```

On affiche la moyenne : `print(moyenne(Liste1,Liste2))`

Caractéristiques de la série statistiques

Avec les même listes, on trouve la médiane et les quartiles :

```
print(mediane(Liste1,Liste2))
print(quartile(Liste1,Liste2,1))
print(quartile(Liste1,Liste2,3))
```

```python
from lycee import *
Liste1=[2,3,4,5,6,7,8]
Liste2=[3,6,8,9,7,3,2]

print('La moyenne est :')
print(moyenne(Liste1,Liste2))
print('La médiane est :')
print(mediane(Liste1,Liste2))
print('Le Quartile 1 est :')
print(quartile(Liste1,Liste2,1))
print('Le Quartile 3 est :')
print(quartile(Liste1,Liste2,3))
```

4 Suite et recherche de seuil

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1\,200$ et $U_{n+1} = 1{,}02U_n$.

Calcul des 10 premiers termes de cette suite

```python
from lycee import *

n=0
U=1200

while n<10:
    n=n+1
    U=U*1.02
    print ('U(',n,')=',U)
```

```
U( 1 )= 1224.0
U( 2 )= 1248.48
U( 3 )= 1273.4496000000001
U( 4 )= 1298.9185920000002
U( 5 )= 1324.8969638400004
U( 6 )= 1351.3949031168004
U( 7 )= 1378.4228011791365
U( 8 )= 1405.9912572027192
U( 9 )= 1434.1110823467736
U( 10 )= 1462.793303993709
>>>
```

Recherche de seuil

On place 1 200 euros sur un compte à intérêts composés à 2 %. En combien d'années ce capital est-il doublé ?

```python
from lycee import *

n=0
U=1200

while U<2400:
    n=n+1
    U=U*1.02
print ('U(',n,')=',U)
```

Console Python

```
U( 36 )= 2447.864812458847
>>>
```

6 Simulation et comptage des succès

Un joueur de fléchettes professionnel a 85 % de chances de toucher le triple 20 en le visant.

On va simuler cette hypothèse et trouver la fréquence qu'il touche 3 fois ce triple 20 de suite.

Ligne 3
La fonction `lancons()` permet de simuler le lancer de 3 fléchettes et de compter le nombre de triple 20 obtenus.

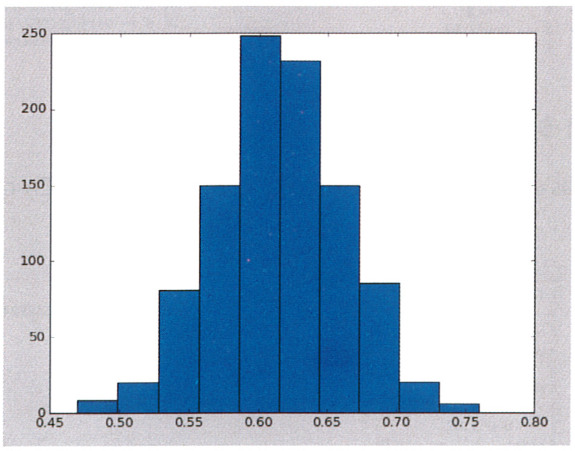
Ligne 6
`random` renvoie un nombre « au hasard entre 0 et 1 » ; un nombre obtenu a 85 % de « chances » d'être inférieur (au sens large ou stricte) à 0,85.

Ligne 10
Un lancer n'est pas caractéristique, il est préférable de simuler au moins une centaine de tirs pour obtenir une fréquence « acceptable », c'est ce que permet la fonction `simulation` qui renvoie la fréquence du triplet recherché pour `nb` lancers.

Ligne 18
On produit un millier de simulations pour visualiser les caractéristiques de la série statistique ainsi obtenue.

Lignes 24 et 25
La moyenne se rapproche de la théorie et l'écart-type est maintenant calculable.

```
1  from lycee import *
2
3  def lancons():
4      x=0
5      for i in range(3):
6          if random()<0.85 :
7              x=x+1
8      return x
9
10 def simulation(nb):
11     triple=0
12     for i in range(nb):
13         if lancons()==3:
14             triple=triple+1
15     return triple/nb
16
17 L=[]
18 for i in range(1000):
19     L.append(simulation(100))
20
21 repere.hist(L)
22 repere.show()
23
24 print(moyenne(L))
25 print(ecartype(L))
26
```



GEOGEBRA

1 Étude de fonctions

Soit C la fonction définie sur l'intervalle [– 3 ; 4] par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

Représentation graphique de la fonction C sur l'intervalle voulu

Dans la zone de saisie `Fonction`, notons : `[-2x²+4+1, -3,4]`

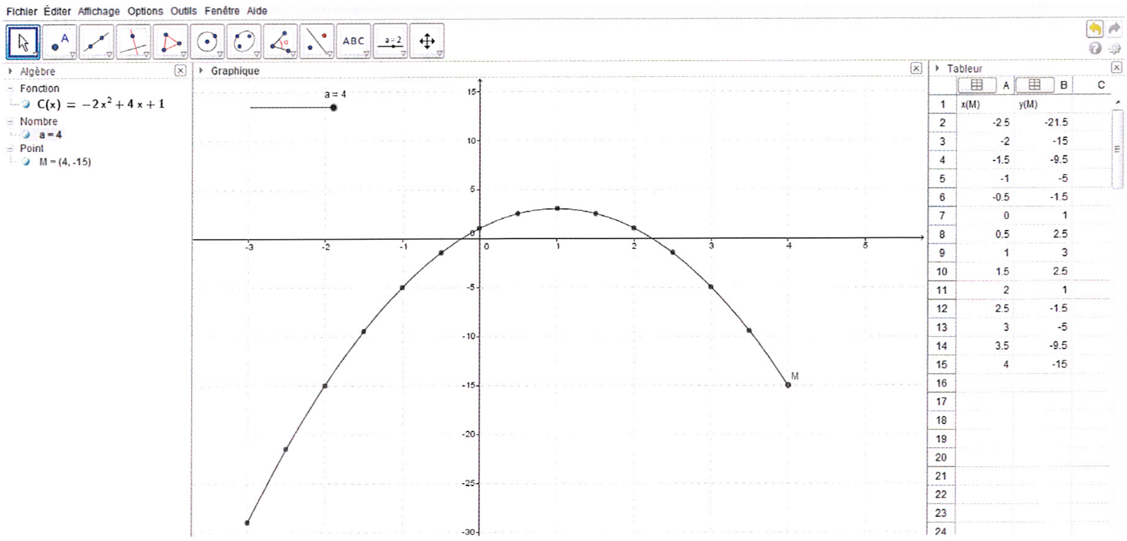


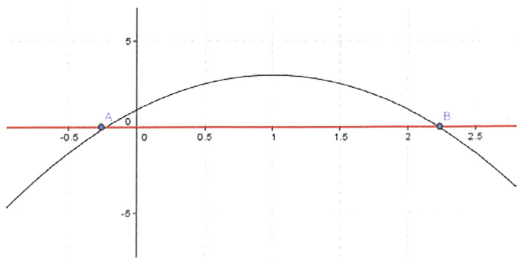
Tableau de valeurs de la fonction C

Créer un curseur nommé a allant de – 3 à 4 avec un pas de 0,5. Créer un point M d'abscisse a étant sur la courbe. Dans la zone de saisie, on note : `M=(a,C(a))`. Afficher la fenêtre `Tableur` et activer la trace du point M. Avec un clic droit sur le point M, sélectionner : `Enregistrer dans le tableur`.

REMARQUE Une création classique d'un tableau de valeurs est possible.

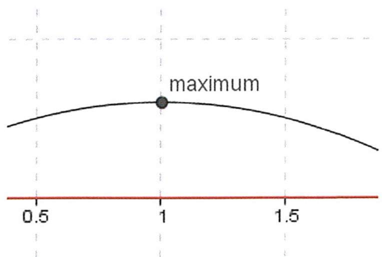
Résolution de l'équation $C(x)=0$

Il suffit de rajouter la droite d'équation `y=0` et de placer les points d'intersections avec la courbe.



Recherche du maximum de la fonction C

Dans la zone de saisie, on tape : `maximum=Max[C,-3,4]`

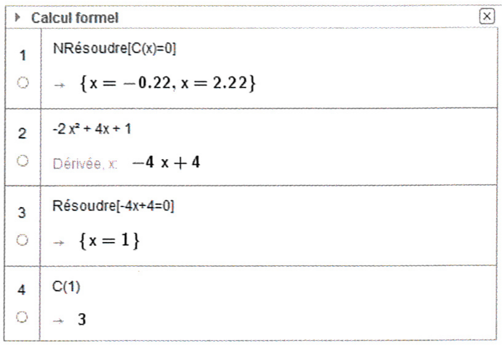


Utilisation du calcul formel pour retrouver les résultats précédents

Un mode de `Calcul formel` est disponible dans GeoGebra.

La fonction `NRésoudre()` permet de trouver les solutions d'une équation.

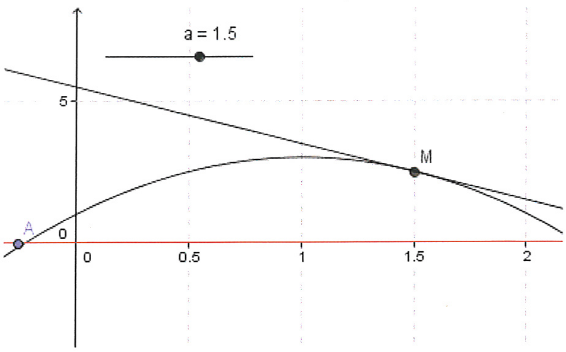
Si on veut trouver un maximum (ou un minimum), le calcul de la dérivée est utile.

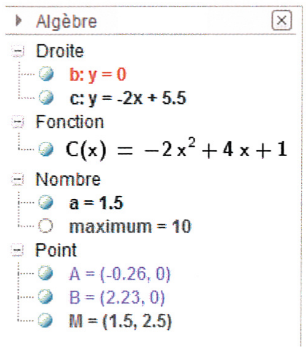


Affichage de l'équation de la tangente à la courbe en un point donné

Il est possible de dessiner la tangente à la courbe passant par un point.

La fenêtre `Algèbre` nous en donne son équation.





2 Données statistiques

Soit les données statistiques suivantes :

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

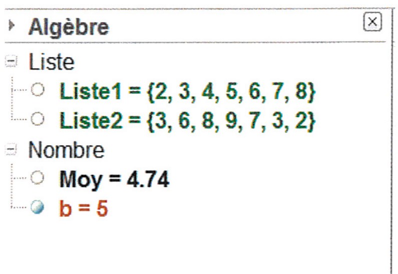
Calcul de la moyenne

Dans la zone de saisie de la fenêtre `Algèbre`, on crée deux listes représentant les valeurs du tableau :

`Liste1={2,3,4,5,6,7,8}` et `Liste2={3,6,8,9,7,3,2}`.

Puis, on définit le nombre représentant la moyenne *via* la commande :

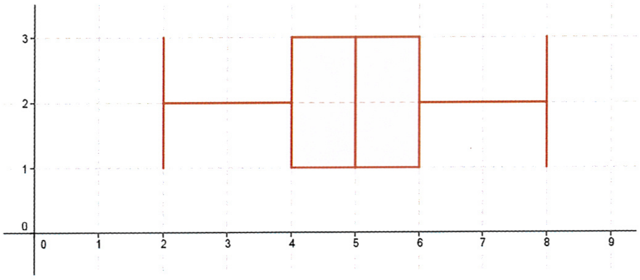
`Moy=Moyenne[Liste1,Liste2]`.



Caractéristiques et diagramme en boîte

Dans la zone de saisie, on appelle la fonction : `BoiteMoustaches[2,1,Liste1,Liste2,true]`.

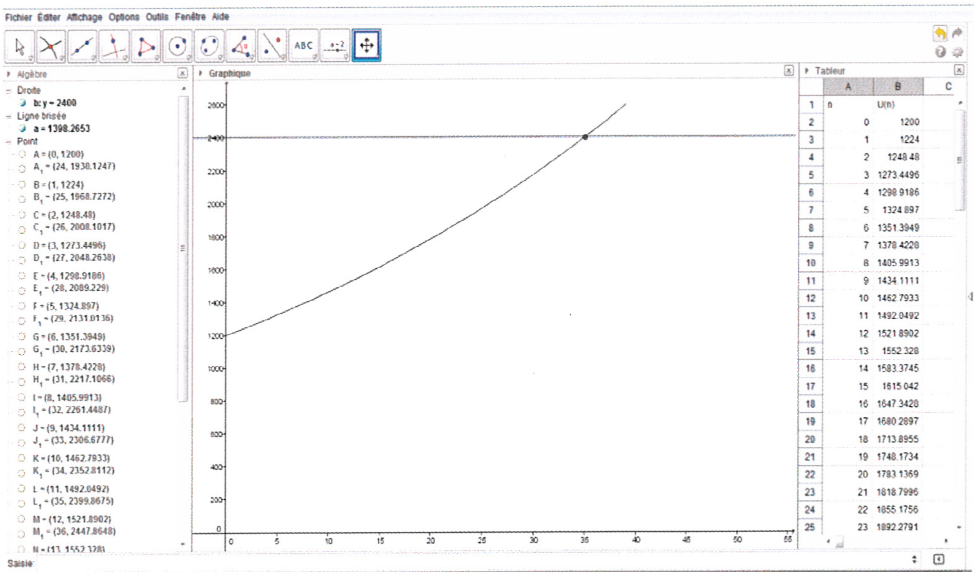
Il ne reste qu'à lire les valeurs caractéristiques de cette base de données (il est utile d'afficher la grille sur le graphique).



3 Suite et recherche de seuil

Recherche de seuil : on place 1 200 € sur un compte à intérêts composés à 2 %.

En combien d'années ce capital est-il doublé ?



- Dans la fenêtre `Tableur`, on crée les valeurs de la suite U_n.
- Puis, en les selectionnant, on crée une ligne brisée (visible dans le graphique sous le nom de *a*).
- On dessine la droite d'équation *b* : `y=2400`.
- Puis on crée le point d'intersection de la ligne brisée *a* et de la droite *b* représentant le seuil recherché : `POINT=Intersection[b,a]`.

L'abscisse du point donne le seuil voulu (à savoir pour cet exemple, après 35 ans).

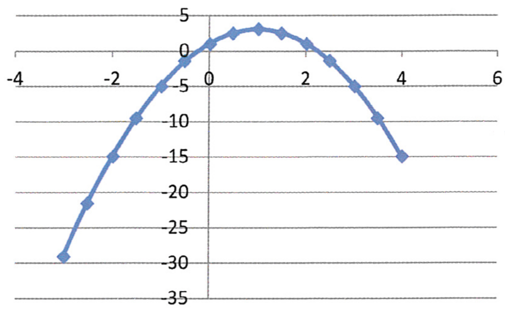
1 Représentation graphique d'une fonction

Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;4]$ par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

Représentation graphique de la fonction C

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	**Pas**	**0,5**															
2	x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	
3	C(x)	-29	-22	-15	-9,5	-5	-1,5	1	2,5	3	2,5	1	-1,5	-5	-9,5	-15	

On crée une table de valeurs avec un pas voulu en B1 (ici, 0,5).
