Utilisation de la TI-83 Premium CE

1. Fonctions

Appuyer sur la touche [mode] et vérifier que le mode **FONCTION** est selectionné.

a. Entrer une fonction

Taper sur [f(x)] et entrer l'expression de la fonction en utilisant la touche [X,T,θ,n] pour écrire la variable x puis appuyer sur [entrer].

Remarque : Pour écrire le carré, utiliser la touche [x²] ou [^] [2].

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
 Graph1  Graph2  Graph3
■\Y1■X²−2X+3
■\Y2=■
```

b. Calculer un nombre dérivé

Quitter le menu précédent et taper sur [math] puis choisir **8:nbreDérivé(** et [entrer]. On obtient l'affichage $\frac{d}{d\square}(\square)|_{\square=\square}$.

En complétant les champs manquants comme ci-contre, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.

Remarque : Parfois, la calculatrice donne des valeurs approchées.

$$\frac{d}{dX}(X^2-2X+3)|_{X=3} \qquad 4$$

c. Afficher un tableau de valeurs

En tapant d'abord sur [2nde] [fenêtre] (déf table f2), choisir le début et le pas de la table.

```
CONFIG TABLE
 DébutTbl=-4
 ΔTbl=1
Indpnt :  Auto Demande
Dépndte :  Auto Demande
```

En tapant ensuite sur [2nde] [graphe] (table f5), afficher le tableau de valeurs.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
-4	27
-3	18
-2	11
-1	6

d. Afficher une représentation graphique

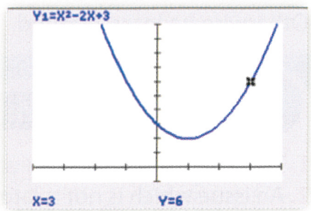
En tapant d'abord sur [fenêtre] (déf table f2), choisir la fenêtre d'affichage puis taper [graphe] (table f5), pour afficher la courbe représentative.

```
FENÊTRE
 Xmin=-4
 Xmax=4
 Xgrad=1
 Ymin=-1
 Ymax=10
 Ygrad=1
```

e. Effectuer des lectures graphiques

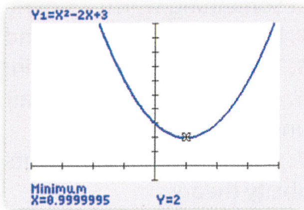
Lorsque la courbe est affichée, taper sur [trace] pour activer le mode **Trace**.
Un curseur apparaît sur la courbe que l'on peut déplacer.

Pour placer ce curseur au point d'abscisse 3, il suffit de taper sur [3] [entrer].



En tapant sur [2nde] [trace] (calculs f4), on accède au menu **CALCULER** qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersection…).

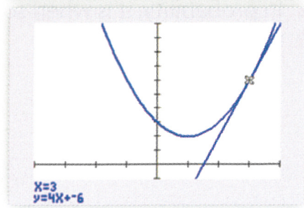
Exemple : En sélectionnant **3:minimum** et après avoir précisé la **borne gauche**, la **borne droite**, une **valeur initiale** et en appuyant sur [entrer], on obtient une valeur approchée du minimum de la fonction sur l'intervalle [**borne gauche**;**borne droite**].



f. Tracer une tangente et obtenir une équation

Lorsque la courbe est affichée, taper sur [2nde] [prgm] (dessin C) puis choisir **5:Tangente(**.

Pour obtenir la tangente en 3, il suffit de taper sur [3] [entrer].



2. Suites

Appuyer sur la touche mode et sélectionner sur la cinquième ligne le mode SUITE.

a. Entrer une suite

Taper sur f(x) .

Suite définie par une formule explicite :
Selectionner avec les flèches le type de suite SUITE(n) . Entrer la valeur minimale de n puis l'expression de la suite en utilisant la touche X,T,θ,n pour écrire la variable n.

Exemple 1 :

```
TYPE: SUITE(n)  SUITE(n+1)  SUITE(n+2)
nMin=0
▪:u(n)=n²−n+1
u(0)=
```

Suite définie par récurrence :
Selectionner avec les flèches le type de suite SUITE(n+1) . Entrer la valeur minimale de n puis l'expression de la suite en utilisant 2nde 7 (un) pour écrire u et entrer la valeur $u(0)$.

Exemple 2 :

```
TYPE: SUITE(n)  SUITE(n+1)  SUITE(n+2)
nMin=0
▪:u(n+1)=2u(n)+1
u(0)=1
```

b. Calculer des termes

En tapant d'abord sur 2nde fenêtre (déf table), choisir le début et le pas de la table.

```
CONFIG TABLE
 DébutTbl=0
 ΔTbl=1
Indpnt  :  Auto Demande
Dépndte :  Auto Demande
```

Taper ensuite sur 2nde graphe (table) pour afficher le tableau de valeurs.

Exemple 1 :

n	u(n)
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
5	21
6	31

Exemple 2 :

n	u
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63
6	127

c. Représenter une suite

En tapant d'abord sur fenêtre, choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :

```
FENÊTRE
 nMin=0
 nMax=10
 DbutTracé=1
 PasTracé=1
 Xmin=-1
 Xmax=8
 Xgrad=1
 Ymin=-5
↓Ymax=35
```

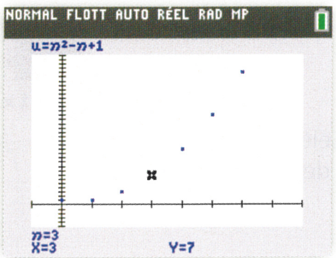
Exemple 2 :

```
FENÊTRE
 nMin=0
 nMax=10
 DbutTracé=1
 PasTracé=1
 Xmin=0
 Xmax=35
 Xgrad=1
 Ymin=0
↓Ymax=35
```

Taper sur 2nde zoom (format) pour sélectionner le type de graphique.

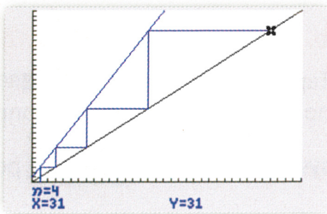
Pour représenter une suite par un **nuage de points**, sélectionner avec les flèches Heure. Taper sur graphe puis, en tapant sur trace, on parcourt le nuage.

Exemple 1 :



Pour représenter une **suite définie par récurrence**, sélectionner avec les flèches Toile. Taper sur graphe puis trace et ▸ pour construire au fur et à mesure la représentation graphique.

Exemple 2 :



3. Calcul d'une somme

Taper sur math puis choisir **0:somme Σ(** et entrer. On obtient alors l'affichage $\sum_{\square=\square}^{\square}(\square)$.
En complétant les champs manquants, la calculatrice donne la somme des termes d'une suite.

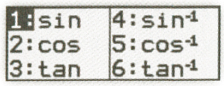
Exemple : On a calculé ci-contre la somme des 100 premiers carrés.

4. Trigonométrie

Pour mettre la calculatrice en radians, taper sur mode, la ligne **RADIAN DEGRÉ** permet de choisir l'unité d'angle.

Taper sur trig, puis utiliser les flèches pour sélectionner les différentes fonctions trigonométriques.

Remarque : Pour les valeurs remarquables, la calculatrice donne des valeurs exactes.



5. Probabilités

Pour calculer l' espérance et l'écart type d'une variable aléatoire, taper sur stats, sélectionner **ÉDIT** puis choisir **1:Modifier...** et entrer.

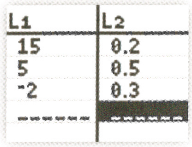
Dans la colonne L_1, recopier les valeurs prises par la variable aléatoire et dans la colonne L_2 leurs probabilités respectives.

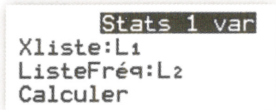
Taper ensuite sur stats, sélectionner **CALC** puis choisir **1:Stats 1 Var** et entrer.

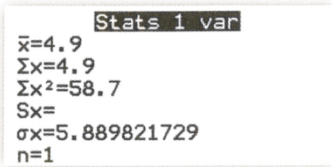
Dans **Xliste**, écrire la liste des valeurs (ici L_1) et dans **ListeFréq** la liste des probabilités (ici L_2). Puis taper entrer pour obtenir les résultats.

La valeur de l'espérance est donnée par $\bar{x}$ et la valeur de l'écart type par σx.

Remarque : Pour effacer la liste L_1, sélectionner dans le tableau **L1** et appuyer sur la touche annul puis.







6. Résolution d'une équation ou d'un système

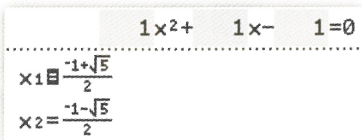
Appuyer sur les touches 2nde et résol. Taper sur 9 pour sélectionner **9:PlySmlt2**.

a. Résoudre une équation de degré 2

Taper sur 1 pour choisir **1:RACINES D'UN POLYNÔME**.

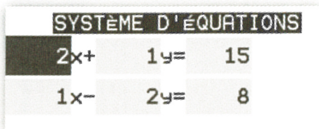
Selectionner le degré du polynôme et taper sur alpha graphe pour accéder à la page suivante et entrer les valeurs des coefficients du polynôme en utilisant les flèches. Enfin taper sur alpha graphe pour obtenir les éventuelles solutions.

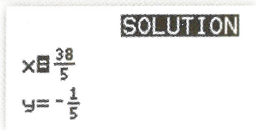
Remarque : En appuyant sur la touche ◂▸, on obtient des valeurs approchées.



b. Résoudre un système d'équations

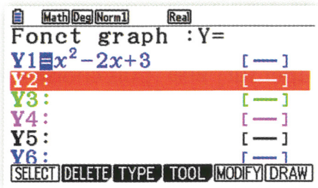
Taper sur 2 pour choisir **2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS**. Selectionner le nombre d'équations et d'inconnues puis entrer les valeurs des coefficients du système. Taper sur alpha graphe pour résoudre le système.





1. Les fonctions

a. Entrer une fonction



Taper sur MENU puis choisir le menu Graphe. Entrer l'expression de la fonction en utilsant la touche X,θ,T pour écrire la variable x puis appuyer sur EXE.

Remarque : Pour écrire le carré, utiliser la touche x^2 ou ^ 2.

b. Calculer un nombre dérivé

Taper sur MENU puis choisir le menu Exe-Mat et EXE. Taper sur OPTN puis CALC (F4), d/dx (F2).

On obtient l'affichage $\frac{d}{dx}(\square)|_{x=\square}$.

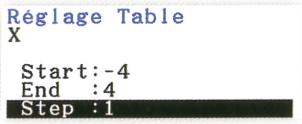
En complétant les champs manquants comme ci-contre, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.

$$\frac{d}{dx}(x^2-2x+3)|_{x=3} \qquad 4$$

Remarque : Parfois, la calculatrice donne des valeurs approchées.

c. Afficher un tableau de valeurs

Choisir le menu Table. Utiliser SET (F5), et choisir le début, la fin et le pas de la table.

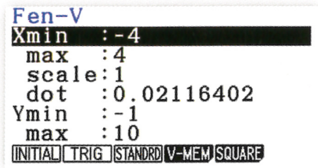


Taper ensuite sur EXIT et utiliser TABLE (F6) pour afficher le tableau de valeurs.

X	Y1
-4	27
-3	18
-2	11
-1	6

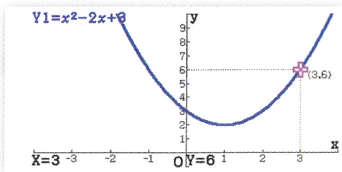
d. Afficher une représentation graphique

Choisir le menu Graphe. En tapant d'abord sur SHIFT F3 (V-Window), choisir la fenêtre d'affichage puis taper sur EXIT et utiliser DRAW (F6) pour afficher la courbe représentative.



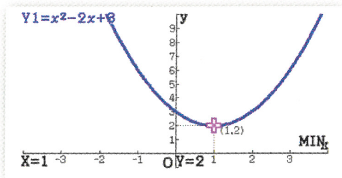
e. Effectuer des lectures graphiques

Lorsque la courbe est affichée, taper sur SHIFT F1 (Trace) pour activer le mode **Trace**. Un curseur apparaît sur la courbe que l'on peut déplacer. Pour placer ce curseur au point d'abscisse 3, il suffit de taper sur 3 EXE.



En tapant sur SHIFT F5 (G-Solv), on fait apparaître les icônes du menu **G-Solve** qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersections…).

Exemple : En tapant sur F3, on obtient le minimum de la fonction.

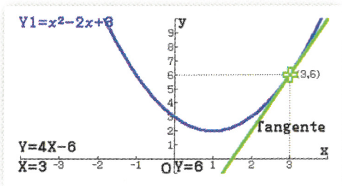


f. Tracer une tangente et obtenir une équation

Taper sur SHIFT MENU (SET UP) et sélectionner Derivative :On (F1).

Lorsque la courbe est affichée, taper sur SHIFT F4 (Sketch) puis utiliser Tangent (F2).

Pour obtenir la tangente en 3, il suffit de taper sur 3 EXE et à nouveau EXE pour afficher son équation.



2. Suites

Taper sur MENU puis choisir le menu Récurrence.

a. Entrer une suite

Suite définie par une formule explicite :
Utiliser TYPE (F3) puis an (F1).
Entrer l'expression de la suite en utilisant n (F4) puis (F1) pour écrire la variable n.

Exemple 1 :

```
Récurrence
an =n²−n+1            [—]
bn :                  [—]
```

Utiliser SET (F5), et choisir le début, la fin et le pas de la table.

```
Math Deg Norm1 d/c Real
Réglage Table     n
 Start:0
 End  :10
```

Suite définie par récurrence :
Utiliser TYPE (F3) puis an+1 (F2).
Entrer l'expression de la suite en utilisant n.an··· (F4) puis an (F2) pour écrire a_n.

Exemple 2 :

```
Récurrence
an+1 =2an+1           [—]
bn+1 :                [—]
```

Utiliser SET (F5) pour entrer la valeur de a_0 et choisir le début, la fin et le pas de la table.

```
Math Deg Norm1 d/c Real
Réglage Table     n+1
 Start:0
 End  :10
 a0   :1
```

b. Calculer des termes

Taper ensuite sur EXIT et utiliser TABLE (F6) pour afficher le tableau de valeurs.

Exemple 1 :

n	an
0	1
1	1
2	3
3	7

Exemple 2 :

n+1	an+1
0	1
1	3
2	7
3	15

c. Représenter une suite

En tapant d'abord sur SHIFT V-Window (F3), choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :

```
Fen−V
Xmin   :−1
 max   :8
 scale:1
 dot   :0.02380952
Ymin   :−5
 max   :35
```

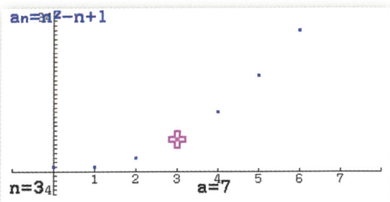
Exemple 2 :