Puis, dans C2, on note : `=B2+$B$1`.
Les $ permettent de figer la case pour que la recopie vers le bas (glisser/copier) fonctionne correctement.
Dans la case B3, on note la formule :
`=-2*B2^2+4*B2+1` que l'on tire jusqu'en P3.
En selectionnant les cases B2:P3, on insère un nuage de points (XY) pour avoir la représentation voulue avec un pas modifiable.



2 Suites numériques

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1\,200$ et $U_{n+1} = 1{,}02U_n$.

Calcul des premiers termes

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	U(n)	1200,00	1224,00	1248,48	1273,45	1298,92	1324,90	1351,39	1378,42
3									

En C1, on note la formule `=B1+1`
En C2, on note `=1,02*B2`

Recherche du seuil n à partir duquel $U_n \geq 2\,400$

	A	B	C	D	AI	AJ	AK	AL	AM
1	n	0	1	2	33	34	35	36	37
2	U(n)	1200,00	1224,00	1248,48	2306,68	2352,81	2399,87	2447,86	2496,82
3	Condition							36	37
4									
5	**Seuil 2400**								
6	**n≥**	**36**							

Dans la ligne 3, on rajoute une condition d'affichage. Par exemple, en B3 on note : `=SI(B2>2400;B1;"")`
Il suffit en B6, de chercher le minimum affiché dans la ligne 3 pour avoir notre seuil : `=MIN(3:3)`.

3 Statistiques

Soit les données statistiques suivantes :

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

Quartiles et médiane

Pour trouver les quartiles, il suffit de rajouter une ligne contenant l'effectif cumulé (en B4, on note la formule : `=B3` et en C4 : `=B4+C3`). Puis, on cherche le quart et les 3 quarts.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	Valeurs	2	3	4	5	6	7	8	Total
3	Effectifs	3	6	8	9	7	3	2	38
4	*eff cum*	*3*	*9*	*17*	*26*	*33*	*36*	*38*	
5				***Q1***	***Med***	***Q3***			
6									
7	Total	6	18	32	45	42	21	16	180
8									
9	Moyenne	4,7368421							
10									

Calcul d'une moyenne pondérée

La ligne 7 de la feuille de calcul ci-dessus nous servira de sous-total : en B7, on note : `=B2*B3`
En I7, on calcule le total de la ligne : `=somme(B7:H7)`
EN B9, la moyenne sera donnée par : `=I7/I3`

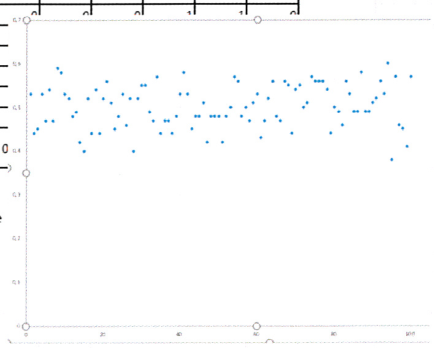
4 Calculs de probabilités

On simule n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On peut compter avec la fonction "NB.SI" le nombre de "1" dans la colonne A, soit ici : `=NB.SI(A2:A102;1)`.

	A	B	C	D
1	Simulation loi de Bernoulli de paramètre p	p=	0,9	
2	1			
3	1	=si(alea()<C1$;1;0)		
4	1			
5	1		Nombre de 1	88
6	1		Nombre de 0	12
7	1			

On peut aussi simuler n fois l'épreuve précédente, puis calculer l'écart-type des fréquences et afficher le nuage de points. On observe la dispersion des fréquences autour de p.

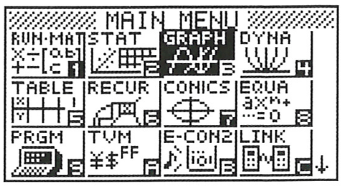
	A	B	C	D	E	F	L	M	N	CV	CW	CX	CY
1		p=	0,5										
2	Tirage	Ech 1	Ech 2	Ech 3	Ech 4	Ech 5	Ech 11	Ech 12	Ech 13	Ech 99	Ech 100		
3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0		
4	2	1	1	0	1								
100	98	0	0	1	0								
101	99	1	1	1	0								
102	100	0	1	0	0								
103													
104	Fréquence de 1	0,53	0,44	0,45	0,53	0							
109													
110	Ecart-type des 1 dans les 100 échantillons	0,04931		=ECARTYPE(plage de cellules)									
111													
112													
113													
114													
115													



CASIO GRAPH 35+

touche sur écran

1 Mode GRAPH : les fonctions

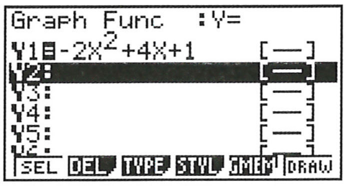


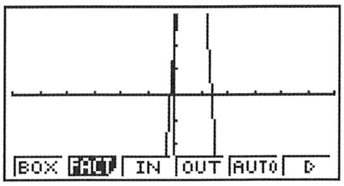
Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

Représentation graphique de la fonction C

Dans le mode GRAPH, on saisit la fonction à représenter.

Puis on règle le Xmin et Xmax de la fenêtre V-Window pour contenir le domaine de définition. Il ne reste qu'à utiliser le zoom AUTO pour avoir une représentation acceptable.





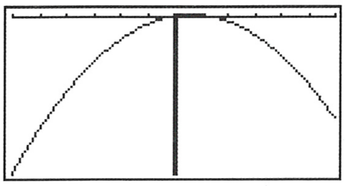
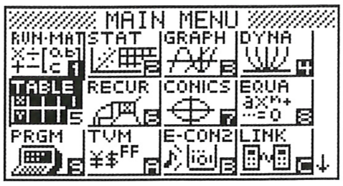
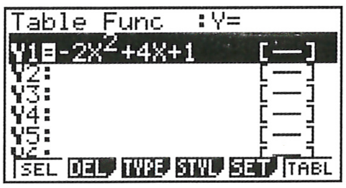
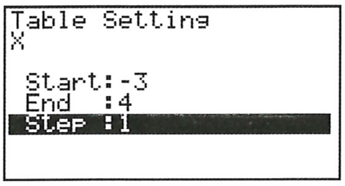


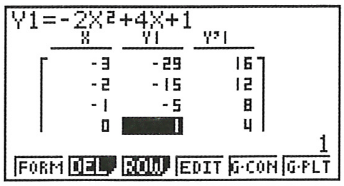
Tableau de valeurs de la fonction C



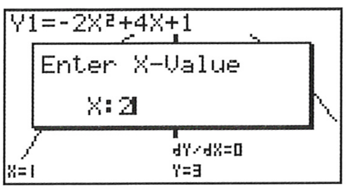
Le mode TABLE permet d'afficher un tableau de valeurs. Il faudra régler dans SET la valeur de départ et le pas voulu.

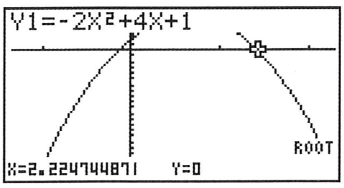


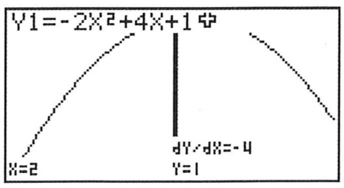




Il est possible d'avoir directement l'image d'un point par la fonction en utilisant Trace sur le graphique :

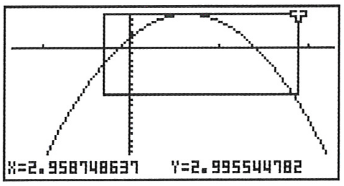


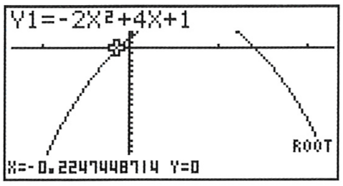


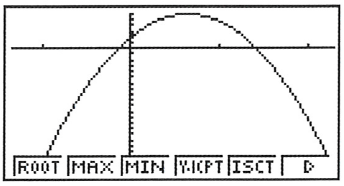


Résolution de l'équation $C(x) = 0$

Le zoom BOX permet de visualiser plus facilement les racines de l'équation. En cliquant sur ROOT, les solutions de l'équation $C(x) = 0$ s'affichent à l'écran.

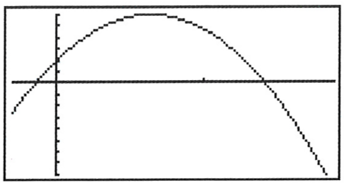


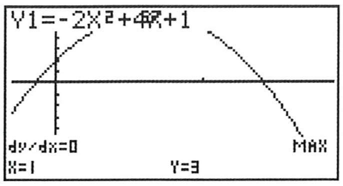




Recherche du maximum de la fonction C

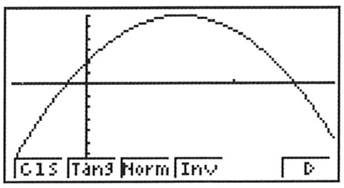
Dans G-Solv, il existe un sous-menu permettant de trouver un extremum (MAX ou MIN).

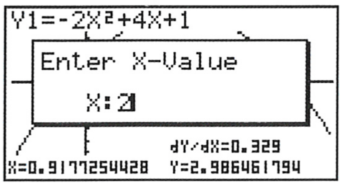


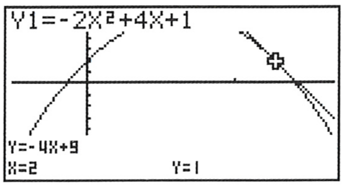


Affichage de l'équation de la tangente à la courbe en un point donné

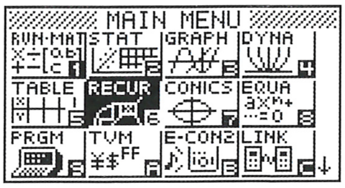
Le mode Sketch permet de dessiner la tangente à la courbe au point d'abscisse voulu.







2 Mode RECUR : suite numérique

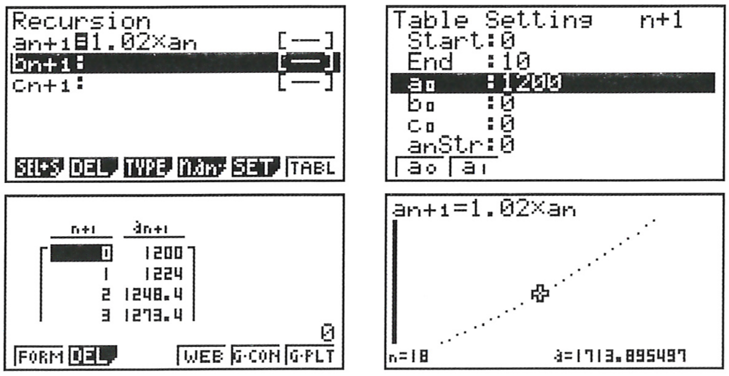


Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1\,200$ et $U_{n+1} = 1{,}02U_n$.

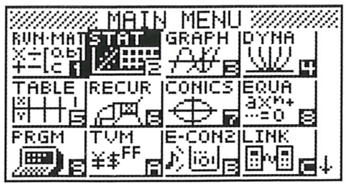
On veut calculer les premiers termes de cette suite.

On définit la suite en fonction du terme précédent (par récurrence).

Puis, on règle la valeur initiale dans SET. Enfin, on affiche la table des valeurs. Il est possible d'afficher graphiquement les valeurs de la suite *via* le menu G-PLT. La fonction Trace permet alors de visualiser les termes de la suite graphiquement.



3 Mode STAT : données statistiques

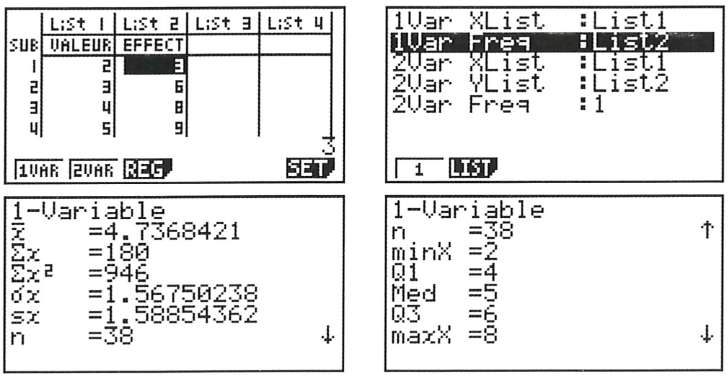


Soit les données statistiques suivantes :

Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

Calcul des caractéristiques de ces valeurs

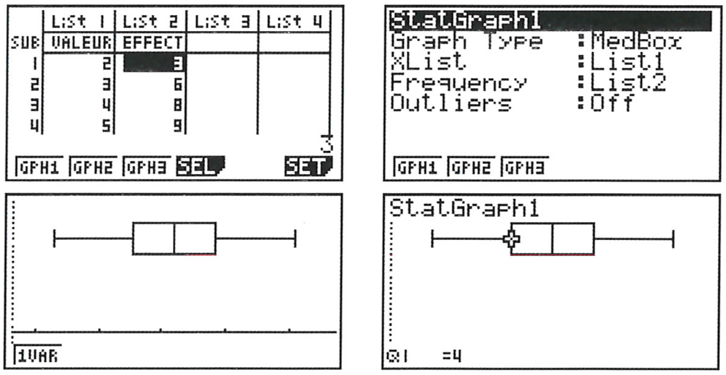
Dans le mode STAT, on rentre les valeurs dans deux listes. Puis, dans le menu CALC, on règle la fréquence 1VAR sur List2 *via* le menu SET. Enfin, on calcule les caractéristiques *via* le menu 1VAR.



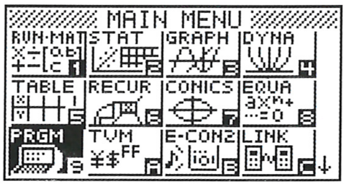
Représentation en diagramme en boîte

Dans le menu GRPH, on règle le type de graphique (SET) sur Medbox. Puis, on affiche le graphique.

Le menu Trace permet de voir les caractéristiques de la boîte à moustaches directement.



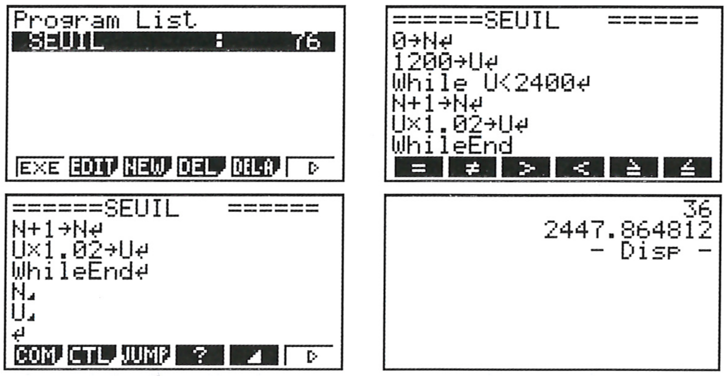
4 Mode GPRM : programmation



Recherche de seuil : on place 1 200 € sur un compte à intérêts composés à 2 %. En combien d'années le capital est-il doublé ?