```
Fen−V
Xmin   :0
 max   :35
 scale:1
 dot   :0.09259259
Ymin   :0
 max   :35
```

Pour représenter une suite par un **nuage de points**, taper sur EXIT, utiliser TABLE (F6) puis GPH-PLT (F6).

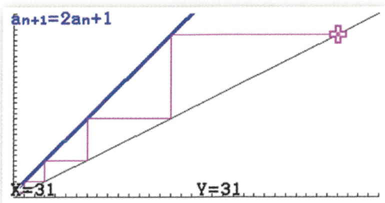
En tapant sur SHIFT Trace (F1), on parcourt le nuage.

Exemple 1 :



Pour représenter une **suite définie par récurrence**, taper sur EXIT, utiliser TABLE (F6) puis WEB-GPH (F4) et appuyer sur EXE pour construire au fur et à mesure la représentation graphique.

Exemple 2 :



3. Calcul d'une somme

Taper sur MENU puis choisir le menu Exe-Mat et EXE. Taper sur OPTN puis CALC (F4), ▷ (F6) et Σ((F3).

On obtient alors l'affichage $\sum_{\square=\square}^{\square}(\square)$. En complétant les champs manquants, la calculatrice donne la somme des termes d'une suite.

Exemple : On a calculé ci-contre la somme des 100 premiers carrés.

$$\sum_{N=1}^{100}(N^2) \qquad 338350$$

4. Trigonométrie

Pour mettre la calculatrice en radians, taper sur taper sur SHIFT MENU (SET UP), la ligne Angle :Rad permet de choisir l'unité d'angle(F2 pour choisir le radian)

Remarque : Pour les valeurs remarquables, la calculatrice donne des valeurs exactes.

$$\cos\ (\pi\div6) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. Probabilités

Pour calculer l' espérance et l'écart type d'une variable aléatoire, taper sur MENU puis choisir le menu Statistique, dans la colonne **List 1**, recopier les valeurs prises par la variable aléatoire et dans la colonne **List 2** leurs probabilités respectives.

SUB	List 1	List 2
1	15	0.2
2	5	0.5
3	-2	0.3
4		

Utiliser CALC (F2) puis SET (F6) pour paramétrer les calculs.

Dans **1Var XList**, on écrit la liste des valeurs (ici **List 1**) et dans **1Var Freq** la liste des probabilités (ici **List 2** en tapant F2 2).

1Var XList :List1
1Var Freq :List2

Puis taper sur EXE et choisir 1-VAR (F1) pour obtenir les résultats.

La valeur de l'espérance est donnée par $\bar{x}$ et la valeur de l'écart type par σx.

1 variable
$\bar{x}$ =4.9
Σx =4.9
Σx^2 =58.7
σx =5.88982172
sx =
n =1

Remarque : Pour effacer une liste, sélectionner une valeur de la liste, puis ▷ (F6) et utiliser DEL-ALL(F4).

6. Résolution d'une équation ou d'un système

Taper sur MENU puis choisir le menu Équation.

a. Résoudre une équation de degré 2

Utiliser POLY (F2).

Selectionner le degré du polynôme 2 (F1) et entrer les valeurs des coefficients du polynôme en utilisant les flèches et EXE.

Enfin utiliser SOLVE (F1) pour obtenir les éventuelles solutions.

Remarque : La calculatrice affiche des valeurs exactes et des valeurs approchées de chaque solution.

$aX^2+bX+c=0$

a	b	c
1	1	-1

$aX^2+bX+c=0$

X1 0.618
X2 -1.618

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

b. Résoudre un système d'équations

Utiliser SIMUL (F1). Choisir le nombre d'inconnues 2 (F1) et entrer les valeurs des coefficients du système. Enfin utiliser SOLVE (F1) pour obtenir les éventuelles solutions.

$a_n X+b_n Y=C_n$

	a	b	c
1	2	1	15
2	1	-2	8

$a_n X+b_n Y=C_n$

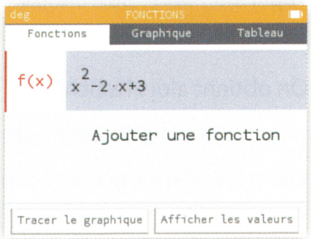
X 7.6
Y -0.2

$$\frac{38}{5}$$

Utilisation de la NUMWORKS

1. Les fonctions

a. Entrer une fonction



Taper sur et choisir le menu Fonctions puis sélectionner `Ajouter une fonction` et EXE.

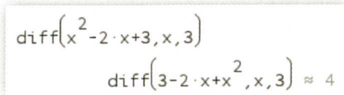
Entrer l'expression de la fonction en utilisant la touche x,n,t pour écrire la variable x puis appuyer sur EXE.

Remarque : Pour écrire le carré, utiliser la touche x^2 ou x^y 2.

b. Calculer un nombre dérivé

Taper sur et choisir le menu Calculs et taper sur paste.

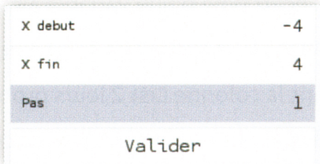
Dans le menu déroulant, sélectionner `Calculs` puis EXE et choisir `diff(f(x),x,a)`.

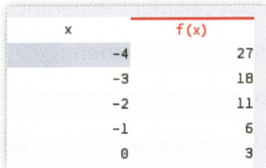


En écrivant dans la parenthèse l'expression de la fonction et 3, on calcule le nombre dérivé de la fonction précédente en 3.

Remarque : La calculatrice donne des valeurs approchées.

c. Afficher un tableau de valeurs

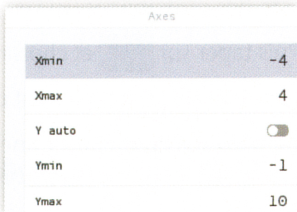




Taper sur et choisir le menu Fonctions.

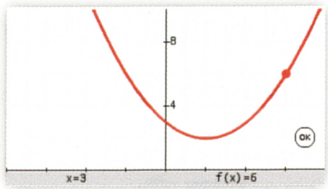
Avec les flèches, sélectionner le menu `Tableau` puis le menu `Regler l'intervalle` et choisir le début, la fin et le pas de la table.

Enfin, sélectionner `Valider` pour afficher le tableau de valeurs.



d. Afficher une représentation graphique

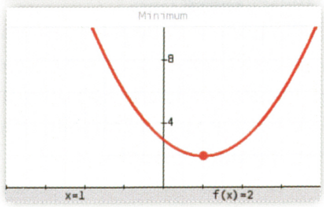
Sélectionner le menu `Graphique` puis le menu `Axes` pour choisir la fenêtre d'affichage.
Sélectionner ensuite `Valider` pour afficher la courbe représentative.



e. Effectuer des lectures graphiques

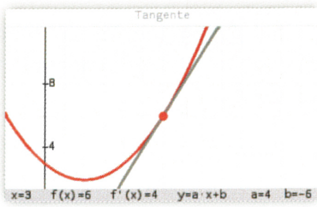
Lorsque la courbe est affichée, il y a un curseur que l'on peut déplacer pour lire des images. Si l'on souhaite déplacer le curseur au point d'abscisse 3, taper sur la touche OK puis sélectionner `Aller a` et écrire la valeur 3 et `Valider`.
En tapant sur la touche OK, puis `Calculer` et EXE, on accède à un menu qui permet de faire des lectures graphiques (extremums, racines, intersections…).

Exemple : En choisissant `Minimum`, on obtient le minimum de la fonction.



f. Tracer une tangente et obtenir une équation

En mettant le curseur au point d'abscisse 3 puis, en choisissant `Tangente` dans le menu `Calculer`, on obtient la tangente à la courbe en 3.



2. Suites

Choisir le menu Suites puis sélectionner `Ajouter une suite` et EXE.

a. Entrer une suite

Suite définie par une formule explicite :
Choisir le type de suite u_n .

Entrer l'expression de la suite en utilisant la touche x,n,t pour écrire la variable n puis appuyer sur EXE.

Exemple 1 :

Suites	Graphique	Tableau

u_n n^2-n+1

Suite définie par récurrence :
Choisir le type de suite u_{n+1} .

Entrer l'expression de la suite en utilisant paste u_n pour écrire u_n puis écrire la valeur de u_0 et appuyer sur EXE.

Exemple 2 :

Suites	Graphique	Tableau

u_{n+1} $2 \cdot u_n+1$

u_0 1

b. Calculer des termes

Avec les flèches, sélectionner le menu `Tableau` puis le menu `Regler l'intervalle` et choisir le début, la fin et le pas de la table.
Sélectionner `Valider` pour afficher le tableau de valeurs.

Regler l'intervalle

N debut	0
N fin	10
Pas	1

Valider

Exemple 1 :

n	u_n
0	1
1	1
2	3
3	7
4	13
5	21

Exemple 2 :

n	u_n
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63

c. Représenter une suite

Sélectionner le menu `Graphique` puis le menu `Axes` pour choisir la fenêtre d'affichage.

Exemple 1 :

Axes

Xmin	-1
Xmax	8
Y auto	
Ymin	-5
Ymax	35

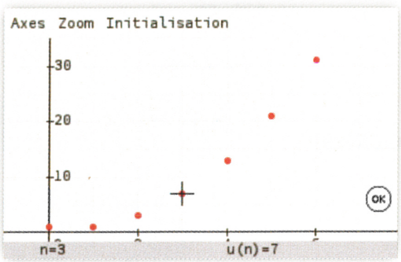
Exemple 2 :

Axes

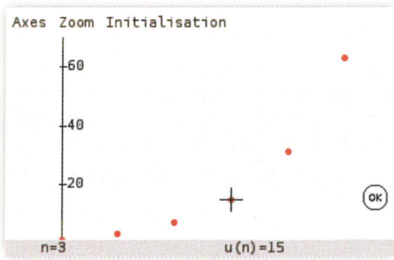
Xmin	-1
Xmax	6
Y auto	
Ymin	-5
Ymax	70

Sélectionner ensuite `Valider` pour afficher le nuage de points représentant la suite.

Exemple 1 :



Exemple 2 :



3. Calcul d'une somme

Taper sur puis sélectionner le menu Calculs et taper sur paste. Dans le menu déroulant, sélectionner `Calculs` puis EXE et choisir `sum(f(n),n,nmin,nmax)`. On obtient alors l'affichage $\sum_{n=}(\,)$.

En complétant les champs manquants, la calculatrice donne la somme des termes d'une suite.

Exemple : On a calculé ci-contre la somme des 100 premiers carrés.

$$\sum_{n=1}^{100}\left(n^2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{100}\left(n^2\right) \approx 338350$$

4. Trigonométrie

Pour mettre la calculatrice en radians, taper sur

puis sélectionner le menu Paramètres et taper sur la touche EXE.

La ligne `Unite d'angle` puis EXE permet de choisir l'unité d'angle.

Remarque : Pour les valeurs remarquables, la calculatrice donne des valeurs exactes.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660254$$

5. Probabilités

Pour calculer l' espérance et l'écart type d'une variable aléatoire, taper sur choisir le menu Statistiques puis sélectionner le menu `Donnees` .

Dans la colonne **Valeurs V1**, recopier les valeurs prises par la variable aléatoire et dans la colonne **Effectifs N1** leurs probabilités respectives.

Sélectionner le menu `Stats` pour obtenir les résultats.

La valeur de l'espérance est donnée par la ligne `Moyenne` et l'écart type par la ligne `Ecart type`.

Remarque : Pour effacer des valeurs, on utilise la touche clear.

Valeurs V1	Effectifs N1
15	0.2
5	0.5
-2	0.3

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	-2
Maximum	15
Etendue	17
Moyenne	4.9
Ecart type	5.889822

6. Résolution d'une équation ou d'un système

Taper sur puis sélectionner le menu Equations. Appuyer sur EXE.

deg EQUATIONS

$x^2+x-1=0$

a. Résoudre une équation de degré 2

Dans le menu déroulant, sélectionner $x^2+x+1=0$ puis EXE.

Écrire l'équation à résoudre puis utiliser `Resoudre l'equation` pour obtenir les éventuelles solutions.

Remarque : La calculatrice affiche des valeurs exactes et des valeurs approchées de chaque solution.

x0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	≈ -1.618034
x1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	≈ 0.618034
$\Delta=b^2-4ac$	5	

b. Résoudre un système d'équations

Dans le menu déroulant, sélectionner `x+y=0`. Ecrire la première équation puis selectionner `Ajouter une equation` et écrire la seconde.

Utiliser `Resoudre le systeme` pour obtenir les éventuelles solutions.

$$\begin{cases} 2\cdot x+y=15 \\ x-2\cdot y=8 \end{cases}$$

x	$\frac{38}{5}$	$= 7.6$
y	$-\frac{1}{5}$	$= -0.2$

Corrigés

Chapitre 1

3 $v_1 = 3v_0 - 4 = 3 \times 3 - 4 = 5$
$v_2 = 3v_1 - 4 = 3 \times 5 - 4 = 11$
$v_3 = 3v_2 - 4 = 3 \times 11 - 4 = 29$

9 $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

$\begin{cases} v_0 = 300 \\ v_{n+1} = 2v_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = n + 1 + 3w_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

16 **a.** Pour tout entier naturel n, $u_n = -2 + 3n = f(n)$, avec f affine, donc la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$.
b. $u_0 = 2 \times 0^2 + 3 = 3$; $u_1 = 2 \times 1^2 + 3 = 5$;
$u_2 = 2 \times 2^2 + 3 = 11$
$u_1 - u_0 = 5 - 3 = 2$ et $u_2 - u_1 = 11 - 5 = 6 \neq 2$, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
c. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+5}{2} - \frac{n+5}{2} = \frac{1}{2},$$

donc la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{5}{2}$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

d. $u_0 = 3 - \frac{1}{0+1} = 2$; $u_1 = 3 - \frac{1}{1+1} = \frac{5}{2}$;
$u_2 = 3 - \frac{1}{2+1} = \frac{8}{3}$
$u_1 - u_0 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2}$, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
e. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2n - 4 = f(n)$, avec f affine, donc la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $r = 2$.
f. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)\sqrt{2} - n\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

donc la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = \sqrt{2}$.

19 $u_8 = u_0 + 8r$ et $u_{12} = u_0 + 12r$, donc $u_{12} - u_8 = 4r$, c'est-à-dire $25 - 15 = 4r$, d'où $r = 2{,}5$.
$u_0 = u_8 - 8r = 15 - 8 \times 2{,}5 = -5$.

23 **a.** $\frac{u_1}{u_0} = \frac{8}{4} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \neq 2$, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
b. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times (-2)^n = u_0 \times q^n$, donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -2$.
c. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3} = 2 \times \frac{2^n}{3} = 2 \times u_n,$$

donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $q = 2$.
d. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1 \times \left(\sqrt{2}\right)^n = u_0 \times q^n$, donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \sqrt{2}$.
e. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 3^{n+1+2} = 3 \times 3^{n+2} = 3 \times u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = 3$.
f. $u_0 = 0$ et $u_1 = 2 \neq q \times u_0$, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

25 **1.** $u_7 = 1\,000 \times 0{,}2^7 = 0{,}0128$
2. Par définition, la suite (v_n) est géométrique et $v_5 = 2 \times (-4)^5 = -2\,048$.

31 **1. a.** $1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,000 = \frac{1\,000 \times 1\,001}{2}$
$= 500\,500$.
b. $501 + 502 + 503 + \ldots + 1\,000$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,000) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 500)$
$= 500\,500 - \frac{500 \times 501}{2} = 375\,250$

2.

```
S ← 0
Pour k allant de 1 à 1 000 faire
    S ← S + k
```

```
S ← 0
Pour k allant de 501 à 1 000 faire
    S ← S + k
```

35 $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{11} = \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = 4\,095$
Au bout de 1 an, l'entreprise aura versé à cette association 40,95 €.
$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{23} = \frac{1 - 2^{24}}{1 - 2} = 16\,777\,215$
Au bout de 2 ans, l'entreprise aura versé à cette association 167 772,15 €.

38 D'après le graphique, f semble décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc la suite (u_n) semble décroissante.
D'après le graphique, g semble décroissante sur $[0\,;5]$ puis croissante sur $[5\,;+\infty[$.
La suite (v_n) semble donc décroissante jusqu'au rang 5, puis croissante à partir du rang 5.

Corrigés

41 Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 2 - (n^2 - 8n + 2)$
$= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 2 - n^2 + 8n - 2 = 2n - 7$

Ainsi :

pour $n \leqslant 3$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ puis pour $n \geqslant 4$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Donc la suite (u_n) est décroissante jusqu'au rang 4 puis croissante à partir du rang 4.

42 Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive et elle est décroissante si sa raison est négative.
Donc les suites (u_n), (v_n) et (t_n) sont croissantes et la suite (w_n) est décroissante.

45 Comme $u_0 = -3$ alors la suite (u_n) est représentée par le graphique n°1 et donc la suite (v_n) est représentée par le graphique n°2.
D'après ces graphiques, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

47

u_0	−1	0	0,25	0,5	1	2
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	0	0,5	0,5	0	$-\infty$

56 **1.** $\dfrac{664 - 800}{800} \times 100 = -17$, donc le pourcentage de compression est de 17 %.

2. a. $t_{n+1} = t_n - 0{,}17t_n = 0{,}83t_n$

b. D'après la question précédente, la suite (t_n) est une suite géométrique de premier terme 800 et de raison 0,83. Donc on a $t_n = 800 \times 0{,}83^n$ pour tout entier naturel n.

3. On cherche à la calculatrice le premier entier naturel n tel que $t_n < 50$, on trouve $n = 15$. Il faut donc au minimum 15 compressions successives pour que le fichier ait une taille finale inférieure à 50 Ko.

67 **a.**

```
L1   u ← 1
L2   S ← 1
L3   n ← 0
L4   Tant que S ⩽ 10 000
L5   u ← u + 0,1
L6   S ← S + u
L7   n ← n + 1
```

b. On reprend l'algorithme de la question **a** et on remplace la ligne 5 par :

```
L5   u ← 1,01u
```

c. On reprend l'algorithme de la question **a** et on remplace la ligne 5 par :