On crée un nouveau programme nommé **SEUIL**. Puis, on utilise la boucle While (visible dans le menu PRGM puis COM).

Les signes de relations (< ou >) sont disponibles dans le menu PRGM puis REL.



Notons qu'un module Python sera disponible sur un nouveau modèle à la rentrée 2019.

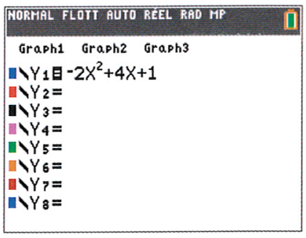
`touche` `sur écran`

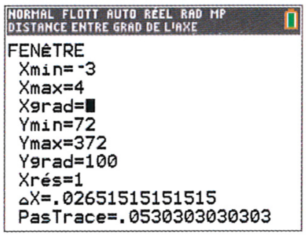
1 Mode GRAPH : les fonctions

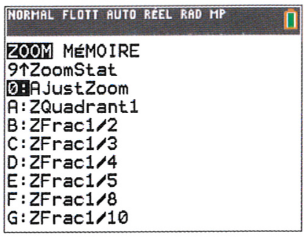
Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

Représentation graphique de la fonction C

On utilise la touche `f(x)`, on saisit la fonction à représenter. Puis, on règle le `Xmin` et `Xmax` de la `fenêtre` pour contenir le domaine de définition. Il ne reste qu'à utiliser le `zoom` `0:AjustZoom` pour avoir une représentation acceptable.







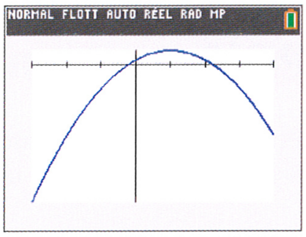
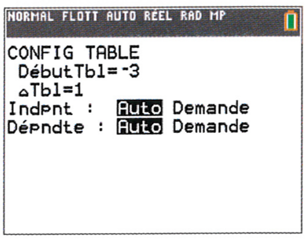
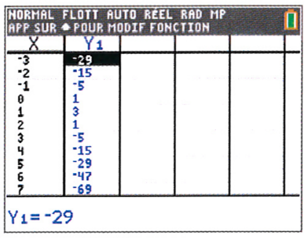
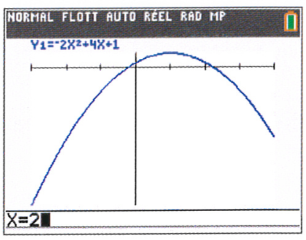


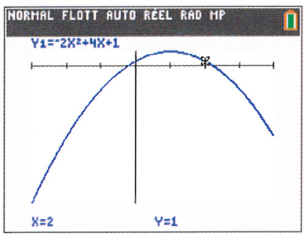
Tableau de valeurs de la fonction C

Le mode `table` permet de récupérer un tableau de valeurs. Attention à régler dans `deftable` la valeur de départ et le pas voulu. Il est possible d'avoir directement l'image d'un point par la fonction en utilisant `trace` sur le graphique.









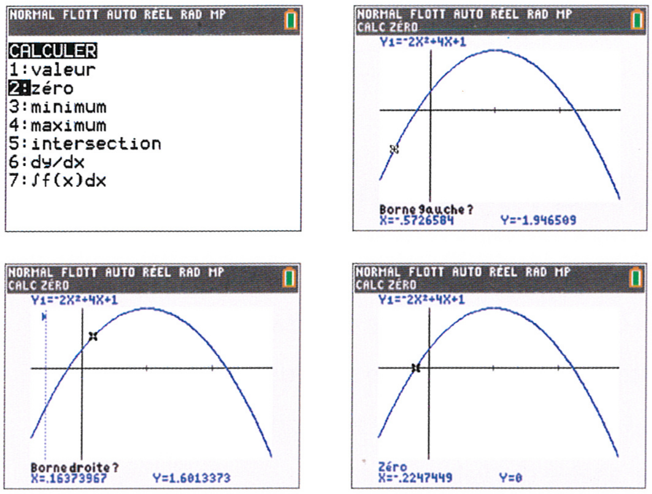
Résolution de l'équation $C(x) = 0$

Le `zoom ZCadre` permet de visualiser facilement les racines de l'équation.

En cliquant sur `CALC zéro`, les solutions de l'équation $C(x) = 0$ s'affichent à l'écran.

Il faudra sélectionner les bornes de gauche et de droite pour encadrer correctement la première racine.

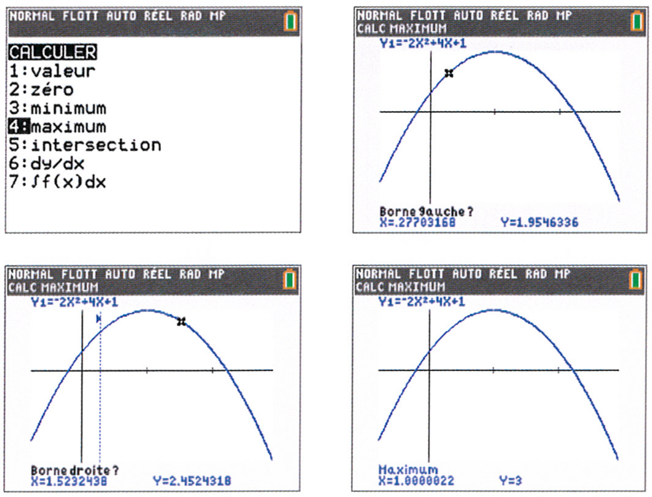
Puis faire de même pour trouver la seconde solution.



Recherche du maximum de la fonction C

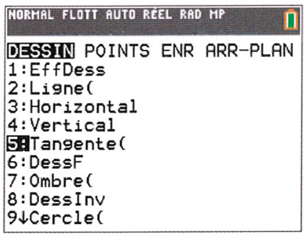
Pour calculer le maximum (ou le minimum) d'une fonction, il suffit de l'afficher sur l'écran afin d'avoir en visuel ce maximum (ou minimum) recherché.
Ensuite, nous définissons les bornes inférieures et supérieures encadrant notre demande ainsi que le pas.

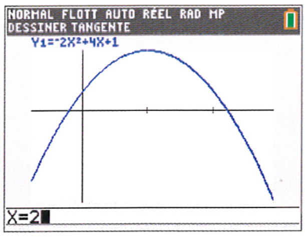
Ce mode de fonctionnement permet de trouver un maximum local par exemple.

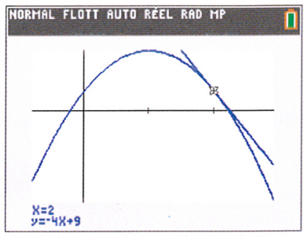


Affichage de l'équation de la tangente à la courbe en un point donné

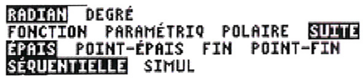
L'outil DESSIN permet de dessiner la tangente à la courbe au point d'abscisse voulu.







2 Mode SUITE : suite numérique



Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1\,200$ et $U_n = 1{,}02U_{n+1}$.

On veut calculer les premiers termes de cette suite.

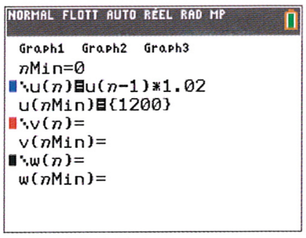
On définit la suite en fonction du terme précédent *via* la touche f(x).

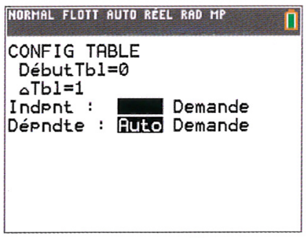
Puis, on règle la valeur initiale de la table dans deftable.

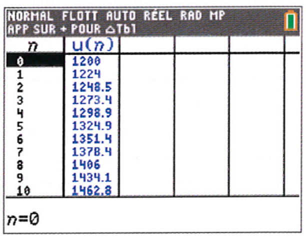
Enfin, on affiche la table des valeurs (table).

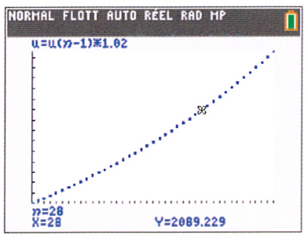
Il est possible d'afficher graphiquement les valeurs de la suite (graphe).

La touche trace permet alors de visualiser les termes de la suite graphiquement.









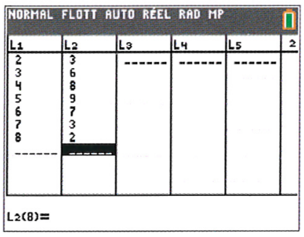
3 Mode STATS : données statistiques

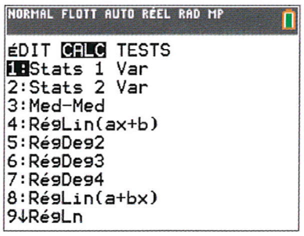
Soit les données statistiques suivantes :

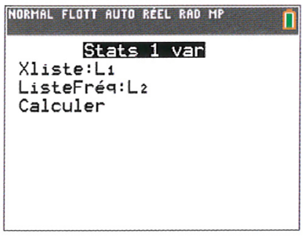
Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

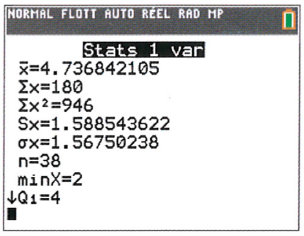
Calculer les caractéristiques de ces valeurs

Avec la touche `stats`, on rentre les valeurs dans deux listes. Puis, dans le menu `CALC`, on règle la fréquence (`ListFréq`) sur `L2`. Enfin, on calcule les caractéristiques (`Calculer`).



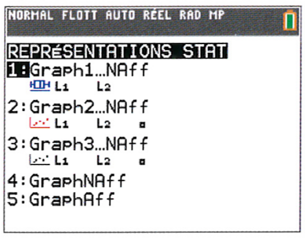


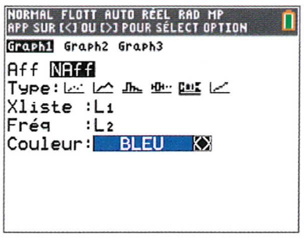


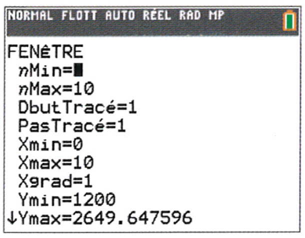


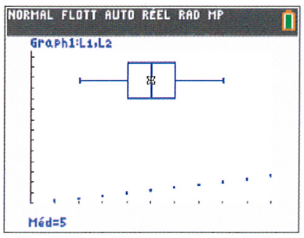
Représentation en diagramme en boîte

Dans le menu `graph stats`, on règle le type de graphique sur le visuel du diagramme en boîte sans oublier d'y associer les listes 1 et 2. Puis, on affiche le graphique en ayant réglé la fenêtre. La touche `trace` permet de voir les caractéristiques de la boîte à moustache directement sur le graphique.







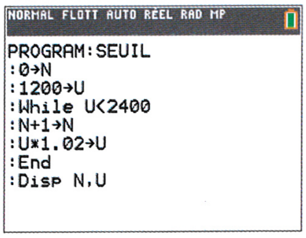


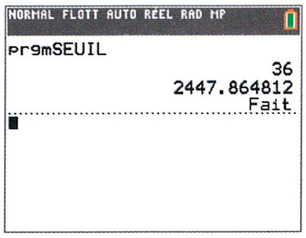
4 Mode PRGM : programmation

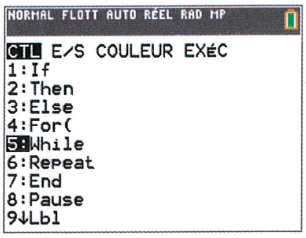
Recherche de seuil : on place 1 200 € sur un compte à intérêts composés à 2 %.

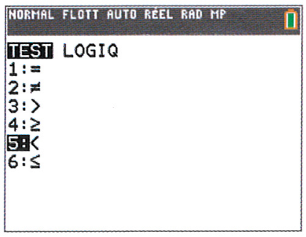
En combien d'années ce capital est-il doublé ?

On crée un nouveau programme nommé **SEUIL**. Puis, on utilise la boucle `While` (visible en cliquant sur la touche `prgm`). Les sigles de relations sont disponibles sous la touche `tests`.









Notons qu'un module Python est disponible pour programmer directement la calculatrice dans ce langage.

NUMWORKS

touche sur écran

1 Mode GRAPH : les fonctions

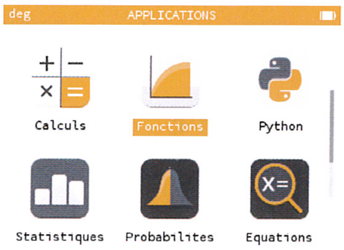
Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ par $C(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

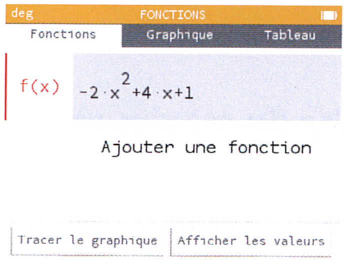
Représentation graphique de la fonction C

Dans l'application `Fonctions`, on saisit la fonction à représenter.

Puis, on règle le `Xmin` et `Xmax` du `Graphique` pour contenir le domaine de définition.

Il ne reste qu'à utiliser le mode `Y auto` pour avoir une représentation adaptée à l'écran de la calculatrice.





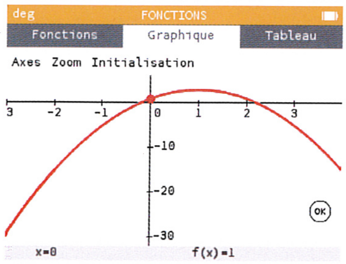
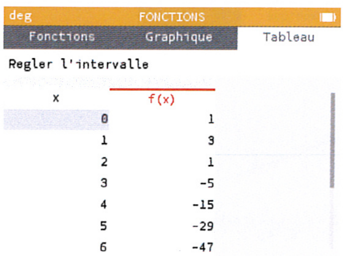
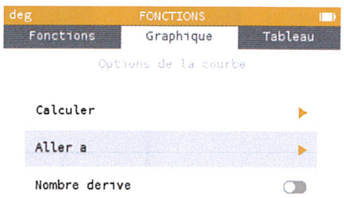
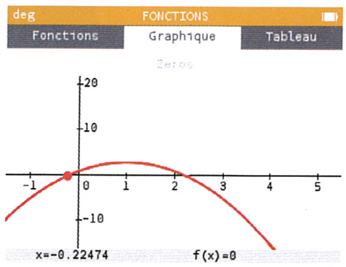


Tableau de valeurs de la fonction C

Dans l'application `Fonctions`, on peut accéder à un tableau de valeurs de la fonction ainsi qu'à d'autres fonctionnalités.