```
L5   u ← 2u + 1
```

71 **1.** On note p_n la population en Angleterre l'année $1800 + n$, exprimée en million.
D'après les hypothèses de Thomas Malthus, la suite (p_n) est la suite géométrique de premier terme $p_0 = 8{,}3$ et de raison $q = 1{,}02$.
On note a_n le nombre de personnes en Angleterre pouvant être nourries par la production agricole anglaise l'année $1800 + n$, exprimée en million.
D'après les hypothèses de Thomas Malthus, la suite (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 8{,}3$ et de raison $r = 0{,}4$.

2. $p_1 = 8{,}3 \times 1{,}02 = 8{,}466$ et $a_1 = 8{,}3 + 0{,}4 = 8{,}7$
Selon les hypothèses de Malthus, la population en Angleterre en 1801 est de 8,466 millions d'habitants et la production agricole anglaise cette année–là permet de nourrir 8,7 millions de personnes.

3. On cherche le premier entier naturel n tel que $a_n < p_n$.
D'après la calculatrice, on trouve $n = 80$: d'après les hypothèses de Malthus, c'est en 1880 que la production agricole anglaise ne permettra pas, pour la première fois, de nourrir l'ensemble de la population anglaise.

80 **1.** $L_1 = 1$; $L_2 = 3$.

2. Pour déplacer une tour à $n+1$ disques, il faut d'abord avoir déplacé les n disques du dessus de T_1 à T_2, soit L_n déplacements, puis déplacer le plus grand disque de T_1 en T_3, soit 1 déplacement et enfin déplacer à nouveau la tour des n disques de T_2 en T_3, soit L_n déplacements.
D'où la formule de récurrence.

3. On a pour tout entier $n \geqslant 1$, $L_{n+1} = 2L_n + 1$. On cherche le nombre n de disques nécessaires pour que $L_n \geqslant 3\,600$. On utilise la calculatrice pour afficher les premiers termes de la suite (L_n). On obtient $L_{11} = 2\,047$ et $L_{12} = 4\,095$.
12 est nombre minimal de disques nécessaires pour que le jeu dure au moins une heure.

4. a. Le nombre minimal de déplacements nécessaires pour transporter une tour de 3 disques de T_1 en T_3 est $L_3 = 7$, donc la réponse est non.

b. 1er déplacement : petit disque de T_1 en T_3.
2e déplacement : moyen disque de T_1 en T_2.
3e déplacement : petit disque de T_3 en T_2.
4e déplacement : grand disque de T_1 en T_3.
5e déplacement : petit disque de T_2 en T_1.
6e déplacement : moyen disque de T_2 en T_3.
7e déplacement : petit disque de T_1 en T_3.

82 **1.** $u_1 = 0{,}8u_0 + 18 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 70$ et $u_2 = 0{,}8u_1 + 18 = 0{,}8 \times 70 + 18 = 74$

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0{,}8u_n + 18 - 90$
$= 0{,}8(v_n + 90) - 72 = 0{,}8v_n$
$v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = -25$.

b. Pour tout entier naturel n, on a donc :
$v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0{,}8^n$.
Or $u_n = v_n + 90$ donc $u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n$.

3. ab. Ligne 3 : Tant que $u < 85$.
À la calculatrice, on obtient les termes successifs de la suite : u_8 est le premier terme supérieur ou égal à 85, donc la valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme est 8.

4. a. En juillet 2017, 65 particuliers avaient souscrit l'abonnement ce qui correspond au terme de rang 0 de la suite (u_n). Chaque mois, 20 % des abonnements sont résiliés, donc il en reste 80 % et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement. On passe donc d'un mois n au mois suivant $n + 1$, en multipliant le nombre d'abonnés par 0,8 et en ajoutant 18. Ainsi, la suite (u_n), définie par $u_0 = 65$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18$, modélise bien le nombre d'abonnés au panier bio.

b. On cherche l'entier n tel que $52u_n \geqslant 4\,420$.
Or $52u_n \geqslant 4\,420 \Leftrightarrow u_n \geqslant 85$. Ainsi, d'après la question **3. b.** c'est au bout de 8 mois que la recette mensuelle dépassera 4 420 €.
Sachant que $n = 0$ correspond au mois de juillet 2017, c'est donc à partir du mois de mars 2018.

c. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 90$ et $52 \times 90 = 4\,680$.
Ainsi, la recette mensuelle semble tendre vers 4 680 €.

Chapitre 2

1 **1.** Canonique ; factorisée ; développée.

2. On développe les formes 1 et 2 pour obtenir la forme 3.

3. a. Vrai : la forme développée donne directement $f(0) = 6$.

b. Vrai : en utilisant la forme factorisée, l'équation $f(x) = 0$ est une équation produit nul qui admet exactement deux solutions -1 et 2.

c. Vrai : $a = 3$, donc f admet un minimum ; sa valeur $-\frac{27}{4}$ est directement donnée par la forme canonique.

d. Vrai : la forme canonique de $f(x)$ indique que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f et donc $f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ soit $f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right)$.

6 La forme développée de $f(x)$ est $3x^2 - x + 7$ avec $a = 3$, $b = -1$ et $c = 7$.
Sa forme canonique est $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{6}$
et $\beta = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 7 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 7$
$= \frac{1 - 2 + 84}{12} = \frac{83}{12}$. Ainsi $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}$.

7 **1.** L'écriture canonique de $f(x)$, avec $a = -2$, indique que la fonction f admet un maximum égal à 100, atteint en 50.
f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,50]$ et strictement décroissante sur $[50\,;\,+\infty[$.

2. L'écriture canonique de $f(x)$, avec $a = 3$, indique que la fonction f admet un minimum égal à $-\frac{1}{4}$, atteint en -1. f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et strictement croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

3. L'écriture canonique de $f(x)$, avec $a = 0{,}6$ indique que la fonction f admet un minimum égal à 0, atteint en $-0{,}2$.
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-0{,}2]$ et strictement croissante sur $[-0{,}2\,;\,+\infty[$.

4. $a = -6 < 0$, donc f admet un maximum en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2 \times (-6)}\right) = \frac{1}{36}$ égal à :
$$g\left(\frac{1}{36}\right) = -\frac{431}{216}.$$
g est donc strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{36}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{36}\,;\,+\infty\right[$.

5. f a les mêmes variations que la fonction « carré ».

18 **1.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16)$
$= \frac{1}{2}(x - 4)^2$.

2. $f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}8x - 4{,}25 = 0{,}01(x^2 + 80x - 425)$.
$\Delta = 8100$, $x_1 = 5$ et $x_2 = -85$, d'où $f(x) = 0{,}01(x - 5)(x + 85)$.

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.
$\Delta < 0$, donc le trinôme ne se factorise pas.

4. $f(x) = 2x^2 + x\sqrt{2} - 1$

$\Delta = 10$, $x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$.

$f(x) = 2\left(x - \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}\right)\left(x - \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)$

21 **1.** $-2x^2 + x - 1 = 0$. $\Delta = -7 < 0$, pas de solution réelle.

2. $2x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = 12$, $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

3. $5x^2 - 2x + 1 = 0$. $\Delta = -16 < 0$, pas de solution.

4. $2x^2 + 4 = -6x$ équivaut à $2x^2 + 6x + 4 = 0$.
$\Delta = 4$, $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.

5. $x(2x-1) = 1$ équivaut à $2x^2 - x - 1 = 0$.
$\Delta = 9$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

6. $x^2 = -5x - 1$ équivaut à $x^2 + 5x + 1 = 0$. $\Delta = 21$, $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$.

7. $-x + 3x^2 - 1 = 0$.
$\Delta = 13$, $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

8. $x(8-x) + 1 = 0$ équivaut à $-x^2 + 8x + 1 = 0$.
$\Delta = 68$, $x_1 = 4 - \sqrt{17}$ et $x_2 = 4 + \sqrt{17}$.

9. $2x^2 + 6x + \dfrac{9}{2} = 0$. $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = -1{,}5$.

10. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ équivaut à $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 = 0$.
La solution est $-\sqrt{3}$.

11. $-3x^2 + x = -\dfrac{1}{4}$ équivaut à $-3x^2 + x + \dfrac{1}{4} = 0$.

$\Delta = 4$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{6}$.

12. $2x(5+2x) = 9 - 2x$ équivaut à $4x^2 + 12x - 9 = 0$.

$\Delta = 288$, $x_1 = \dfrac{-3-3\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+3\sqrt{2}}{2}$.

24 **1.** -1 est racine évidente de $f(x)$.

2. Soit x_2 la deuxième racine, $-1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$.

Donc $x_2 = -\dfrac{2}{3}$.

On a alors $f(x) = 3(x+1)\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = (x+1)(3x+2)$.

34 **1.** $f : x \mapsto 2x^2 + 5x + 4$. $\Delta = -7 < 0$
Pour tout x réel, $f(x)$ a le signe de $a = 2 > 0$.

2. $g : x \mapsto 4x^2 - 7x + 3$
$\Delta = 1$, le trinôme a le signe de $a = 1 > 0$, sauf entre ses racines 1 et $\dfrac{3}{4}$.

3. $h : x \mapsto x^2 + x + \dfrac{1}{4}$.

On a $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$. $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et pour tout $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $h(x) > 0$.

4. $i : x \mapsto 2x^2 - 2x - 1$.
$\Delta = 12$, le trinôme a le signe de $a = 2 > 0$ sauf entre ses racines $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. $j : x \mapsto -7x^2 + 12x - 6$.
$\Delta = -24 < 0$. Pour tout x réel, $f(x)$ a le signe de :
$$a = -7 < 0.$$

6. $l : x \mapsto 4x^2 - 2{,}4x + 0{,}36$. $\Delta = 0$, le trinôme a une seule racine $\dfrac{3}{10}$ et, pour tout $x \neq \dfrac{3}{10}$, $h(x) > 0$.

36 **1.** $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04 \leqslant 0$ équivaut à $(x - 0{,}2)^2 \leqslant 0$.
La seule solution est 0,2.

2. $-x^2 + 5x < 7$ équivaut à $-x^2 + 5x - 7 < 0$.
On étudie le signe du trinôme $-x^2 + 5x - 7$.
$\Delta = -3 < 0$, donc, pour tout x réel, le trinôme a le signe de $a = -1 < 0$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

3. $\dfrac{2}{3}x^2 \geqslant 4x - 6$ équivaut à $\dfrac{2}{3}x^2 - 4x + 6 \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{2}{3}\left(x^2 - 6x + 9\right) = \dfrac{2}{3}(x-3)^2 \geqslant 0$.

Or, pour tout x réel, $\dfrac{2}{3}(x-3)^2 \geqslant 0$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

4. $11x^2 + 16x - 9 < 10x + 8$ équivaut à $11x^2 + 6x - 17 < 0$.
$\Delta = 784$, le trinôme a le signe de $a = 11 > 0$ sauf entre ses racines $\dfrac{17}{11}$ et 1.
L'ensemble des solutions est $\left]\dfrac{17}{11} ; 1\right[$.

54 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1$.
La position relative des courbes représentatives de f et g est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \neq 1$.

$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-1} - (x-1) = \dfrac{-x^2+2x}{x-1}$ pour $x \neq -1$.

$-x^2 + 2x$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2. Il a le signe de $a = -1 < 0$ sauf entre les racines. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

$f(x) - g(x) > 0$ équivaut à $f(x) > g(x)$: la courbe de f est au-dessus de celle de g sur les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]1 ; 2[$. Les deux courbes sont sécantes en leurs points d'abscisses 0 et 2.

92 **1.** L'équation $3x^2 + bx + 4 = 0$ admet une unique solution, égale à $-\frac{b}{2a}$, si et seulement si son discriminant, $b^2 - 48$, est égal à 0.