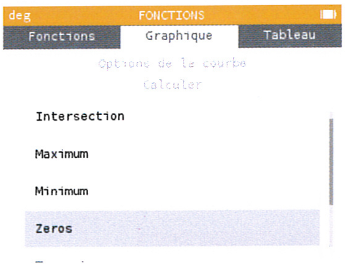


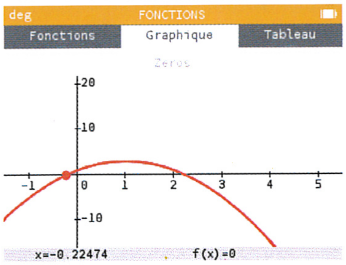
NUMWORKS

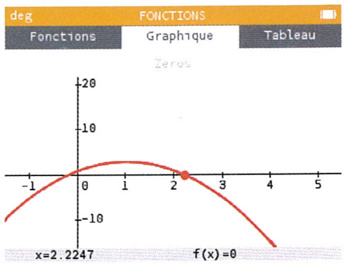
Résolution de l'équation $C(x) = 0$

L'utilisation de la touche OK permet de faire apparaître un menu nous offrant la recherche du/des zéros de la fonction.

En utilisant les flèches, on passe d'une solution à la suivante.

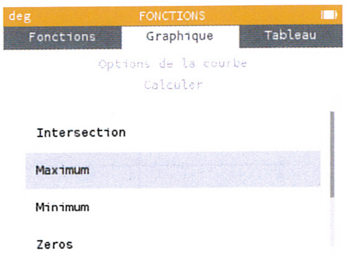


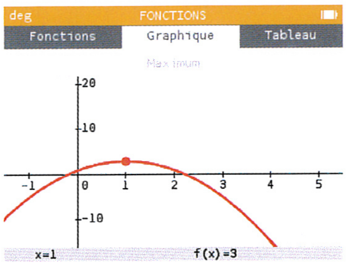




Recherche du maximum de la fonction C

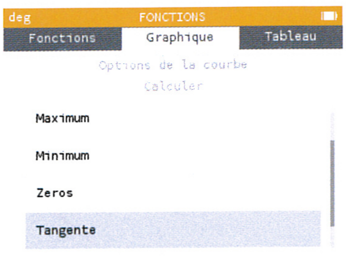
La recherche du maximum est facilité par le menu Maximum.

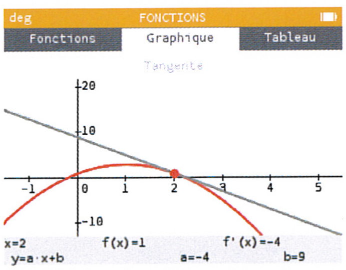




Affichage de l'équation de la tangente à la courbe en un point donné

Un menu Tangente permet directement d'afficher la tangente à la courbe au point recherché précédemment.





2 Mode SUITE : suite numérique

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1\,200$ et $U_n = 1{,}02U_{n-1}$.

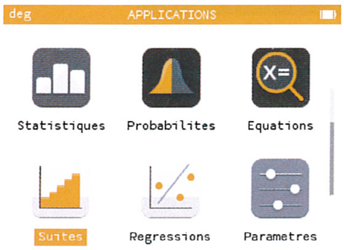
On veut calculer les premiers termes de cette suite.

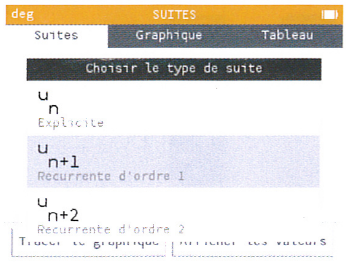
L'application `Suite` est assez intuitive.

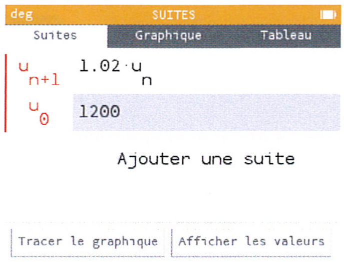
On définit la suite en fonction de ses caractéristiques.

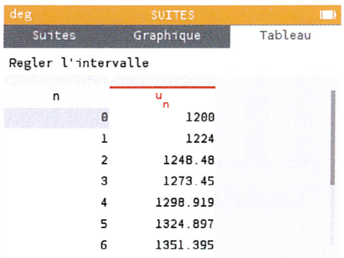
Puis on peut afficher la table des valeurs ainsi que la graphique associé.

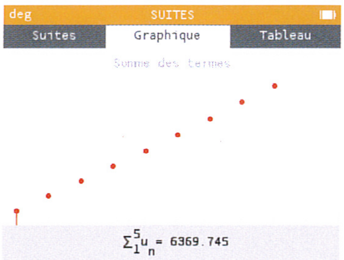
Enfin, il est facile de calculer la somme des termes voulus.

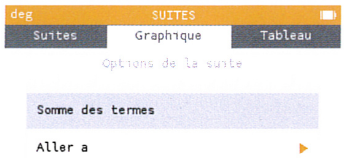


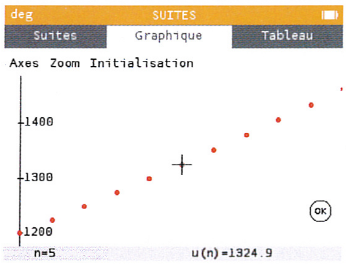












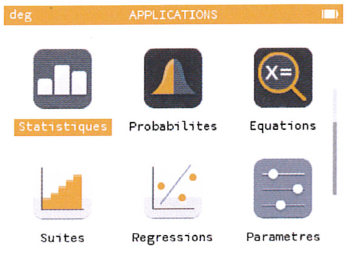
3 Mode STATISTIQUES : données statistiques

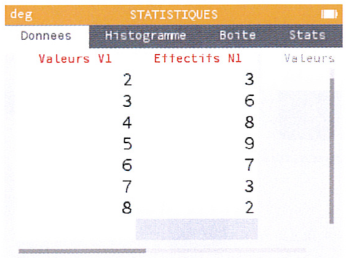
Soit les données statistiques suivantes :

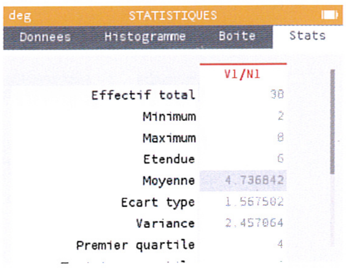
Valeurs	2	3	4	5	6	7	8
Effectifs	3	6	8	9	7	3	2

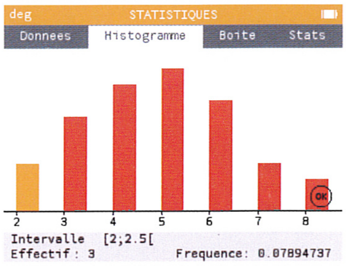
Calculer les caractéristiques de ces valeurs

Dans l'application `Statistiques`, on rentre directement les valeurs et on utilise les onglets pour afficher les caractéristiques attendues ainsi que le diagramme représentatif de la série en question.





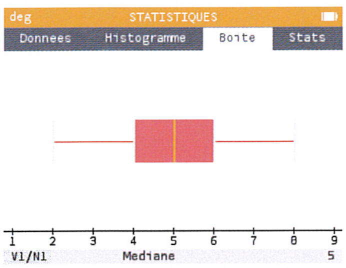




Représentation en diagramme en boîte

Directement dans les onglets supérieurs, il est possible de choisir le diagramme en boîte et de l'afficher simplement.

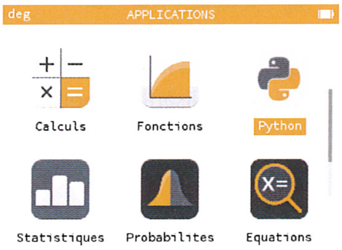
Les flèches permettent de découvrir les caractéristiques principales.

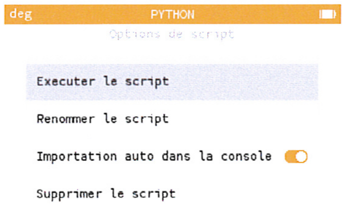


4 Mode PRGM : programmation

Recherche de seuil : on place 1 200 € sur un compte à intérêts composés à 2 %.
En combien d'années ce capital est-il doublé ?

La calculatrice NumWorks n'utilise que **Python** pour son mode de programmation.






```
>>> from seuil import *
36 2447.864812458847
>>> |
```

```
from math import *
N=0
U=1200
while U<2400:
  N=N+1
  U=U*1.02
print(N,U)
```

Corrigés

1 Suites numériques

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. d
2. a
3. c
4. c
5. d

Exercices

Pour commencer

22

1. La suite est définie de manière explicite et $u_1 = -1$.
2. La suite est définie par récurrence
et $u_1 = 3u_0 + 4 = 3 \times 2 + 4 = 10$.

41

$u_1 = 1,\ u_2 = -\frac{3}{2},\ u_3 = 11,\ u_4 = \frac{7}{12},\ u_5 = -\frac{41}{19}$

49

1. 5 termes sont affichés.
2. « = B2*2 »

54

$v_0 = -1,\ v_1 = -5,\ v_4 = -12.$

63

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -4(n+1)+5 \\ &= -4n-4+5 \\ &= -4n+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-4n+1)-(-4n+5) \\ &= -4n+1+4n-5 \\ &= -4 < 0. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est strictement décroissante.

Pour s'entraîner

71

1. À la fin de l'exécution de l'algorithme, U est égal à 287,5.
2. Cette valeur correspond au terme u_4 de la suite (u_n).
3. (u_n) peut être définie par :
$u_0 = 900$ et $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 1$.

72

On note u_n le prix de la voiture n années après son achat, avec n entier naturel.
La suite (u_n) peut être définie par récurrence avec :
$u_0 = 12\,000$ et $u_{n+1} = u_n - 600$ pour tout entier naturel n.

81

1. Comme $u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 8, u_3 = 11\ldots$, (u_n) peut être définie par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.
2. $u_0 = 2$; $u_1 = u_0 + 3$; $u_2 = u_1 + 3$ ou $u_2 = u_0 + 2 \times 3$;
de la même façon $u_3 = u_0 + 3 \times 3\ldots$
En généralisant, on peut définir (u_n) de façon explicite par :
$u_n = u_0 + n \times 3 = 2 + 3n$ pour tout entier naturel n.

84

1. Si $v_n = (1{,}5)^n$ alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (1{,}5)^{n+1} - (1{,}5)^n \\ &= (1{,}5)^n \times 1{,}5 - (1{,}5)^n \\ &= (1{,}5)^n (1{,}5 - 1) \\ &= (1{,}5)^n \times 0{,}5 > 0 \end{aligned}$$

car il s'agit d'un produit de deux nombres strictement positifs.
$v_{n+1} - v_n > 0$.
On a donc $v_{n+1} > v_n$. La suite (v_n) est strictement croissante.
2. Si $w_n = (-1{,}5)^n$ alors
$w_0 = 1 ; w_1 = -1{,}5 ; w_2 = 2{,}25 ; w_3 = -3{,}375\ldots$
Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante puisque deux termes consécutifs sont de signes contraires.

89

Si $u_n = 2^n - 10n + 4$ alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{n+1} - 10(n+1) + 4 \\ &= 2^{n+1} - 10n - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2^{n+1} - 10n - 6) - (2^n - 10n + 4) \\ &= 2^{n+1} - 2^n - 10 = 2^n(2-1) - 10 \\ &= 2^n - 10 \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant 2^4 = 16$ donc $2^n - 10 > 0$.
Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
On a donc $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 4.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

92

VRAI.
$u_{n+1} - u_n = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $n - 1 \geqslant 0$ (et $n+1$ aussi)
donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) définie pour tout entier n non nul est croissante.

93

VRAI.
La suite (u_n) est définie par récurrence car elle est définie par la donnée de son premier terme et par une relation permettant de calculer chaque terme à partir du terme précédent.

94

FAUX.
La suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left(\frac{1}{n+1}+6\right)-\left(\frac{1}{n}+6\right) \\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)}<0 \end{aligned}$$

car n est un entier strictement positif.
On a donc $u_{n+1} < u_n$.

95

On ne peut pas savoir puisque le point d'abscisse 10 ne figure pas sur le graphique.

96

FAUX.
Les coordonnées des premiers termes sont croissantes, mais ça ne permet pas de généraliser et de conclure sur les variations de la suite.

97

FAUX.
$v_{n+1}-v_n=-3n+1$.
Pour tout entier n, $n \geqslant 1, -3n \leqslant -3$ et $-3n+1 \leqslant -2$.
Par conséquent, $v_{n+1}-v_n<0$.
On a donc $v_{n+1}<v_n$.
La suite (v_n) est strictement décroissante.

98

FAUX.
Si $u_0=20$, on obtient, avec la définition par récurrence, $u_1=0{,}9\times 20+3=21$ alors qu'avec la définition explicite, on obtient $u_1=-17{,}5\times 0{,}92^1+37{,}5=21{,}4$.

QCM

99

Réponse **c.**

100

Réponse **c.**

101

Réponse **b.**

102

Réponse **a.**

103

Réponse **c.**

104

Réponse **c.**

2 Suites arithmétiques et géométriques

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. b
2. a
3. b
4. c
5. a

Exercices

Pour commencer

18

$v_1=0{,}5-0{,}6=-0{,}1$
$v_2=-0{,}1-0{,}6=-0{,}7$
$v_3=-0{,}7-0{,}6=-1{,}3$.

30

1. On obtient u_1. Sa valeur est 13,5.
2. 17.
3. $u_{n+1}=u_n+3{,}5$
4. $u_{n+1}-u_n=3{,}5$
donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 3,5.
5. On lit le sixième terme de la suite dans la cellule B7 ; il est égal à 5 (il s'agit de u_5).
6.

	A	B
1	n	un
2	0	10
3	1	13,5
4	2	17
5	3	20,5
6	4	24
7	5	27,5
8	6	31

Corrigés

33

1. $u_{n+1} - u_n = 7$
donc la raison de cette suite est 7 et la suite est croissante.
2. $u_{n+1} - u_n = -0,5$
donc la raison de cette suite est -0,5 et la suite est décroissante.

37

$u_2 = \frac{4}{5} \times u_1 = \frac{4}{5} \times 5 = 4$

$u_3 = \frac{4}{5} \times u_2 = \frac{16}{5}$

$u_4 = \frac{4}{5} \times u_3 = \frac{64}{25}$

Pour s'entraîner

45

1. $u_0 = 4 \times 3^0 = 4$
$u_1 = 4 \times 3^1 = 12$
$u_2 = 4 \times 3^2 = 36.$
La suite semble géométrique de raison 3.
2. $u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1}$
3. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n}$
$= \frac{3^{n+1}}{3^n}$
$= 3^1$
$= 3.$
La suite est donc bien géométrique de raison 3.
4. $t_{n+1} = 84 - 3(n+1) = 84 - 3n - 3 = 81 - 3n$
Donc $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{81 - 3n}{84 - 3n}$, ce qui ne se simplifie pas.
La suite n'est pas géométrique.
On peut vérifier :
$t_0 = 84, t_1 = 81, t_2 = 78. \frac{t_1}{t_0} \neq \frac{t_2}{t_1}.$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{0,5^{n+1}}{0,5^n} = 0,5$
Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 0,5.

48

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 5$
La suite est donc une suite géométrique de premier terme positif et de raison 5 qui est supérieure à 1 ; elle est donc croissante.
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0,5$
La suite est donc une suite géométrique de premier terme positif et de raison 0,5 qui est inférieure à 1 ; elle est donc décroissante.

52

1. $u_0 = 3$
$u_1 = 2,2,$
$u_2 = 1,4$
$u_3 = 0,6$
$u_4 = -0,2$
2. La suite est de raison $-0,8$.
3. Elle est décroissante.

55

1. $u_5 = 1800.$
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison 200.
3. Il faut calculer :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8.$
Pour cela, on peut, par exemple, utiliser un tableur :

	A	B
1	n	prix du km n
2	1	1000
3	2	1200
4	3	1400
5	4	1600
6	5	1800
7	6	2000
8	7	2200
9	8	2400
10		
11	somme	13600

4. La somme dont dispose la commune est donc insuffisante.

58

1. $u_0 = 1800, u_1 = 1800 \times 1,05 = 1890,$
$u_2 = 1890 \times 1,05 = 1984,5.$
2. Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par 1,05.
La suite est donc géométrique de raison 1,05.
3. $u_3 = 2\,083,73$. Elle disposera de la somme au 1er janvier 2021.

59

1. a. $\boxed{=C1*1,05}$
b. $1,05^4 = 1,22$ donc augmentation de 22 % entre 2018 et 2022.
c. (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.
2. (v_n) est une suite arithmétique de raison 130.
3. Non, à partir de 2026, le nombre d'abonnements ne sera plus supérieur à treize fois le nombre de scooters :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
2	Nombre d'abonnements annuels	16000	16800	17640	18522	19448,1	20420,505	21441,5303	22513,6068	23639,2871
3	Nombre de scooters	800	930	1060	1190	1320	1450	1580	1710	1840
4	13xnb de scooters	10400	12090	13780	15470	17160	18850	20540	22230	23920
5	condition vérifiée	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	NON

62

1. $h_1 = 5\,000$
$h_2 = 6\,500$
$h_3 = 8\,450$
$h_4 = 10\,985$
Donc $\frac{h_2}{h_1} = 1{,}3 = \frac{h_3}{h_2} = \frac{h_4}{h_3}$.
La suite est donc géométrique de raison 1,3.
2. $h_{n+1} = 1{,}3h_n$
3. La deuxième semaine de juillet, on peut prévoir $h_6 = 18\,564$ résidents (valeur arrondie par défaut).
4. $h_{11} = 68\,969$
$h_{12} = 89\,608$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

67

FAUX.
$u_0 = -5$, $u_1 = -1$ et $u_1 - u_0 = 4 \neq -5$.

68

VRAI.
$u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 2^{n+1}}{4 \times 2^n} = 2$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison 2.

69

FAUX.
En 2020, Pierre aura un salaire mensuel net de :
$1\,500 \times 1{,}022 = 1\,533$ euros.
En 2021, son salaire sera de $1\,533 \times 1{,}022$
soit 1 566,73 environ.
En 2022, il sera de $1\,566{,}73 \times 1{,}022 = 1\,601{,}20$.

70

FAUX.
$u_0 = 1$
$u_1 = \frac{1}{3}$
$$u_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$
$u_1 - u_0 = -\frac{2}{3}$
alors que $u_2 - u_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$.

71

VRAI.
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$
donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

72

VRAI.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,015 donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,015.

73

FAUX.
$u_1 = 8$
$u_2 = 5$
$u_3 = 3$
Donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.
Or $\frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.
Donc la suite n'est pas géométrique.

QCM

74

Réponse **d.**

75

Réponse **c.**

76

Réponse **c.**

77

Réponse **c.**

3 Généralités sur les fonctions

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. a
2. d
3. a
4. c
5. a
6. a
7. c

Exercices

Pour commencer

23

Soit v la valeur en euros.
1. $f(v) = 6v + \frac{6v}{10}$
2. $f(v) = 6{,}6v$ soit environ la valeur initiale (6,56 francs par euro).

Corrigés

27

1. 3 000 €
2. Recette : 2 000 €.
Il n'y a pas de bénéfices car le coût est supérieur à la recette.
3. Pour 1 ou 3 tonne(s), le bénéfice est nul.
On gagne donc de l'argent entre 1 et 3 tonnes produites.
4. Il semble que le bénéfice soit maximal pour 2 tonnes avec une recette de 8 000 € et un coût de 7 000 €, soit un bénéfice de 1 000 €.

33

$h(7)=3$ et $h(3)=7$.
Le taux de variation est : $\frac{4}{4}=1$.

36

1. $h(0)=2$
$h(-3)=-2$
Le taux a est $\frac{4}{3}$.
C'est la pente de la droite (AB).
2. $h(1)=3$
$h(4)=-2$
Le taux a est $\frac{5}{3}$.
C'est la pente de la droite (EF).

42

1. a. Le maximum est pour $x=1$ et vaut 5.
b. Le maximum local est 3 pour $x=8$.
2. a. $f(x)\in[1\,;5]$.
b. $f(x)\in[0\,;5]$.
c. f est croissante sur $[-2\,;1]$ et sur $[5\,;8]$.
3. a. $f(1{,}3)>f(3{,}7)$ car f est décroissante sur cette partie.
b. $f(0{,}5)>f(4)$ pour la même raison.

Pour s'entraîner

44

Tarif 1 : $40\times x$.
Tarif 2 : $20x+453$.
À partir de 23 trajets, il est avantageux de prendre un abonnement.

48

1. $v=d/t=10$ km.h^{-1}.
2. a. Environ 4,28 km.h^{-1}.
b. f n'est pas linéaire : d'ailleurs, $f(0)$ n'est pas défini.
c. f est décroissante.

54

$g(-3)=-11$
$g(0)=4$
Taux : $\frac{15}{3}=5$.

64

1. $f(2)=\frac{3}{4}$. Donc trois quarts des personnes ont eu connaissance de l'existence du don du sang après 2 semaines de publicité.
2. $f(0)$ correspond à la fréquence de personnes ayant connaissance du don du sang avant la campagne.
3. a. $\tau(x_1,x_2)=\frac{6}{(3x_2+2)(3x_1+2)}>0$ pour tous x_1 et x_2 strictement positifs.
b. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

65

FAUX.
$x=0$ ou $x=2$.

66

VRAI.
$f(2)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$.

67

FAUX.
$f(1)-f(-1)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}$.

68

VRAI.
Car f est une fonction affine.

69

FAUX.
$-1\leqslant x\leqslant 1$.

70

FAUX.
La fonction peut être ni croissante, ni décroissante.

71

VRAI.
Mais elle n'est pas strictement croissante.

72

FAUX.
La comparaison de deux valeurs ne permet pas de conclure sur les variations.

QCM

73

Réponse **d.**

74

Réponse **c.**

75

Réponse **c.**

76

Réponse **c.**

77

Réponse **d.**

4 Fonctions polynômes de degrés 2 et 3

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. c
2. c
3. d
4. d

Exercices

Pour commencer

29

Pour f : puisque $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Il s'agit donc de la courbe orange.
Pour g : puisque $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. Il s'agit donc de la courbe bleue.

45

$g(1) = -2$
Donc $a \times 1^3 = -2$ soit $g(x) = -2x^3$

53

1. $g(x) = -11x^3 + 10$
2. $g(x) = -90x^3 - 15$

55

f admet trois racines : -3, -1 et 2.
g admet deux racines : -3 et 2.
h admet une seule racine : 2.

Pour s'entraîner

60

1. $0{,}0056t^2 - 6{,}1517t + 4\,389 = 4\,389$
$\Leftrightarrow 0{,}0056t^2 - 6{,}1517t = 0$
$\Leftrightarrow t(0{,}0056t - 6{,}1517) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \dfrac{6{,}1517}{0{,}0056} \approx 1098{,}52$

2. L'axe de symétrie a pour équation $x = \dfrac{0 + 1098{,}52}{2}$, c'est-à-dire $x = 549{,}26$.
3. $a > 0$ donc p est décroissante sur $]-\infty\,;549{,}26]$ et croissante sur $[549{,}26\,;+\infty[$.
4. Le nombre de levures est décroissant sur $[330\,;480]$.
8 h = 480 min.
$g(480) \approx 2\,726$.
Au bout de 8 heures, il y aura 2 726 levures.

63

Partie A

1. $-(-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 24 \times (-2) + 28 = 0$,
$-7^3 + 3 \times 7^2 + 24 \times 7 + 28 = 0$.

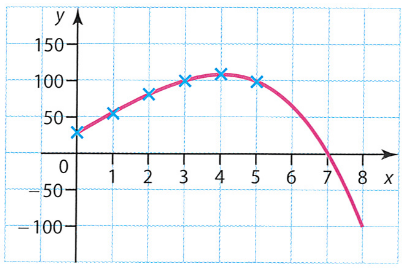
2. Puisque (-2) est une racine double et que 7 est une racine simple :
$f(t) = a(t+2)^2(t-7)$.
On calcule :
$f(0) = 28$
$f(0) = a \times 4 \times (-7) = -28a$
Donc $a = -1$ et $f(t) = -(t+2)^2(t-7)$.

3.

t	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(t+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$t-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

1.



2. a. Les points sont très proches de la courbe sur l'intervalle $[0\,;5]$. Pour la suite, nous ne savons pas si la courbe reste un modèle d'évolution.
b. Au bout de deux semaines et demi, le nombre de cas de varicelle sera d'environ 90.
Le nombre de cas de varicelle restera supérieur à 100 pendant 1,9 semaine environ, c'est-à-dire environ 13 jours.
c. $f(7) = 0$, il faudra donc attendre 7 semaines.

Corrigés

64

1. $(x-5)(x-39{,}5)(x-51{,}5)$
$=(x-5)(x^2-91x+2034{,}25)$
$=x^3-96x^2+2\,489{,}25x-10\,171{,}25$
$=f(x)$

2.

x	0		5		39,5		50
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-39{,}5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-51{,}5$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. L'entreprise réalise des profits lorsque le bénéfice est positif pour une production de machines comprise entre 6 et 39 (pour 5 machines, le bénéfice est nul).

66

1. $-2\times5^2+90\times5-400=0$
et $-2\times40+90\times40-400=0$.

2. La forme factorisée de la fonction est :
$f(x)=-2(x-5)(x-40)$.

3. La fonction f est négative sauf sur l'intervalle $[5\,;40]$.

4. f atteint son extremum pour $\dfrac{5+40}{2}=22{,}5$.

5. Tableau de variation de la fonction.

x	15	22,5	30
Variations de $f(x)$	500 ↗	612,5	↘ 500

6. L'entreprise fait donc du profit lorsqu'elle produit entre 5 000 et 40 000 ventilateurs, ce qui est toujours vrai ici et le profit est maximum pour une production de 22 500 ventilateurs.

68

1. $3{,}5>0$ donc l'extremum est un minimum.

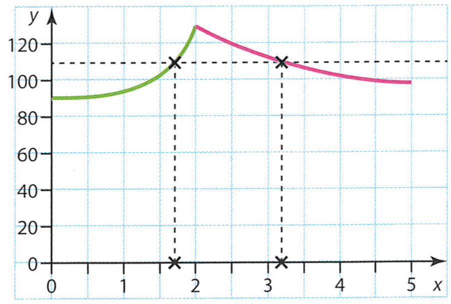
2. $g(t)=186 \Leftrightarrow 3{,}5t^2-35t=0$
$\Leftrightarrow t(3{,}5t-35)=0$
$\Leftrightarrow t=0$ *ou* $t=10$

3. La valeur pour laquelle l'extremum de la fonction sera atteint $\dfrac{0+10}{2}=5$.

4. Tableau de variation de la fonction g.

t	2	5
Variations de g	500 ↘	98,5

5. Graphique pour les cinq heures.



6. Le taux d'insuline est supérieur strictement à 110 µU.mL^{-1} entre 1,7 h et 3,2 h soit pendant 1 h 30.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

69

VRAI.
$4\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-20=5$.

70

VRAI.
$4(x-2)(x+3)=4(x^2+x-6)$.
$=4x^2+4x-24$

71

FAUX.
Le vecteur a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

72

FAUX.
$2\times(-1)^3-3\times(-1)^2+4\times(-1)-3=-12$.

73

VRAI.
$x=\sqrt[3]{-4}$.

74

FAUX.
Seulement 2 racines : 1 et 4.

75

VRAI.
$R^3=\dfrac{3V}{4\pi}$.

QCM

76

Réponse **a.**

77

Réponse **c.**

78

Réponse **c.**

79

Réponse **a.**

80

Réponse **c.**

81

Réponse **b.**

82

Réponse **b.**

5 Dérivation

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. c
2. c
3. b
4. b
5. c

Exercices

Pour commencer

18

Soit h un nombre réel non nul.

$f(-2)=(-2+1)^2=1$

$$f(-2+h)=(-2+h+1)^2 = (h-1)^2 = h^2-2h+1$$

$$\text{Donc } \tau(h)=\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{h^2-2h+1-1}{h} = \frac{h^2-2h}{h} = h-2$$

$f'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=-2$

22

1. Le coefficient directeur de T_A est -3.
2. T_A est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2, son coefficient directeur est $f'(-2)$.
Par conséquent, $f'(-2)=-3$.

25

1. $f(5)=4$, $f'(5)=0$ et $f'(8)=\frac{-4}{3}$
2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y=4$.
3. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation :

$$y=f'(8)(x-8)+f(8) = \frac{-4}{3}(x-8)+2 = \frac{-4}{3}x+\frac{38}{3}$$

Soit $y=\frac{-4}{3}x+\frac{38}{3}$.