Donc $b = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$ et la solution est $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou $b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ et la solution est $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. L'équation $3x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si son discriminant $b^2 - 12\,c$ est strictement positif. Il suffit de choisir par exemple $b = 5$ et $c = 2$.

3. a. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si son discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement positif. Comme $a > 0$, il suffit de choisir $c < 0$.

b. Cette condition n'est pas nécessaire : l'équation $(x - 1)(x - 2) = 0$ admet deux solutions distinctes, avec $a = 1 > 0$ et $c = 2 > 0$.

4. L'équation $2x^2 - x + c = 0$ n'admet pas de solution réelle si et seulement si son discriminant $b^2 - 8c$ est strictement négatif, ce qui équivaut à $c \in \left]\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$.

5. $x^3 + ax^2 + x = 0$ est équivalente à $x(x^2 + ax + 1) = 0$. 0 est solution de cette équation ; elle admet donc exactement deux solutions distinctes si et seulement si le trinôme $x^2 + ax + 1$ admet une seule racine, donc si et seulement si le discriminant $a^2 - 4 = 0$, ce qui équivaut à $a = 2$ ou $a = -2$.

Chapitre 3

2

Angle en degré	150	12	40	195
Angle en radian	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{12}$

3

Angle en radian	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{5\pi}{12}$
Angle en degré	40	52,5	75

4 En plaçant les points M et N sur le cercle trigonométrique, on se rend compte que M a aussi pour image $\frac{\pi}{4}$ et N a aussi pour image $-\frac{\pi}{3}$. La longueur de l'arc de cercle d'extrémités M et N est donc $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.

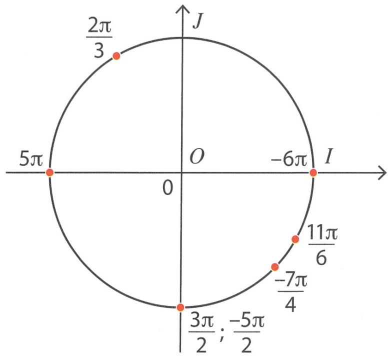
6 **1. a.** I' **b.** J **c.** J' **d.** I **e.** I'

2. a. A **b.** B **c.** C

3. a. G **b.** C **c.** H **d.** C

4. $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi$, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi$ et $\frac{2\pi}{3} - 2\pi$.

10



13 **1.** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

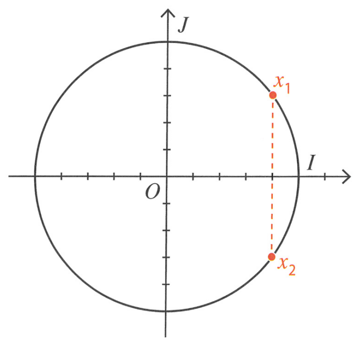
4. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

5. $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

6. $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

17 **1.** Le cosinus d'un nombre est toujours compris entre –1 et 1, donc on ne peut pas trouver de valeur x telle que $\cos(x) = 1{,}4$.

2. a. et **b.**



c. Il existe plusieurs valeurs telles que $\cos(x) = 0{,}8$. Il y a toutes celles de la forme $x_1 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et celles de la forme $x_2 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

d. À la calculatrice, on trouve que $\cos(x) = 0{,}8$ pour $x \approx 0{,}6$.

Corrigés

25 $A = \cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 1+0+(-1)+0 = 0$

$B = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

28 **1. a.** Les solutions de l'équation $\sin(x) = 0{,}5$ sont $\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b. Les solutions de l'équation $\sin(x) = 1$ sont $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

c. Les solutions de l'équation $\sin(x) = 0$ sont $\{-\pi\,;0\,;\pi\}$.

2. On visualise ces solutions sur le cercle trigonométrique.

33 **1.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. On en déduit que, pour tout réel x, $1 \leqslant \cos(x)+2 \leqslant 3$.
Le dénominateur ne s'annule pas donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit x un réel, $f(-x) = \dfrac{2}{2+\cos(-x)} = \dfrac{2}{2+\cos(x)} = f(x)$.

On en déduit que la fonction f est paire.

3. Soit x un réel, $f(x+2\pi) = \dfrac{2}{2+\cos(x+2\pi)}$

$= \dfrac{2}{2+\cos(x)} = f(x)$.

On en déduit que la fonction f est périodique de période 2π.

35 **1.** On conjecture à la calculatrice que la fonction f est périodique et a pour période 2π.

2. Soit x un réel.
$f(-x) = \cos(2\times(-x)) - \cos(-x) = \cos(2x) - \cos(x) = f(x)$

3. On en déduit que la fonction f est paire.

39 **1.**

x	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.

x	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1

51 **1.** On a la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x)=1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - (-0{,}8)^2 = 0{,}36$.
De plus, $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, donc la valeur de $\sin(x)$ est positive.
On conclut que $\sin(x) = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

2. On a la relation : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.
De plus, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc la valeur de $\cos(x)$ est positive.
On conclut que $\cos(x) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. On a la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - (0{,}6)^2 = 0{,}64$.
De plus, $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$, donc la valeur de $\sin(x)$ est négative.
On conclut que $\sin(x) = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$.

52 **1.** $\sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$

2. $\sin(-x) - \sin(\pi + x) = -\sin(x) - (-\sin(x))$
$= -\sin(x) + \sin(x) = 0$

3. $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x) = -\cos(x) - \cos(x) = -2\cos(x)$

4. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) - 4\sin(\pi - x)$

$= \cos(x) - 3\times(-\sin(x)) - 4\sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$

65 **1.** Pour $x = \frac{\pi}{2}$:

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2$
$= (0+2\times 1)^2 + (2\times 0 - 1)^2 = 4+1 = 5$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$:

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}+\frac{2}{4} = 5$

2. $(\cos(x) + 2\sin(x))^2 + (2\cos(x) - \sin(x))^2 = \cos^2(x) + 4\cos(x)\sin(x) + 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) + 4\sin^2(x)$
$= 5\cos^2(x) + 5\sin^2(x) = 5(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 5$

73 **1.** $S = \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$

2. $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

3. $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\right\}$

4. $S = \left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$

Chapitre 4

2 **1.** Le taux de variation de la fonction cube entre 0 et 1 se calcule ainsi :

$$\frac{1^3-0^3}{1-0}=\frac{1-0}{1}=1.$$

Le taux de variation de la fonction cube entre 1 et 3 se calcule ainsi :

$$\frac{3^3-1^3}{3-1}=\frac{27-1}{2}=13.$$

2. Le taux de variation de la fonction inverse entre 0,1 et 1 se calcule ainsi :

$$\frac{1-\frac{1}{0,1}}{1-0,1}=\frac{1-10}{0,9}=-\frac{9}{0,9}=-\frac{90}{9}=-10.$$

Le taux de variation de la fonction inverse entre 1 et 10 se calcule ainsi :

$$\frac{\frac{1}{10}-1}{10-1}=\frac{0,1-1}{9}=-\frac{0,9}{9}=-\frac{9}{90}=-0,1.$$

6 **1.** Le segment de la ligne brisé dont la pente est la plus forte est celui correspondant à la période de1968 à 1975, donc c'est lors de cette période que la population de Floirac a connu son évolution la plus rapide.

2. Le taux de variation de la population de Floirac entre 1968 et 1990 (en habitants par an) est donné par :

$$\frac{16\,384-8\,241}{1\,990-1\,968}=\frac{8\,143}{22}\approx 370,1.$$

Le taux de variation de la population de Floirac entre 1990 et 2007 (en habitants par an) est donné par :

$$\frac{15\,794-16\,384}{2\,007-1\,990}=\frac{-590}{17}\approx -34,7.$$

Le taux de variation de la population de Floirac entre 1968 et 2007 (en habitants par an) est donné par :

$$\frac{15\,794-8\,241}{2\,007-1\,968}=\frac{7\,553}{39}\approx 193,7.$$

Entre 1968 et 1990, la ville de Floirac a gagné en moyenne environ 370 habitants par an, entre 1990 et 2007 en revanche elle a perdu en moyenne environ 35 habitants par an, mais globalement entre 1968 et 2007 elle a gagné en moyenne environ 194 habitants par an.

7 **1.** $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{5(1+h)^2-(1+h)+7-11}{h}$

$$=\frac{5h^2+9h}{h}=5h+9$$

Le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est $5h+9$.

2. Quand h tend vers 0, $5h$ tend aussi vers 0 et donc le taux tend vers 9.

3. On en déduit que $f'(1)=9$.

17 $f'(0)=2$, $f'(1)=0$ et $f'(3)=-2$.

26 La droite verte a semble être tangente à la courbe au point d'abscisse – 4,5 environ.
La droite marron b semble être tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La droite violette c semble être tangente à la courbe au point d'abscisse – 3,7 environ.

30 **1.** $f(2)=3\times 2^2-2\times 2-1=7$
On sait aussi que $f'(2)=10$.
On obtient donc $y=7+10(x-2)$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est donc $y=10x-13$.

2. $10\times 5-13=37$
Les coordonnées de S vérifient l'équation, donc S appartient à cette tangente.

40 **1.** f est une fonction affine, son taux de variation entre deux valeurs est donc constant, égal au coefficient de son terme en x, donc ici à 23,2. On en déduit donc que $f'(52)=23,2$.

2. $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{(1+h)^2-5-(-4)}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$

Le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est $2+h$, donc $f'(1)=2$.

3. $\frac{f(5+h)-f(5)}{5+h-5}=\frac{3(5+h-5)(5+h+2)-0}{h}$

$=\frac{3h(7+h)}{h}=21+3h$

Le taux de variation de f entre 5 et $5+h$ est $21+3h$, donc $f'(5)=21$.

4. $\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}=\frac{(0+h)^3+0+h+1-1}{h}=\frac{h^3+h}{h}$

$=h^2+1.$

Le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ est h^2+1, donc $f'(0)=1$.

46 $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h\sqrt{h}-0}{h}=\sqrt{h}$. Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ tend vers 0, donc $f'(0)=0$.

54

x	1	6
$f(x)$	1,4	0,4
$f'(x)$	0	–0,4

61 **1.** Soit a un réel et h un réel non nul. On calcule le taux de variation entre a et $a+h$:

$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{4(a+h)^2+a+h-9-\left(4a^2+a-9\right)}{a+h-a}$

$=\frac{4h^2+(8a+1)h}{h}=4h+8a+1$

Corrigés

Lorsque h tend vers zéro, le taux de variation tend vers le nombre réel $8a + 1$.
La fonction f est donc dérivable en tout réel a avec $f'(a) = 8a + 1$.

2. $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \times \frac{2}{3} + 1 = \frac{16}{3}$ $f'(\sqrt{5}) = 8\sqrt{5} + 1$

3. $f(2) = 4 \times 2^2 + 2 - 9 = 9$
$f'(2) = 8 \times 2 + 1 = 17$
On obtient donc $y = 9 + 17(x - 2)$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est donc $y = 17x - 25$.

63 **1.** La vitesse initiale est la vitesse instantanée pour $t = 0$, c'est-à-dire le nombre dérivé, s'il existe, $f'(0)$.
Pour déterminer ce nombre dérivé, on exprime le taux de variation entre 0 et $0 + h$.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{5h+25h-0}{h} = 25+h$$

Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ tend vers 25 donc $f'(0) = 25$.
La vitesse initiale est de 25 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. L'attaque a duré 8 secondes.

a. En 8 secondes, le faucon a parcouru :

$$f(8) = 5 \times 8^2 + 25 \times 8 = 520 \text{ m}.$$

b. Le faucon a alors pour vitesse moyenne :

$$v = \frac{520}{8} = 65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c. La vitesse instantanée pour $t = 8$ est donné par le nombre dérivé, s'il existe, $f'(8)$.
Pour déterminer ce nombre dérivé, on exprime le taux de variation entre 0 et $0 + h$.

$$\frac{f(8+h)-f(8)}{h} = \frac{5(8+h)^2+25(8+h)-520}{h}$$

$$= \frac{5\left(64+16h+h^2\right)+200+25h-520}{h} = \frac{80h+5h^2+25h}{h}$$

$$= \frac{105h+5h^2}{h} = 105+5h$$

Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre 8 et $8 + h$ tend vers 105 donc $f'(8) = 105$.
La vitesse initiale est de 105 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit 378 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$!!

67 **1.** Montrer que le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$, où h est un réel non nul, est égal à :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h+4}-\sqrt{1+4}.}{h} = \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} \times \frac{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{5+h}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{5+h-5}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}.$$

2. Lorsque h tend vers 0, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{5}}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

82 **1.** Soit h un réel non nul.
On calcule le taux de variation entre 0 et $0 + h$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} = \frac{(0+h)^3-2(0+h)+1-1}{h}.$$

$$= \frac{h^3-2h}{h} = h^2-2$$

Lorsque h tend vers 0, le taux de variation tend vers –2.
La fonction f est donc dérivable en 0 avec $f'(0) = -2$.
De plus, $f(0) = 1$.
On obtient donc $y = 1 + (-2)(x - 0)$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est donc $y = -2x + 1$.

2. $f(x) - (-2x + 1) = x^3 - 2x + 1 - (-2x + 1)$
$= x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de x^3-4x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur $]-\infty\,;-2[$, $f(x) - (-2x + 1) < 0$ donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{T}_0$.
Sur $]-2\,;0[$, $f(x)-(-2x + 1) > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{T}_0$.
Sur $]0\,;2[$, $f(x) - (-2x + 1) < 0$ donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{T}_0$.
Sur $]2\,;+\infty[$, $f(x) - (-2x + 1) > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{T}_0$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_0$ sont sécantes aux points d'abscisse – 2, 0 et 2.

90 **1.** f est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x + 1 \neq 0$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2. a un réel différent de –1 et h un réel non nul tel que $a + h \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
On calcule le taux de variation entre a et $a + h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{\frac{2(a+h)+1}{a+h+1}-\frac{2a+1}{a+1}}{a+h-a}$$

$$= \frac{(2(a+h)+1)(a+1)-(a+h+1)(2a+1)}{h(a+1)(a+1+h)}$$

$$= \frac{h}{h(a+1)(a+1+h)}$$

$$= \frac{1}{(a+1)(a+1+h)}$$

Lorsque h tend vers zéro, le taux de variation tend vers le nombre réel $\frac{1}{(a+1)^2}$.

La fonction f est donc dérivable en tout réel a avec $f'(a)=\dfrac{1}{(a+1)^2}$.

3. $f'(-4)=\dfrac{1}{(-4+1)^2}=\dfrac{1}{9}$

$f'\left(\dfrac{5}{7}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{7}+1\right)^2}=\dfrac{49}{144}$

4. $f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$

$f'(4)=\dfrac{1}{(4+1)^2}=\dfrac{1}{25}$

On obtient donc $y=\dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{25}(x-4)$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 est donc $y=\dfrac{1}{25}x+\dfrac{41}{25}$.

93 **1.** Soit a un réel et h un réel non nul.
On calcule le taux de variation entre a et $a+h$:

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$

$=\dfrac{2(a+h)^2-4(a+h)+1-\left(2a^2-4a+1\right)}{a+h-a}$

$=\dfrac{2h^2+(4a-4)h}{h}=2h+4a-4.$

Lorsque h tend vers zéro, le taux de variation tend vers le nombre réel $4a-4$.
La fonction f est donc dérivable en tout réel a avec $f'(a)=4a-4$.

2. $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2-4\times\dfrac{-1}{3}+1=\dfrac{23}{9}$

$f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-4=-\dfrac{16}{3}$

On obtient donc $y=\dfrac{23}{9}-\dfrac{16}{3}\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est donc $y=-\dfrac{16}{3}x+\dfrac{7}{9}$.

Chapitre 5

2 **1.** f est la somme de deux fonctions $u:x\rightarrow 3x^2$ et $v:x\rightarrow\sqrt{x+1}$ dérivables sur $[0\,;+\infty[$.

2. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=u'+v'$.
$u'(x)=3\times 2x=6x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, donc $f'(x)=6x+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

9 **1.** On calcule le taux d'accroissement de f en -2 :

$\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\dfrac{(-2+h)^2-3(-2+h)+7-\left((-2)^2-3\times(-2)+7\right)}{h}$

$=\dfrac{4-4h+h^2+6-3h+7-4-6-7}{h}$

$=\dfrac{h^2-7h}{h}=h-7.$

Lorsque h devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de -7 qui est un nombre fini.
La fonction est donc dérivable en a et on a $f'(a)=-7$.

2. f est la somme des fonctions :
$u:x\rightarrow x^2$ et $v:x\rightarrow -3x+7$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=u'+v'$.
$u'(x)=2x=$ et $v'(x)=-3$, donc $f'(x)=2x-3$.
On calcule $f'(-2)=2\times(-2)-3=-7$ et on retrouve le résultat du **1**.

12 **a.** f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-2x$.

b. $g(x)=-\pi\times\dfrac{1}{x}$.
g est définie et dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et
$g'(x)=-\pi\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{\pi}{x^2}$.

c. h est définie sur $[0\,;+\infty[$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et
$h'(x)=18\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{9}{\sqrt{x}}$.

d. j est définie sur $[0\,;+\infty[$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et
$j'(x)=-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

e. $k(x)=-3\times\dfrac{1}{x}+3\times x^2+7$.
g est définie et dérivable sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ et
$k'(x)=-3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+3\times 2x=\dfrac{3}{x^2}+6x$.

f. $m(x)=-3\sqrt{2x+5}=-3\times g(2x+5)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$.
$2x+5\geqslant 0\Leftrightarrow 2x\geqslant -5\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{-5}{2}$, donc m est définie sur $\left[\dfrac{-5}{2}\,;+\infty\right[$, dérivable sur $\left]\dfrac{-5}{2}\,;+\infty\right[$ et

$m'(x)=-3\times2\times g'(2x+5)$

$=-3\times2\times\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}=\dfrac{-3}{\sqrt{2x+5}}$.

19 Graphiquement, on détermine le signe de la fonction g'.
g' est positive sur $]-\infty\,;2]$ et négative sur $[2\,;+\infty[$.
On en déduit que g est croissante sur $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

Corrigés

27 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -3x^2 + 4x - 2$.
On étudie le signe de f' qui est une fonction polynôme de degré 2.
$\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 16 - 24 = -8$
$\Delta < 0$, donc il n'y a aucune racine réelle.
$a = -3 < 0$, donc f' est négative sur $\mathbb{R}$ et on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		↘	

2. $f(3) = 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc on en déduit que f est positive sur $]-\infty\,;3]$ et négative sur $[3\,;+\infty[$.

30 **1.** f est dérivable sur $[-3\,;2]$ et $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

2. On étudie le signe de f' qui est une fonction polynôme de degré 2.
$\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324$
$\Delta > 0$ il y a donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{324}}{2\times 6} = \frac{-6-18}{12} = -2$$

et $$x_2 = \frac{-6+\sqrt{324}}{2\times 6} = \frac{-6+18}{12} = 1$$

$a = 6 > 0$, on en déduit le signe de f' puis le tableau de variations de f.

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	13	↗	24	↘	-3	↗	8

3. Le maximum de f sur $[-3\,;2]$ est 24 atteint pour $x = -2$.

4. Le minimum de f sur $[-3\,;2]$ est -3 atteint pour $x = 1$.

32 **1.**

x	-10		-9		2		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	5	↘	-6

2. Le minimum de f sur $[-10\,;10]$ est -2 atteint pour $x = -9$.

3. Le maximum de f sur $[-10\,;10]$ est 5 atteint pour $x = 2$.

48 **1.** On peut conjecturer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 8$.

b. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2 + 8 \geqslant 8$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}$.

c. f' est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et on en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		↗	

d. La conjecture est vérifiée.

55 Si on nomme x la longueur du rectangle et l sa largeur, on a l'égalité $2 \times (l + x) = 3$ soit $l = 1{,}5 - x$.
La hauteur du triangle isocèle rectangle mesure la moitié de l'hypoténuse, donc l'aire de la fenêtre a pour expression :

$$A(x) = x \times (1{,}5 - x) + \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = 1{,}5x - x^2 + 0{,}25x^2$$
$$= -0{,}75x^2 + 1{,}5x.$$

Pour obtenir l'aire maximale, soit on exploite les connaissances sur les polynômes du second degré, soit on utilise la dérivation. Dans les deux cas, on obtient une aire maximale de 1,5 m^2 pour $x = 1$ m.

61 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x - 1$.

2. L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.
Or, $f(2) = 7$ et $f'(2) = 7$ donc l'équation de $\mathcal{T}$ est : $y = 7(x - 2) + 7 = 7x - 14 + 7 = 7x - 7$.

3. a. $f(x) - g(x) = 2x^2 - x + 1 - (7x - 7) = 2x^2 - 8x + 8$

b. On étudie le signe de $2x^2 - 8x + 8$.
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 64 - 64 = 0$
$\Delta = 0$, il y a donc une racine réelle $x_0 = \dfrac{-(-8)}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$.
$a = 2 > 0$, on en déduit que $2x^2 - 8x + 8$ est positif sur $\mathbb{R}$ et s'annule seulement pour $x = 2$.

c. Pour tout réel x, $2x^2 - 8x + 8 \geqslant 0$ donc $f(x) - g(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant g(x)$.
On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$.
De plus $2x^2 - 8x + 8$ s'annule seulement pour $x = 2$ donc le seul point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ est le point d'abscisse 2.

69 **1.** On étudie le signe de $2x^2 + 3x - 1$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 + 8 = 17$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2\times 2} = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$$

et $$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2\times 2} = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.$$

$a = 2 > 0$, on en déduit le signe de $2x^2 + 3x - 1$ dans le tableau de signes ci-dessous.
On étudie le signe de $x^2 + x - 2$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

$a = 1 > 0$, on en déduit le signe de $x^2 + x - 2$ dans le tableau de signes ci-dessous.
On en déduit le signe de f.

x	$-\infty$		-2		$\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$		1		$+\infty$
Signe de $2x^2+3x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de f		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

2. f est dérivable sur $]-\infty\,;-2[$, sur $]-2\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 1$;
$u'(x) = 4x + 3$; $v(x) = x^2 + x - 2$ et $v'(x) = 2x + 1$.
On en déduit que f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ et on obtient :

$$f'(x) = \frac{(4x+3)\left(x^2+x-2\right) - \left(2x^2+3x-1\right)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3+4x^2-8x+3x^2}{(x^2+x-2)^2} + \frac{3x-6-\left(4x^3+2x^2+6x^2+3x-2x-1\right)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-6x-5}{(x^2+x-2)^2}$$

3. $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - 6x - 5$ car $(x^2 + x - 2)^2 \geqslant 0$.
On étudie le signe de $-x^2 - 6x - 5$.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 36 - 20 = 16$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{6-4}{-2} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{6+4}{-2} = -5.$$