29

1. $g'(x)=2x$
2. $g'(x)=-2x+3$
3. $g'(t)=2t$
4. $g'(q)=3\times 2q-1=6q-1$

47

On étudie le signe de $f'(x)$ en étudiant le signe de chaque facteur et en appliquant la règle des signes pour le produit :

x	-1		0		$1{,}2$		2
$-5x$		+	0	−		−	
$(x-1{,}2)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	−	

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	-4		0		$1{,}2$		4
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	−	
Variations de f		↗			↘		

52

1. Pour tout x réel de l'intervalle $[2\,;5]$,
$f'(x)=\frac{2}{3}\times 3x^2-\frac{9}{2}\times 2x+4=2x^2-9x+4$
2. $(x-4)(2x-1)=2x^2-x-8x+4=2x^2-9x+4=f'(x)$.

3. On étudie le signe de $f'(x)$ en étudiant le signe de chaque facteur et en appliquant la règle des signes pour le produit :

x	2		0,5		4		5
$x-4$		−		−	0	+	
$2x-1$		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	2		−0,5		4		5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f	$-\frac{49}{6}$	↗	$-\frac{53}{24}$	↘	$-\frac{37}{3}$	↗	$-\frac{11}{3}$

Pour s'entraîner

59

1. a. $f(-4)=5$.
b. Le coefficient directeur de la tangente T_A est 2 donc $f'(-4)=2$.
c. T_A a donc une équation du type $y=2x+b$ et passe par le point A$(-4\,;5)$ donc :
$5=2\times(-4)+b$
ce qui est équivalent à $b=13$.
L'équation de T_A est donc $y=2x+13$.
2. Le coefficient directeur de T_B est (-2) donc $f'(0)=-2$.

61

1. a. $f(4)=5 \quad f'(4)=0 \quad f'(6)=-1{,}5$
b. $f'(1{,}5)$ est positif car f est croissante sur $[2\,;4]$.
Par conséquent, $f'(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[2\,;4]$
2. a. $f(x)=0$, $S=\{2\}$.
b. $f(x)\geqslant 0$, $S=[2\,;+\infty[$.
c. $f'(x)=0$, $S=\{4\,;8\}$.
d. $f'(x)\geqslant 0$, $S=]-\infty\,;4]\cup[8\,;+\infty[$.
3. Ce sont les variations de f qui donne le signe de f' :

x	$-\infty$		4		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

65

1. $f'(x)=-4x+90$
2. $f'(x)=0$ si $x=22{,}5$.

3.

x	15		22,5		30
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	500	↗	612,5	↘	1 500

4. Le bénéfice est maximal pour 2 250 enceintes produites. Ce bénéfice maximal est de 61 250 €.

70

1. $C(3{,}5)=23{,}125$.
Le coût de fabrication de 35 composants est de 21 125 €.
2. $C'(q)=3q^2-18q+15$.
$(3q-3)(q-5)=3q^2-15q-3q+15=3q^2-18q+15=C'(q)$.
3.

x	0		1		5		7
Signe de $(q-5)$		−		−	0	+	
Signe de $(3q-3)$		−	0	+		+	
Signe de $C'(q)$		+	0	−	0	−	
Variations de C	38	↗	45	↘	13	↗	45

4. Le coût de production minimale est de 13 000 € pour 500 composants produits.
5. À l'aide du tableur de la calculatrice, on cherche q pour que $C(q)\leqslant 20$.
6. Pour une production comprise entre 380 et 60 composants, l'entreprise aura un coût de production inférieur à 20 000 €.

77

1. $B'(x)=-20x+860$.
2. $B'(x)=0$ si $x=43$.
$B'(x)$ s'annule et change de signe en 43, la fonction B admet donc un extremum en 43.
3.

x	0		43		60
Signe de $B'(x)$		+	0	−	
Variations de B	−4 050	↗	14 440	↘	11 550

4. Le bénéfice maximal est de 14 440 € pour 43 coffrets vendus.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

75

VRAI.
La courbe de f' est située au-dessus de l'axe des ordonnées sur cet intervalle.

76

FAUX.
La dérivée f' étant positive sur $]-\infty\,;1]$, f est croissante sur cet intervalle.
Or $f(1)=0$ d'après l'énoncé donc $f(x)\leqslant 0$ sur cet intervalle.

77

VRAI.
La dérivée f' est positive puis négative puis positive, donc f est bien croissante puis décroissante puis enfin croissante.

78

Vrai.
La courbe de f' coupe l'axe des abscisses en deux points (1 et environ 2,2) donc f admet DEUX tangentes horizontales.

79

VRAI. En 1, f' s'annule en changeant de signe donc f admet bien un extremum local en 1.

x	$-\infty$		1		$2{,}2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

80

FAUX.
La dérivée f' ne s'annule pas en 1,5.

81

VRAI.
On lit graphiquement $f'(3)=4$.

QCM

82

Réponse **b.**

83

Réponse **c.**

84

Réponse **b.**

85

Réponse **b.**

86

Réponse **c.**

87

Réponse **b.**

6 Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. c
2. a
3. d
4. b
5. b
6. d
7. c

Exercices

Pour commencer

16

44,064 %.

20

1.

	Résidences principales	Résidences secondaires	Logements vacants
Part	88,8 %	3,6 %	7,6 %
Nombre	786 377	40 966	63 231

2. Pourcentage de logements vacants en France métropolitaine : 8 %.

3. $\dfrac{19\,997\times 100}{5{,}9}\approx 338\,932$

donc 338 932 logements en Savoie.

Corrigés

24

1.

	Filles	Garçons	Total
Brevet (DNB)	0,22	0,20	0,42
CAP	0,05	0,06	0,11
BEP	0,04	0,04	0,08
Baccalauréat général	0,11	0,08	0,19
Baccalauréat technologique	0,04	0,04	0,08
Baccalauréat professionnel	0,05	0,07	0,12
Total	0,50	0,50	1

2.

	Filles	Garçons	Total
Brevet (DNB)	0,51	0,49	1
CAP	0,43	0,57	1
BEP	0,49	0,51	1
Baccalauréat général	0,56	0,44	1
Baccalauréat technologique	0,52	0,48	1
Baccalauréat professionnel	0,40	0,60	1

3.

	Filles	Garçons
Brevet (DNB)	0,43	0,41
CAP	0,10	0,13
BEP	0,08	0,08
Baccalauréat général	0,21	0,16
Baccalauréat technologique	0,08	0,08
Baccalauréat professionnel	0,10	0,14
Total	1	1

4. a. Proportion de garçons dans l'ensemble des élèves diplômés : 50 %.
b. Proportion des élèves qui ont obtenu le brevet dans l'ensemble des élèves diplômés : 84 %.
c. Proportion des élèves qui ont obtenu un baccalauréat dans l'ensemble des élèves diplômés : 37 %.
d. Proportion des filles qui ont obtenu un BEP dans l'ensemble des élèves diplômés : 4 %.
e. Parmi les filles, le pourcentage de diplômées d'un baccalauréat général : 21 %.
f. Parmi les garçons, le pourcentage de diplômés d'un baccalauréat technologique : 8 %.

25

1. Part des résidences principales parmi les logements ne comportant qu'une pièce : 67,4 %.
2. Part des résidences secondaires parmi l'ensemble des logements : 8,8 %.
3. On peut dire qu'il y a environ 10 fois plus de résidences principales en France que de résidences secondaires.

27

1. $P(\mathrm{F}) = \frac{180}{540} = \frac{1}{3}$ et $P(\overline{\mathrm{F}}) = \frac{2}{3}$

2. $P(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{C}) = \frac{90}{540} = \frac{1}{6}$.

3. $P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{C}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$

Pour s'entraîner

35

L'aire totale de la Terre est d'environ 510 millions de km^2.
1. 79 % valeur arrondie à l'unité.
2. L'aire de l'océan Pacifique : 234,6 km^2.

40

1. La proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le yoga : $\frac{49}{90}$.
2. La proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le tir à l'arc : $\frac{35}{90}$.

43

Tableau initial complété :

Nbre de films / Âge	0	1	2	>3	Total
[18 ; 30[	7	18	15	10	50
[30 ; 60[	9	6	3	12	30
Total	16	24	18	22	80

1. Tableau des fréquences marginales :

Nbre de films / Âge	0	1	2	>3	Total
[18 ; 30[	7/80 0,0875	0,225	0,1875	0,125	0,625
[30 ; 60[	0,1125	0,075	0,0375	0,15	0,375
Total	0,2	0,3	0,225	0,275	1

2. Tableau des fréquences conditionnelles par lignes :

Âge \ Nbre de films	0	1	2	>3	Total
[18 ; 30[	0,14	0,36	0,3	0,2	1
[30 ; 60[	0,3	6/30 = 0,2	0,1	0,4	1

3. a. Tableau des fréquences conditionnelles par colonnes :

Âge \ Nbre de films	0	1	2	>3
[18 ; 30[	0,4375	0,75	$\approx 0{,}83$	$\approx 0{,}45$
[30 ; 60[	0,5625	0,25	$\approx 0{,}17$	$\approx 0{,}56$
Total	1	1	1	1

4. Pourcentage de personnes ayant entre 30 et 60 ans parmi celles qui ont effectué exactement deux téléchargements : 17 %.

49

1. La probabilité que ce soit un homme vaut 0,84.
2. Quelle est la probabilité que ce soit un maire de la Savoie 0,08 (effectif : 305).
3. Quelle la probabilité qu'il s'appelle Dominique et que ce soit un homme 0,013 (effectif : 472).
4. a. Le tableau d'effectifs :

	Hommes	Femmes	Total
Commune $<$ 2 500 hab.	27 106	5 357	32 463
Commune $>$ 2 500 hab.	3 645	520	4 165
Total	30 751	5 877	36 628

b. Le tableau correspondant avec les fréquences marginales.

	Hommes	Femmes	Total
Commune $<$ 2 500 hab.	0,74	0,15	0,89
Commune $>$ 2 500 hab.	0,10	0,01	0,11
Total	0,84	0,16	1

c. Les tableaux des fréquences conditionnelles en ligne et en colonne.

	Hommes	Femmes	Total
Commune $<$ 2 500 hab.	0,83	0,17	1
Commune $>$ 2 500 hab.	0,88	0,12	1

	Hommes	Femmes
Commune $<$ 2 500 hab.	0,88	0,91
Commune $>$ 2 500 hab.	0,12	0,09
Total	1	1

d. Analyse des résultats obtenus : la part des femmes maires est faible et elle l'est d'autant plus que les villes sont importantes.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

52

FAUX.
$375 \times 0{,}381 = 142{,}875$

53

VRAI.
$\dfrac{218 \times 100}{29{,}26} \approx 745$

54

FAUX.
$4\,000 \times 0{,}08 \times 0{,}05 = 16$

55

1. FAUX.
$P(\mathrm{F}) = \dfrac{400}{1000} = 0{,}4.$

2. FAUX.
$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) = \dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}.$

3. VRAI.
$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G}) = \dfrac{200}{1000} = 0{,}2.$

4. VRAI.
$P(\mathrm{A}) = \dfrac{300}{1000}.$

QCM

56

1. Réponse **b.**
2. Réponse **c.**

57

1. Réponse **a.**
2. Réponse **c.**

Corrigés

7 Variables aléatoires

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. b
2. b
3. d
7 s'obtient de 6 façons différentes :
(1, 6) (6,1) (2, 5) (5,2) (3,4)(4,3).
La probabilité est $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.
4. c
5. c
6. c

Exercices

Pour commencer

23

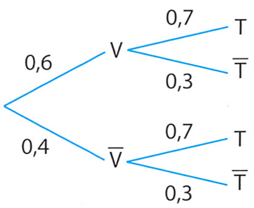
1. La probabilité qu'un moteur soit défectueux est égale à 0,35.
2. $P(Y \leqslant 2)=0{,}2+0{,}35+0{,}26=0{,}81$.
3. On calcule $P(Y \geqslant 3)=1-P(Y \leqslant 2)=0{,}19$.

26

$E(N)=0\times 0{,}05+1\times 0{,}3+2\times 0{,}45+3\times 0{,}2=1{,}8$.
Il y a « en moyenne 1,8 client sur une durée de 5 minutes ».

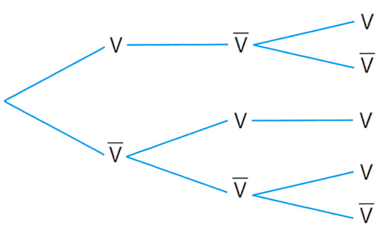
29

1.



2. $P(\overline{V}\cap T)=0{,}4\times 0{,}7=0{,}28$.

38



Pour s'entraîner

50

1.

Dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Gain (X)	3	2	−4	2	−4	2

$P(X=-4)=\frac{1}{3}$
$P(X=2)=\frac{1}{2}$
$P(X=3)=\frac{1}{6}$
2. $E(X)=-4\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

54

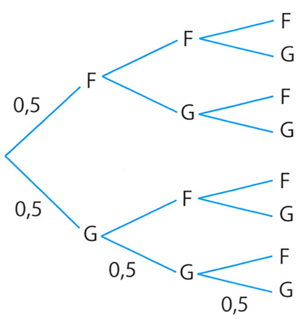
$\text{E(gain)}=\frac{35}{37}\times M-\frac{36}{37}\times M=-\frac{1}{37}M$.
Donc, pour n'importe quelle mise, le joueur est perdant en moyenne sur un grand nombre de tentatives.

57

1. $P(\text{deux feux verts})=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.
2. $P(\text{aucun feu vert})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$.
3. $P(\text{un seul feu vert})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

60

1. La situation peut être modélisée par la répétition de façon identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli que l'on peut représenter par un arbre.
2.



3. La probabilité d'avoir 3 garçons est égale $(0{,}5)^3=0{,}125$.

64

1. $P(\text{aucune n'a de pépins}) = 0{,}88^4$.

2.

x_i	0	1	2	3	4	Total
$P(X=x_i)$	0,5997	0,3271	0,0669	0,0061	0,0002	1

3. En moyenne sur un lot de 4 on a environ 2 clémentines sans pépins. $(4 \times 0{,}5997 \approx 2{,}4)$

Pour faire le point

Vrai ou Faux

Voici l'énoncé version tableur :

Gain	3	5	-2	Total
proba	0,375	0,125	0,5	1
Calcul E(x)	1,125	0,625	-1	0,75

73

VRAI.
Voir tableau ci-dessus.

74

FAUX.
$P(X=5)=\dfrac{1}{8}$

75

FAUX.
$E(X)=0{,}75$.

76

VRAI.
$P(G=3)=P(X=5)$ soit $\dfrac{1}{8}$.

77

VRAI.
$P(G>0)=1-P(G=0)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

78

FAUX.
Dans ce jeu, au pire, on ne perd rien $(G=0)$ donc, forcément, l'espérance est positive.

79

VRAI.
G prend les valeurs : -4, 1 et 3.

80

FAUX.
$P(G \geqslant -2)=1-P(G=-4)=0{,}5$.

QCM

81

Réponse **a.**

82

Réponse **c.**

83

Réponse **b.**

84

Réponse **b.**

85

Réponse **b.**

86

Réponse **c.**

Corrigés

8 Trigonométrie

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. d
2. b
3. c
4. a
5. c
6. b

Exercices

Pour commencer

31

1. $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ et $-\frac{7\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}\right)$.

2. La mesure principale de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}\right)$ est π,

celle de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}\right)$ est $-\frac{2\pi}{3}$,

celle de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right)$ est $\frac{2\pi}{3}$.

3. Une autre mesure de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}\right)$ est $-\pi$,

une autre mesure de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}\right)$ est $\frac{4\pi}{3}$,

une autre mesure de $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right)$ est $-\frac{4\pi}{3}$.

33

1. Non, car $-\frac{121\pi}{3} \notin \left]-\pi\,;\pi\right]$.

2. Soit α la mesure principale cherchée ; on a donc $\alpha = -\frac{121\pi}{3} + k2\pi$ où k est un entier relatif.

$-\pi < \alpha \leqslant \pi$ si et seulement si $-\pi < -\frac{121\pi}{3} + k2\pi \leqslant \pi$

si et seulement si $\frac{118\pi}{3} < k2\pi \leqslant \frac{124\pi}{3}$

si et seulement si $\frac{59}{3} < k \leqslant \frac{62}{3}$

Or $\frac{59}{3} \approx 19{,}7$ et $\frac{62}{3} \approx 20{,}7$ donc l'entier relatif k cherché est $k = 20$.

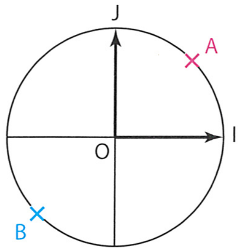
On a donc
$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{121\pi}{3} + 20 \times 2\pi\\ &= -\frac{121\pi}{3} + 40\pi\\ &= -\frac{121\pi}{3} + \frac{120\pi}{3}\\ &= -\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

La mesure principale de l'angle est $-\frac{\pi}{3}$.

36

1. $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.



3. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

38

1. $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

$\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$.

2. $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$

$\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$;

$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$

$\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

$\cos\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

$\sin\frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$

$\cos\frac{7\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

$\sin\frac{7\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

41

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2. Parmi l'infinité de solutions de cette équation, on cherche celles qui appartiennent à l'intervalle $\left]-2\pi\,;\pi\right]$.

$-2\pi < -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi$ ssi $-2\pi + \frac{\pi}{6} < k2\pi \leqslant \pi + \frac{\pi}{6}$

ssi $-\frac{11\pi}{6} < k2\pi \leqslant \frac{7\pi}{6}$

ssi $-\frac{11}{12} < k \leqslant \frac{7}{12}$

Or, le seul entier k appartenant à $\left]-\frac{11}{12};\frac{7}{12}\right]$ est 0.

$$-2\pi < \frac{\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi \text{ ssi } -2\pi - \frac{\pi}{6} < k2\pi \leqslant \pi - \frac{\pi}{6}$$
$$\text{ssi} \quad -\frac{13\pi}{6} < k2\pi \leqslant \frac{5\pi}{6}$$
$$\text{ssi} \quad -\frac{13}{12} < k \leqslant \frac{5}{12}$$

Or, les seuls entier k appartenant à $\left]-\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right]$ sont -1 et 0.

Les solutions dans l'intervalle $]-2\pi\,;\,\pi]$ de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont donc :

$x = -\frac{\pi}{6} + 0 \times 2\pi = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6} + (-1) \times 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$

et $x = \frac{\pi}{6} + 0 \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

$S = \left\{-\frac{11\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\right\}$.

Pour s'entraîner

48

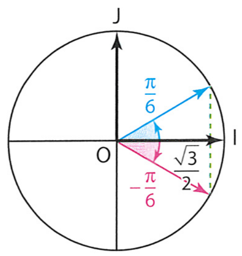
1. $x - y = \frac{22\pi}{7} \neq k2\pi$ donc x et y ne sont pas les mesures d'un même angle orienté.

2. $x - y = -8\pi = -4 \times 2\pi$ donc x et y sont les mesures d'un même angle orienté.

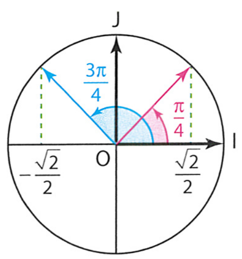
3. $x - y = -5\pi \neq k2\pi$ donc x et y ne sont pas les mesures d'un même angle orienté.

52

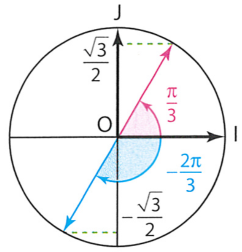
a. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



b. $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

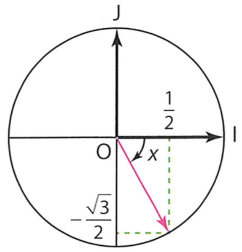


c. $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



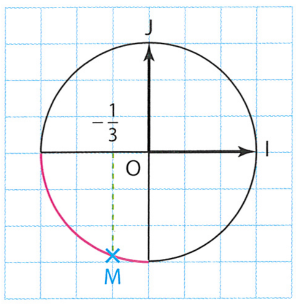
55

$x = -\frac{\pi}{3}$.



60

1.



2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ssi $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2 x = 1$

ssi $\frac{1}{9} + \sin^2 x = 1$

ssi $\sin^2 x = \frac{8}{9}$

ssi $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Or, lorsque $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x$ est négatif donc $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

69

a. Pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} f(x+0{,}2) &= \sin[10\pi(x+0{,}2)] \\ &= \sin(10\pi x + 2\pi) \\ &= \sin(10\pi x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b. Pour tout nombre réel x,

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$$
$$=\cos\left(4x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=f(x).$$

Pour faire le point

Vrai ou Faux

72

VRAI.

Car la mesure en radians de l'angle est $\frac{105\pi}{180}$ soit $\frac{7\pi}{12}$.

73

FAUX.

La mesure de l'angle en degrés est 40°.

74

VRAI.

$-\frac{3\pi}{5}-\frac{27\pi}{5}=-6\pi=-3\times2\pi.$

75

FAUX.

$-\frac{8\pi}{7}\notin\,]-\pi\,;\pi].$

76

FAUX.

$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

77

VRAI.

$\cos\frac{8\pi}{9}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}.$

78

FAUX.

$\sin\frac{17\pi}{6}=\frac{1}{2}.$

79

VRAI.

Pour tout $t\in[0\,;+\infty[$,

$$f(t+0{,}02)=2\sin\left[100\pi(t+0{,}02)+\frac{\pi}{3}\right]$$
$$=2\sin\left((100\pi t+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=f(t).$$

QCM

80

Réponse **b.**

81

Réponse **c.**

82

Réponse **c.**

83

Réponse **b.**

84

Réponse **a.**

85

Réponse **a.**

9 Le produit scalaire

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. a
2. b
3. c
4. c
5. d
6. d

Exercices

Pour commencer

30

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=6\times\frac{1}{2}=3$

$\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2=9$

$\vec{v}^{\,2}=\|\vec{v}\|^2=4$

2. $\vec{u}\cdot(2\vec{v})=2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$=2\times3$

$=6$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}+\vec{v})=3\vec{u}^{\,2}+\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}^{\,2}$

$=3\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}^{\,2}=17$

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$

$=19$

35

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
$= 2\times 2\times\cos 45°$
$= 2\sqrt{2}$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right) = -\overrightarrow{AB}^2 = -4$

41

1. $\overrightarrow{AB}(3\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;2)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -5$.

2. $AB = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.

3. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135°$.

46

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2x^2-40$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ équivaut à $-2x^2-40 = 0$, soit $x^2 = -10$: il n'existe aucune valeur pour x.

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = x^2+8x-9$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ équivaut à $x^2+8x-9 = 0$.

$\Delta = 8^2-4\times 1\times(-9) = 64+36 = 100$

$x = \dfrac{-8-\sqrt{100}}{2} = -9$ ou $x = \dfrac{-8+\sqrt{100}}{2} = 1$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = x(x+2)+(x+2)\times 2 = (x+2)^2$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ équivaut à $x = -2$.

53

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AO\times AC = \dfrac{7}{2}\times 7 = \dfrac{49}{2}$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

3. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = -BO\times BD = -8$

4. $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB} = CO\times CO = \dfrac{49}{4}$

56

On sait que $BC^2 = AC^2+AB^2-2AC\times AB\times\cos\widehat{BAC}$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\times AB}$
$= \dfrac{7^2+6^2-8^2}{2\times 7\times 6}$
$= \dfrac{1}{4}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) \approx 75{,}5°$.

De même, $\cos\widehat{CBA} = \dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\times AB}$
$= \dfrac{8^2+6^2-7^2}{2\times 8\times 6} = \dfrac{17}{32}$

$\widehat{CBA} = \cos^{-1}\left(\dfrac{17}{32}\right) \approx 57{,}9°$.

De même, $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\times AC}$
$= \dfrac{8^2+7^2-6^2}{2\times 8\times 7}$
$= \dfrac{11}{16}$

$\widehat{CBA} = \cos^{-1}\left(\dfrac{17}{32}\right) \approx 46{,}6°$.

On peut vérifier que la somme des trois angles est égale à 180°.

Pour s'entraîner

58

1. FAUX.

Ce n'est pas la seule solution.

On peut avoir, par exemple, $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.

2. FAUX.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

60

1. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} = OC\times OD\times\cos\widehat{COD} = 1\times 1\times\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

2. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE} = OC\times OE\times\cos\widehat{COE} = 1\times 1\times\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

3. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OC}\cdot\left(-\overrightarrow{OC}\right) = -OC^2 = -1$

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$
$= -BA\times BE\times\cos\widehat{ABE}$
$= -1\times 2\cos 60°$
$= -2\times\dfrac{1}{2} = -1$

5. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-2\overrightarrow{AB}\right)$
$= -2\overrightarrow{AB}^2 = -2\times 1 = -2$

6. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EB} = \left(2\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{OB}\right) = 4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$= 4\times 1\times 1\times\cos 60° = 2$

66

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 14$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 20$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 6$

2. $AB = \sqrt{34}$

$AC = 2\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{26}$

3. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{7}{\sqrt{170}}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{7}{\sqrt{170}}\right) \approx 57°$

Corrigés

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{10}{\sqrt{51}}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{221}}\right) \approx 48°$

$\cos\widehat{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \dfrac{3}{\sqrt{130}}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{130}}\right) \approx 75°$

68

$\overrightarrow{AO}(3\,;-1)$ et $\overrightarrow{AB}(1;3)$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
$AO = AB = \sqrt{10}$.
Le triangle OAB est isocèle rectangle en A.

74

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BH\times BC = 2\times 4 = 8$

2. $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{8}{4\times 6} = \dfrac{1}{3}$

$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 70{,}5°$.

3. $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ car ABC est isocèle en A.
D'où $\widehat{BAC} = 180 - 2\widehat{ABC} \approx 39°$.

77

1. On a : $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC\times AC}$
$= \dfrac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2\times 5\times 7}$
$= \dfrac{19}{35}$

2. On a $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA\times CK = 7\times CK$
et aussi $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA\times CB\times\cos\widehat{ACB} = 7\times 5\times\dfrac{19}{35} = 19$.

On en déduit que : $CK = \dfrac{19}{7}$.
Le théorème de Pythagore donne alors :
$BK^2 = BC^2 - CK^2 = 5^2 - \left(\dfrac{19}{7}\right)^2 = \dfrac{384}{49}$.

On a alors : $BK = \sqrt{\dfrac{384}{49}} = \dfrac{8}{7}\sqrt{6}$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

80

FAUX.
$\overrightarrow{AB}(6\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;5)$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 3 + 1\times 5 = 23$.
Mais $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$.

81

VRAI.
$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{1}{2}$
d'où $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.

82

FAUX.
$\overrightarrow{AB}(2\,;4)$ et $\overrightarrow{CD}(6\,;3)$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\times 6 + 4\times 3 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

83

FAUX.
$\vec{u}\cdot\vec{v} = x^2 - 3$
Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$ équivaut successivement à $x^2 - 3 = 1$, $x^2 = 4$, $x = -2$ ou $x = 2$.

84

VRAI.
$\cos\widehat{BCA} = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{CB\times CA} = \dfrac{1}{2}$
d'où $\widehat{BCA} = 60°$.

D'après l'énoncé, $\widehat{ABC} = 90°$.
Comme la somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°, on en déduit que $\widehat{BAC} = 30°$.

85

FAUX.
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens opposés,
alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB\times AH$.

86

1. VRAI.
Règle du parallélogramme.
2. VRAI.
$AC^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
3. FAUX.
$AC^2 = 4^2 + 3^2 + 2\times 4\times 3\times\dfrac{1}{2} = 37$ d'où $AC = \sqrt{37}$

87

VRAI.
La formule d'Al-Kashi donne :
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\times\cos\widehat{BAC}$
donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2\times AC\times AB}$
$= \dfrac{36 + 25 - 49}{2\times 6\times 5}$
$= \dfrac{1}{5}$.

QCM

88

Réponse **b.**

89

Réponse **c.**

90

Réponse **c.**

91

Réponse **c.**

92

Réponses **a.**

93

Réponse **c.**

10 Nombres complexes

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. c
2. b
3. a
4. d
5. d
6. a

Exercices

Pour commencer

34

1. $-2-4\text{i}$
2. $1+10\text{i}$
3. $-19+4\text{i}$
4. $5-12\text{i}$
5. $-65-142\text{i}$
6. $14-18\text{i}$

37

$z^2+1=z$

$$\left(\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}+1$$
$$=\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

43

1. $\overline{z}=5-3\text{i}\,\overline{z'}=2+\text{i}$
2. a. $\overline{z+z'}=7-2\text{i}$
b. $\overline{z-z'}=3-4\text{i}$
c. $20-12\text{i}$
d. $\overline{2z-3z'}=4-9\text{i}$
e. $13-\text{i}$
f. $16-30\text{i}$
g. $\frac{5}{34}+\frac{3}{34}\text{i}$
h. $1{,}4-2{,}2\text{i}$

47

1. $z_I=-0{,}5-0{,}5\text{i}$
$z_J=1{,}5\text{i}$
2. $z_{\overrightarrow{AB}}=-3+5\text{i}$
$z_{\overrightarrow{AC}}=-1-4\text{i}$

51

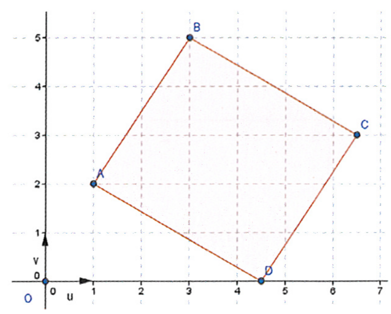
1. $z_I=4+15\text{i}$
$z_J=2+1{,}5\text{i}$
$z_K=4+1{,}5\text{i}$
$z_I=4+1{,}5\text{i}=z_K$
$I=K$
[AB] et [DE] ont même milieu.