$a = -1 < 0$, on en déduit le signe de $-x^2 - 6x - 5$ dans le tableau de signes ci-dessous et celui de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
Signe de $-x^2-6x-5$		$-$	0	$+$		$+$		$-$		$-$	
Signe de $(x^2+x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

4. On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{17}{9}$	↗	‖	↗	1	↘	‖	↘	

80 **1.** $BM = BA - AM = 1 - x$
$BN = BC + CN = 1 + x$

2. Dans le triangle BMN, $C \in [BN]$, $P \in [MN]$.
Les droites (BM) et (PC) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à la même droite (BN).
On peut donc appliquer le théorème de Thalès, et on obtient $\frac{NC}{NB} = \frac{NP}{NM} = \frac{PC}{MB}$.

$\frac{NC}{NB} = \frac{PC}{MB}$, donc $\frac{x}{1+x} = \frac{PC}{1-x}$,

donc $PC = \frac{x(1-x)}{1+x} = \frac{-x^2+x}{1+x}$.

3. On considère la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{-x^2+x}{1+x}$.
On cherche le maximum de cette fonction.
f est définie et dérivable sur $[0\,;1]$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^2 + x$, $u'(x) = -2x + 1$,
$v(x) = 1 + x$ et $v'(x) = 1$.
On en déduit que f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ et on obtient :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(1+x) - \left(-x^2+x\right)\times 1}{(1+x)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{-2x-2x^2+1+x-\left(-x^2+x\right)}{(1+x)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(1+x)^2}$$

On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;1]$.
$(1 + x)^2 \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - 2x + 1$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2} \in [0\,;\,1] \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{2+2\sqrt{2}}{-2} = -1-\sqrt{2} \notin [0\,;1].$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;1]$ ainsi que les variations de f.

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
$-x^2-2x+1$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$-2\sqrt{2}+3$	↘	

$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}+3$ donc le maximum de f sur $[0\,;1]$ est $-2\sqrt{2}+3$ atteint pour $x=-1+\sqrt{2}$.
On en déduit que la longueur AC est maximale lorsque $AM=-1+\sqrt{2}$.
La longueur de PC est $-2\sqrt{2}+3$.

83 **1.** f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=2-x$, $u'(x)=-1$, $v(x)=x^2+5$ et $v'(x)=2x$.
On en déduit que f' est de la forme $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ et on obtient :

$$f'(x)=\frac{(-1)\left(x^2+5\right)-(2-x)\times 2x}{\left(x^2+5\right)^2}$$
$$=\frac{-x^2-5-4x+2x^2}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{x^2-4x-5}{\left(x^2+5\right)^2}$$

2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
$(x^2+5)^2 \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de x^2-4x-5.
$\Delta=(-4)^2-4\times 1\times(-5)=16+20=36$
$\Delta>0$, il y a donc deux racines réelles $x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times 1}$ $=\frac{4-6}{2}=-1$ et $x_2=\frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{4+6}{2}=5$.
$a=1>0$, donc $f'(x)\leqslant 0$ sur $[-1\,;5]$ et $f'(x)\geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-1]\cup[5\,;+\infty[$.

3. Le signe de f' permet de connaître les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$-0{,}1$	$\nearrow$	

88 **1.** Graphiquement, on voit que $\mathscr{C}_f$ est en dessous $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;1]$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h(x)=3x^2-2x+2$.

b. On étudie le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
$\Delta=(-2)^2-4\times 3\times 2=4-24=-20$
$\Delta<0$, donc il n'y a pas de racines réelles et $a=3>0$, donc $h'(x)\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $h(1)=0$ et h est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc h est positive sur $]-\infty\,;1]$ et négative sur $[1\,;+\infty[$.

3. $h(x)=f(x)-g(x)$ donc, d'après les résultats de la question **2**, on a :
• sur $]-\infty\,;1]$, $h(x)\geqslant 0$, donc $f(x)-g(x)\geqslant 0$, donc $f(x)\geqslant g(x)$;
• sur $[1\,;+\infty[$, $h(x)\leqslant 0$, donc $f(x)-g(x)\leqslant 0$ donc $f(x)\leqslant g(x)$.
On retrouve ainsi les résultats de la question **1**.

Chapitre 6

2 **1.** $f'(x)=3\exp(x)-2$

2. $g'(x)=4x\times\exp(x)+(2x^2+1)\times\exp(x)$
$=(2x^2+4x+1)\times\exp(x)$

3. $$h'(x)=\frac{(\exp(x)\times(6+2x)-(2+\exp(x))\times 2}{(6+2x)^2}$$
$$=\frac{\exp(x)\times(4+2x)-4}{(6+2x)^2}$$

5 $\exp(2)=\exp(5)\times\exp(-3)\approx 140\times 0{,}05=7$
$\exp(8)=\frac{\exp(5)}{\exp(-3)}\approx\frac{140}{0{,}05}=2\,800$
$\exp(-2)\approx\frac{1}{7}$
$\exp(10)=\exp(5)^2\approx 140^2=19\,600$

7 $A=\exp(2x-3+4-x)=\exp(x+1)$
$B=\exp(2x-2+x+2)=\exp(3x)$
$C=3\exp(x)\exp(2x-1)=3\exp(x+2x-1)$
$=3\exp(3x-1)$

14 **1.** $u_0=e^2$; $u_1=e^{2-\frac{1}{3}}=e^{\frac{5}{3}}$;
$u_2=e^{2-\frac{2}{3}}=e^{\frac{4}{3}}$; $u_3=e^{2-1}=e$.
La suite semble décroissante.

2. On a $u_n=e^2\times\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^n$.
La suite est géométrique de raison $e^{-\frac{1}{3}}$.

3. La raison est positive et est inférieure à 1, donc la suite est décroissante.

16 **1.** $f'(x)=1+e^x$

2. $g'(x)=\frac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

3. $h'(x)=1e^x+xe^x=(1+x)\,e^x$.

21 **1.** $e^{2x+1}=e^{3x+2}\Leftrightarrow 2x+1=3x+2\Leftrightarrow x=-1$
$S=\{-1\}$

2. $e^{-x}=e^{2x+4}\Leftrightarrow -x=2x+4\Leftrightarrow 3x=-4\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$
$S=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$

3. $e^{-4x+1}=e^{x+1}\Leftrightarrow -4x+1=x+1\Leftrightarrow -5x=0\Leftrightarrow x=0$
$S=\{0\}$

4. $e^{-x-1}-e^{2x+4}=0\Leftrightarrow e^{-x-1}=e^{2x+4}\Leftrightarrow -x-1=2x+4$
$\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$
$S=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

30 **1.** $\dfrac{e^x}{e^{4x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{-3x} \geqslant 1 \Leftrightarrow -3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$

$\mathcal{S} =]-\infty\,;0]$

2. $\dfrac{e^{x-2}}{e^{3x-6}} < 1 \Leftrightarrow e^{x-2-3x+6} < 1$

$\Leftrightarrow e^{-2x+4} < 1$

$\Leftrightarrow -2x+4 < 0$

$\Leftrightarrow -2x < -4$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{-4}{-2}$ car on divise chaque membre par -2 qui est négatif.

$\Leftrightarrow x > 2\,;$

$\mathcal{S} =]2\,;+\infty[$

3. $\dfrac{e^{2x+1}}{(e^x)^3} \geqslant 0$

Pour tout réel x, $e^{2x+1} > 0$ et $(e^x)^3 > 0$, donc ce quotient est positif pour tout réel x.

$\mathcal{S} = \mathbb{R}$

4. $\dfrac{e^{-x-2}}{e^{3x} \times e^3} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{-x-2}}{e^{3x} \times e^3} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow e^{-x-2-3x-3} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow e^{-4x-5} \leqslant 1$

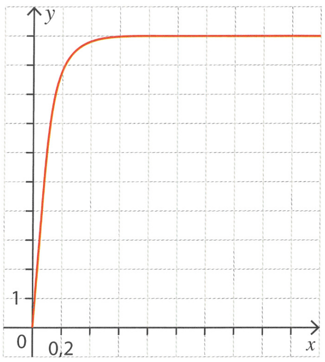
$\Leftrightarrow -4x-5 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -4x \leqslant 5$

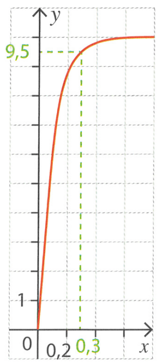
$\Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{5}{4}$ car on divise chaque membre par -4 qui est négatif.

$\mathcal{S} = \left[-\dfrac{5}{4};+\infty\right[$

35 **1.** $u(t) = 10 - 10e^{-\frac{t}{0,1}} = 10 - 10e^{-10t}$



2. Le temps de charge est d'environ 0,3 seconde.



46 D'après les données de l'exercice, on a :

$f(0) = 1 \Leftrightarrow (a \times 0 + b)\,e^{-0} = 1 \Leftrightarrow b = 1.$

On a aussi $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

On calcule $f'(x)$.

$f'(x) = ae^{-x} + (ax+1)(-e^{-x})$

$= ae^{-x} - axe^{-x} - e^{-x} = (a - ax - 1)\,e^{-x}$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a - \dfrac{1}{2}a - 1\right)e^{-\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a - 1 = 0$ car $e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

$\Leftrightarrow a = 2$

On obtient donc $f(x) = (2x+1)\,e^{-x}$.

57 **1.** L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Or $f'(a) = e^a$ et $f(a) = e^a$.

On trouve donc $y = e^a(x-a) + e^a$

$= e^a x - ae^a + e^a = e^a x + e^a(1-a).$

2. Le point B a pour ordonnée 0.

On résout donc $e^a x + e^a(1-a) = 0$.

$e^a x + e^a(1-a) = 0 \Leftrightarrow e^a x = e^a(a-1)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e^a(a-1)}{e^a} = a - 1$

3. H a la même abscisse que A donc $BH = a - (a-1) = 1$.

La distance BH est constante égale à 1.

68 **1.** Faux : en effet, $f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)\,e^{-x}$.

$f'(x)$ est du signe de $x-1$, car e^{-x} est toujours positif. Or $x-1$ change de signe en 1. Donc la fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Faux : Pour tout réel a, e^a est un réel positif. Donc e^{-x} est un réel positif quelle que soit la valeur de x.

3. Vrai : $u_n = \dfrac{1}{2}e^{3n} = \dfrac{1}{2}(e^3)^n$ est une suite géométrique de raison e^3.

4. Faux : $-3 < 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $e^{-3} < e^0$ donc $e^{-3} < 1$.

Chapitre 7

4 **a.** D est le projeté orthogonal de A sur la droite (DC), donc $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD} = a^2$.

b. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} = -a^2$.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

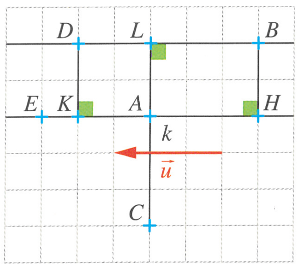
Corrigés

d. Soit I le milieu de $[AB]$, alors I est le projeté orthogonal de O sur la droite (AB), donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$ $=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}a^2$

e. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=-OC^2=-\frac{a^2}{2}$ car dans le triangle OBC rectangle en O, $OC^2+OC^2=BC^2 \Leftrightarrow 2OC^2=a^2$.

f. A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD), donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2$.

6



a. Soient E le point tel que $\overrightarrow{AE}=\vec{u}$ et H le projeté orthogonal de B sur (AE).
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=-AH\times AE=-9$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$.

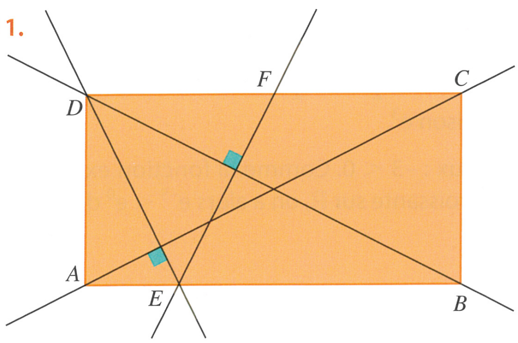
c. Soit K le projeté orthogonal de D sur (AE).
$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{u}=AK\times AE=6$

d. Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de sens contraire, donc $\overrightarrow{DB}\cdot\vec{u}=-5\times 3=-15$.

e. Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

f. Soit L le projeté orthogonal de C sur (DB).
$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{LB}=5\times 3=15$

12 **1.**



2. a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$
Or D est le projeté orthogonal de C sur la droite (AD), donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}^2$.
Ainsi, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$.

b. Comme B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AE), alors $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\times AE$.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=-AD^2-AB\times AE=-4+4=0$.
Ces vecteurs sont donc orthogonaux et les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

3. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})\cdot\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BD}$
Comme A est le projeté orthogonal de D sur la droite (EA), alors $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BA}=AB\times AE$.
Comme A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD), alors $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2$.
Comme C est le projeté orthogonal de B sur la droite (DC), alors $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CD}=-DF\times CD$.