2. $z_{\overrightarrow{DA}}=-5+2\text{i}$
$z_{\overrightarrow{BD}}=1+3\text{i}$
$z_{\overrightarrow{EC}}=-4$
ADBE est un parallélogramme.

Pour s'entraîner

75

1. $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$

84



D'après le graphique, on conjecture que le quadrilatère est un parallélogramme.

Le milieu de [AC] a pour affixe 3,75 + 2,5i.
Le milieu de [BD] a pour affixe 3,75 + 2,5i.
Donc ABCD est un parallélogramme.
Remarque : on aurait pu procéder ainsi :

$z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 3i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = 2 + 3i$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Donc ABCD est un parallélogramme.
De plus,

$AB = |-2-3i| = \sqrt{13}$,

$BC = \left|\frac{7}{2} - 2i\right| = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Donc ABCD n'est pas un losange.

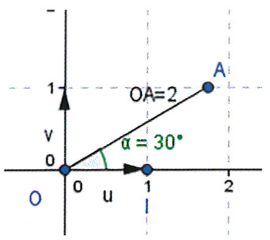
$AC = \left|\frac{11}{2} - i\right| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$.
Donc ABCD n'est pas un rectangle.

87

1. $|z| = 2$ $\quad\quad \arg z = \frac{\pi}{6}$

Illustration graphique :

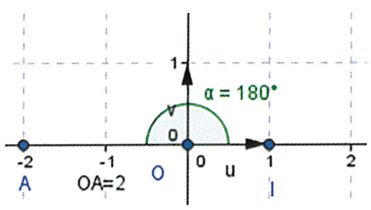


On remarque que 30° correspond à $\frac{\pi}{6}$ rad.

2. $|z| = \sqrt{2}$ $\quad\quad \arg z = \frac{-\pi}{4}$

3. $|z| = 2$ $\quad\quad \arg z = \pi$

Illustration graphique :

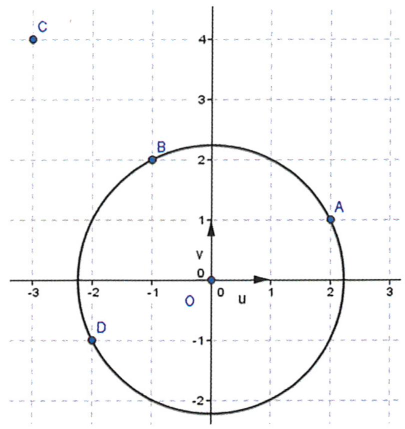


On remarque que 180° correspond à π rad.

4. $|z| = 3$ $\quad\quad \arg z = \frac{\pi}{2}$

89

1.



2. $AB = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{26}$

$OA = \sqrt{5}$

3. $OA = OB = OD = \sqrt{5}$

93

1. D'après l'énoncé, $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

et $z_2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

2. $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 + 2i\sqrt{3}$.

$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 2(0 - i)$

$= -2i$.

3. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

$= 4 \times 2 = 8$.

$\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|} = \frac{1}{4}$.

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4}{2} = 2$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

95

FAUX.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}$.

$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$.

Remarque : on aurait pu aussi dire que le nombre proposé est négatif. D'après le cours, un module est un nombre réel positif.

96

VRAI.
On reprend la réponse du module de l'exercice **95**.
Notons ϑ un argument de z.
$\cos\vartheta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\vartheta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On obtient $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$.

97

FAUX.
$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| \neq |z|$.

98

VRAI.
$|z| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Notons ϑ un argument de z.
$\cos\vartheta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On obtient $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$.
$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.
$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Notons ϑ' un argument de $\frac{1}{\bar{z}}$.
$\cos\vartheta' = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\vartheta' = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On obtient $\vartheta' = -\frac{\pi}{4}$.

99

FAUX.
$AB = |5+i+2+2i| = |7+3i| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$.
$BC = |3i-5-i| = |-5+2i| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$.
$AB \neq BC$.

100

VRAI.
$AB = |5+2i-2+2i| = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$.
$BC = |1-5-2i| = |-4-2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
$AC = |1-2+2i| = |-1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.
$AC^2 + BC^2 = AB^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

101

VRAI.
$|z| = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.
$|z'| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.
$|z \times z'| = |z| \times |z'| = 4 \times 5 = 20$.

102

VRAI.
$|z| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$.
$|z'| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{10}{5} = 2$.

QCM

103

Réponse **b.**

104

Réponse **c.**

105

Réponse **b.**

106

Réponse **c.**

107

Réponse **b.**

108

Réponse **a.**

11 Dérivées

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. b
2. a
3. c
4. b
5. a

Exercices

Pour commencer

25

a. $u'(t) = 15t^4$
b. $v'(t) = \sin(t)$

27

a. $g'(x) = 6(2x+1)^2$

b. $g'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$

41

a. $f'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

b. $u'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(x)}$

47

1. f est le quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -\dfrac{0 \times (x^2+1) - 1 \times 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	

51

1. f fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. $f'(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = (x^2+1)(2x+3)$

3. $f'(x)$ est du signe de $2x+3$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\dfrac{67}{32}$	↗	

Pour s'entraîner

59

1. $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$.

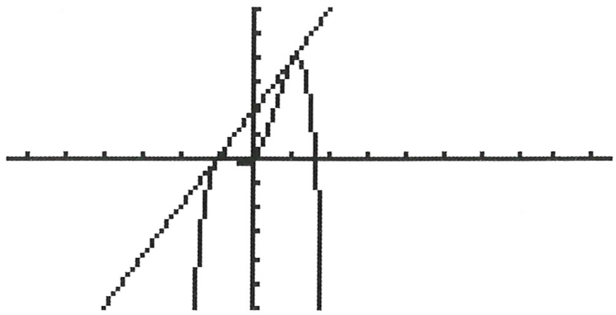
2. a. $f'(1) = f'(-1) = 1$.

b. Les deux tangentes sont parallèles puisqu'elles ont même coefficient directeur.

3. On applique la formule pour l'équation de la tangente en A et en B.

On trouve à chaque fois l'équation $y = x + 1$.

4.



64

1. $f'(x) = \dfrac{25(3+x)^2 - 25x \times 2(3+x)}{(3+x)^4}$

$= \dfrac{25(3-x)}{(3+x)^3}$.

2. $f'(x)$ est du signe de $3-x$ car $3+x > 0$ pour $x \geqslant 0$.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{25}{12}$	↘	

3. $P_{Max} = \dfrac{25}{12}$ pour $x = 3$ car P est maximale en $x = 3$ d'après le tableau de variations.

4. On résout l'équation $P = \dfrac{P_{Max}}{2}$.

Cela donne : $\dfrac{25x}{(3+x)^2} = \dfrac{25}{24}$

ce qui équivaut, pour $x \neq -3$, à :

$x^2 + 6x + 9 = 24x$

soit $x^2 - 18x + 9 = 0$. $\Delta = 288$.

On obtient alors deux solutions réelles :

$S = \{9 - 6\sqrt{2}\,;\, 9 + 6\sqrt{2}\}$.

69

1. $f'(x) = -6\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ entraîne :

$0 \leqslant 3x \leqslant 3 \times \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi}{4} \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant 3 \times \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}$

soit $\dfrac{\pi}{4} \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \pi$.

On en déduit : $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ et donc pour tout réel x de J, $f'(x) \geqslant 0$.

3. De même, pour tout réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$.

4.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

72

1. 12 m

2. On résout $f(t)=0$ soit $-4{,}9t^2+12=0$.

ce qui donne $t=\sqrt{\dfrac{12}{4{,}9}}$ (car $t>0$)

soit $t\approx 1{,}6$.

3. $v(t)=f'(t)=-9{,}8t$ donc $v(1{,}6)\approx -15{,}7$; vitesse instantanée : 15,7 m.s^{-1}.

80

1. $1{,}5x^2-24x+65{,}625=(x-3{,}5)(1{,}5x-18{,}75)$

2. On étudie le signe du produit $(x-3{,}5)(1{,}5x-18{,}75)$ sur l'intervalle $[0\,;8]$:

x	0		$3{,}5$		8
$x-3{,}5$		$-$	0	$+$	
$1{,}5x-18{,}75$		$+$		$+$	
$(x-3{,}5)(1{,}5x-18{,}75)$		$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		$3{,}5$		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	$\nearrow$	$124{,}125$	$\searrow$	33

3. a. Le taux maximal sera de 124,125 mg.L^{-1}.

b. Oui, car d'après le tableau de variations, à $x=8$, le taux est descendu à 33 mg.L^{-1}.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

81

VRAI.

Il suffit de dériver terme à terme.

82

FAUX.

$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}$

83

FAUX.

$f'(t)=4\sin(4t+\pi)$

84

FAUX.

$f'(x)=-2\sin(2x)$ et $f''(x)=-4\cos(2x)$;

donc $4f(x)-f''(x)=8\cos(2x)$ mais $4f(x)+f''(x)=0$.

85

FAUX.

$(x)=-15x^2+17x-4$ $f'(x)=-30x+17$.

86

VRAI.

$f'(x)=4x^3+9x^2, f'(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$

car $f'(x)=x^2(4x+9)$ et $4x+9>0$ pour $x\geqslant 0$.

QCM

87

Réponse **c.**

88

Réponse **a.**

89

Réponse **a.**

90

Réponse **a.**

91

Réponse **a.**

92

Réponse **b.**

93

Réponse **a.**

12 Primitives

Vérifier les acquis de Seconde

QCM

1. c
2. a
3. c
4. c
5. c
6. b

Corrigés

Exercices

Pour commencer

44

1. $F(x)=\frac{3}{2}x$

et $G(x)=\frac{3}{2}x+C.$

2. $F(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$

et $G(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+C.$

3. $F(x)=\frac{5}{2}x^2$ et $G(x)=\frac{5}{2}x^2+C.$

4. $F(x)=x^3$ et $G(x)=x^3+C.$

5. $F(x)=2x^2+3x$ et $G(x)=2x^2+3x+C.$

49

1. $f'(x)=4x-\frac{2}{x^2}=g(x)$

2. $G(x)=2x^2+\frac{2}{x}-3$

Comme $g(x)=f'(x)$, alors une primitive de g est donnée par $G(x)=2x^2+\frac{2}{x}+C$, avec C constante réelle.

Comme $G(1)=1$, alors $C=-3$.

50

1. $f'(x)=2\cos(x)$

2. $G(x)=2\sin(x)+1$

77

1. g est une fonction polynôme donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. $G(x)=x^3+0{,}75x^2-3x-5.$

78

1. c.
2. b.
3. b.
4. b.
5. c.
6. b.

79

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai
5. Vrai
6. Faux
7. Vrai
8. Faux

Pour s'entraîner

96

1. $I=]-\infty\,;0[$ ou $I=]0\,;+\infty[$

$F(x)=-\frac{5}{x}-4x+C$

2. $I=]-\infty\,;0[$ ou $I=]0\,;+\infty[$

$F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{x}+C$

3. $I=\mathbb{R}$

$F(x)=-\cos(x)-\sin(x)+C$

4. $I=\mathbb{R}$

$F(x)=-\frac{2}{3}\cos(3x)+2\sin(2x)+C$

98

1. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

2. Une primitive F de f est donnée par $F(x)=-\frac{3}{x}+0{,}5x+C$ avec C constante réelle.

On cherche C telle que $F(1)=0$ ce qui donne $C=2{,}5$.

D'où $F(x)=-\frac{3}{x}+0{,}5x+2{,}5$.

3. On cherche C telle que $F(2)=1$, ce qui donne $C=1{,}5$.

D'où $F(x)=-\frac{3}{x}+0{,}5x+1{,}5$.

101

1. $x^2>0$ et $\frac{7}{(x-3)^2}>0$ sur I.

2. $g'(x)=-\frac{7}{(x-3)^2}$;

$-g$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{7}{(x-3)^2}$.

Une primitive de f est la fonction définie sur I :

$x\mapsto\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{x-3}$.

3. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{x-3}-\frac{43}{3}$

4.

x	3	$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	‖	+
$F(x)$	‖	$\nearrow$

105

1. On écrit que : $a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$.

On identifie ensuite $ax^2+2ax+a+b$ avec x^2+2x ce qui donne $a=1$ et $b=-1$ d'où : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2. $F(x)=x+\frac{1}{x+1}$

Pour faire le point

Vrai ou Faux

108

VRAI.
On a $F'(x) = f(x)$.

109

VRAI.
On a $F'(x) = f(x)$.

110

VRAI.
$(2 \times F)' = 2 \times F' = 2 \times f$.

111

FAUX.
$(F \times G)' = F'G + FG' \neq F' \times G'$.

112

VRAI.
La dérivée de F, la fonction f, est positive donc F est croissante.

113

FAUX.
La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto -\sin(2x+\pi)$ est la fonction $x \mapsto -2\cos(2x+\pi)$ soit $-f$.

114

VRAI.
La fonction sinus est positive sur $[0\,;\pi]$ donc sa primitive F est croissante sur $[0\,;\pi]$.

115

FAUX.
F n'est pas nécessairement positive : par exemple sur $[1\,;+\infty[$ avec $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ et $F(x) = x + \frac{1}{x} - 10$.

QCM

116

Réponse **b.**

117

Réponse **c.**

118

Réponse **a.**

Crédits
Couverture : 123RF – p. 12 : Creative Commons – p. 54 : Science Photo Library / akg-images – p. 122 : STRINGER / ANADOLU AGENCY / AFP – p. 193 : Gusman/Leemage – p. 212 : Bianchetti/Leemage
Pour les autres photographies Adobe Stock.

Conception graphique : Marc et Yvette
Mise en page : STDI
Iconographie : Pascale Guilbaud
Édition : Lucie Blettery

ISBN : 978-2-206-10335-8

Éditions Delagrave – 5, allée de la 2e B.B. – 75015 Paris
www.editions-delagrave.fr

Dépôt légal : avril 2019 – N° Éditeur : 2018-0903
Achevé d'imprimer en France en avril 2019 par Estimprim - 25110 Autechaux

IMPRIM'VERT
Votre imprimeur agit pour l'environnement

Certifié PEFC
Ce produit est issu de forêts gérées durablement et de sources contrôlées.
PEFC™
10-31-1093
pefc-france.org