Ainsi $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=4+4-8=0$.
Ces vecteurs sont donc orthogonaux et les droites (EF) et (BD) sont perpendiculaires.

19 En utilisant la formule du produit scalaire avec les normes, on obtient :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2)$.
Or, d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ et comme $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.
D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$.

21 **a.** $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2+6=4$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2+15=13$.

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=6+5=11$.

33 On utilise le théorème d'Al-Kashi :

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})=3^2+4^2-12\cos(60°)=19$, donc $a=\sqrt{19}$.

2. $b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\hat{B})=(2\sqrt{2})^2+5^2-10\sqrt{2}\cos(45°)=23$, donc $b=\sqrt{23}$.

3. $a^2=3^2+3^2-18\cos(90°)=18$, donc $a=3\sqrt{2}$.

42 Soit I le milieu du segment $[AB]$.
D'après le théorème de la médiane, on a :

a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-9 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=-9$
$\Leftrightarrow MI^2=-9+\frac{6^2}{4}=0 \Leftrightarrow MI=0$
Cet ensemble est donc réduit au point I.

b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=16$
$\Leftrightarrow MI^2=16+\frac{6^2}{4}=25 \Leftrightarrow MI=5$
Cet ensemble est donc le cercle de centre I et de rayon 5.

c. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-10 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=-10$
$\Leftrightarrow MI^2=-10+\frac{4^2}{4}=-6$
Cet ensemble est donc vide.

45 **1. a.** Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AH \times AB = -4$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$$

c. Cet ensemble est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

2. a. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB \times AD = 12$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM} = 0$$

Cet ensemble est la droite perpendiculaire à (AB) passant par D.

53 **1.** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\times 6 + 3\times 2 = 24$.

2. a. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 24$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH}$ étant colinéaires, on a :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH} = BA \times BH = 24.$$

$BA = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ d'où $BH = \dfrac{24}{3\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

71 **1.** $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$.

Comme I est le milieu du segment $[BC]$, alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

2. $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AI]$.

Comme le triangle ABI est rectangle en B, alors le cercle circonscrit au triangle ABI est le cercle de diamètre $[AI]$, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0$.

74 **1.** Dans un repère orthonormé du plan, les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.

$\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$= \frac{1}{2}((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2))$

$= \frac{1}{2}(2xx'+2yy') = \vec{u}\cdot\vec{v}$

2. En utilisant la formule précédente avec les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, on obtient :

$-\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

3. En utilisant la formule précédente avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on obtient :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2)$

Comme $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.

85 **1.** On conjecture que $\theta = 90°$.

2. a. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= -l^2+0+0+\frac{1}{2}L^2$

$= -l^2+\frac{1}{2}L^2$

b. $\theta = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow -l^2+\frac{1}{2}L^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{l^2}{L^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{l}{L} = \sqrt{2}$

3. Pour $l = 29{,}7$ et $L = 21$, alors $\frac{l^2}{L^2} \approx 2{,}0002$,

donc $\frac{l^2}{L^2} \neq 2 \Leftrightarrow \frac{l}{L} \neq \sqrt{2}$, donc $\theta \neq 90°$.

Ainsi, le logiciel ne met pas le symbole de l'angle droit car les droites ne sont pas perpendiculaires.

Chapitre 8

2 Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Par lecture graphique, on a :

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_1} = 2\times 1+(-1)\times 2 = 2-2 = 0$.

Donc $\vec{n_1}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_2} = 2\times 0+(-1)\times(-4) = 0+4 = 4$.

Donc $\vec{n_2}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{n_3}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_3} = 2\times 2+(-1)\times 4 = 4-4 = 0$.

Donc $\vec{n_3}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{n_4}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_4} = 2\times(-1)+(-1)\times(-1) = -2+1 = -1$.

Donc $\vec{n_4}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{n_5}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_5} = 2\times 0+(-1)\times 2 = 0-2 = -2$.

Donc $\vec{n_5}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

$\vec{n_6}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\vec{n_6} = 2\times(-1)+(-1)\times(-2) = -2+2 = 0$.

Donc $\vec{n_6}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

7 **1.** Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ donc $-b = -3$, soit $b = 3$ et $a = 5$.

Corrigés

Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Par lecture des coefficients, $a = 3$ et $b = 2$.

Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9 **1.** $\Delta : 8x - 9y + 26 = 0$

2. $\Delta : y + 4 = 0$

3. $\Delta : \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - 3 = 0$

4. $\Delta : x - y - 7 = 0$

14 $\Delta : 2x + y = 0$ et $2 \times (-2) + 5 \neq 0$, donc E n'appartient pas à Δ.

20 **1.** $x = \frac{3}{10}$

2. $x = -\frac{1}{2}$

3. $x = -\frac{3}{2}$

4. $x = \frac{7}{12}$

5. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

29 $y = -4x^2 + 4x - 1$

39 **1.** $x^2 + 3x + y^2 - 7y = 0$

2. $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 8 = 0$

3. $x^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}x + y^2 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0$

49 **1.** Centre $A(3\,;0)$ et rayon 5 unités de longueur.

2. Centre $A(3\,;0)$ et rayon 5 unités de longueur.

3. Centre $A(5\,;-10)$ et rayon 11 unités de longueur.

4. Centre $A(-2\,;4)$ et rayon 2 unités de longueur.

61 Une équation de la parabole est du type $y = ax^2 + bx + c$.
S appartient à la parabole, donc $0 + 0 + c = 4$, soit $c = 4$.
S est le sommet, donc $\frac{-b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.
Enfin A appartient à la parabole,
donc $a + c = 2 \Leftrightarrow a = -2$.
Donc une équation cartésienne de la parabole est $y = -2x^2 + 4$.

68 **1.** A appartient à (Ox), donc son ordonnée est nulle.
A appartient à d, donc $2x_A - 0 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_A = \frac{1}{4}$.
Soit $A\left(\frac{1}{4};0\right)$.

2. B appartient à (Ox), donc $B(1\,;0)$.

3. Soit $H(x\,;y)$ le projeté orthogonal de B sur d.
$\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de d.
On a en particulier $(x-1)\times 1 + y \times 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$.

On résout le système $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{10} \end{cases}$

H est le milieu de $[BB']$, ce qui équivaut à :
$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}(x_B + x_{B'}) \Leftrightarrow x_{B'} = -\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{10} = \frac{1}{2}(y_B + y_{B'})$
$\Leftrightarrow y_{B'} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

4. Δ est la droite (AB').
$M(x\,;y)$ appartient à $\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB'}$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{5} - y \times\left(-\frac{9}{20}\right) = 0 \Leftrightarrow 12x + 9y - 3 = 0$

70 Soit $H(x\,;y)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
$\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
On a en particulier :
$(x-1)\times(-1) + (y-2)\times 1 = 0 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0$.

On résout le système $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Le cercle passe par A et H, donc son centre est le milieu I du segment $[AH]$.

On a alors $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_A + x_H) \\ y_1 = \frac{1}{2}(y_A + y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}$

Le rayon vaut $\frac{AH}{2}$, avec :
$AH = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, soit $\sqrt{2}$ unités de longueur.
Une équation du cercle est donc $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$.

79 $M(x\,;y)$ appartient à la parabole et à la droite si et seulement si $\begin{cases} y = mx^2 - 2x + 4 \\ y = 2m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 - 2x + 4 - 2m = 0 \\ y = 2m \end{cases}$

On considère l'équation $mx^2 - 2x + 4 - 2m = 0$.
$\Delta = 8m - 12$.
• $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$. L'équation n'admet pas de solution, donc il n'y a aucun point d'intersection entre la parabole et la droite.

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. L'équation admet une solution, donc il y a un point d'intersection entre la parabole et la droite.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. L'équation admet deux solutions, donc il y a deux points d'intersection entre la parabole et la droite.

90 **1.** A appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$a \times 1^2 + b \times 1 + c = -1 \Leftrightarrow a + b + c = -1.$$

B appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 9 \Leftrightarrow a - b + c = 9.$$

C appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$a \times 3^2 + b \times 3 + c = 5 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 5.$$

D'où le système $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$

2. On ajoute les lignes 1 et 2 du précédent système (L1 + L2).

3. On obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 3a + 3b + 3c = -3 \\ 2a + 2c = 8 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

4. On a soustrait la ligne 3 à la ligne 1 (L1 – L3).

5. et **6.** $\begin{cases} 3a + 3b + 3c = -3 \\ 2a + 2c = 8 \\ -6a + 2c = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b + 3c = -3 \\ 2a + 2c = 8 \\ 8a = 16 \quad (\text{L2} - \text{L3}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3b + 3c = -3 \\ c = 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 2 \\ a = 2 \end{cases}.$$

7. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $y = 2x^2 - 5x + 2$.

97 **1.** $x^2 + y^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Cette équation est celle d'un cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Le milieu de $[CD]$ a ces mêmes coordonnées. Réponse **a**.

2. On reconnaît l'écriture de l'égalité $DM^2 = AM^2$. Réponse **d**.

98 **1.** Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, un vecteur normal à $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Réponse **b**.

2. Réponse **c**.

3. Réponse **c**.

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0,5 \times 4 + (-8) \times (-0,2) = 2 + 1,6 \neq 0$.

$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow 0,5 \times (-0,2) - (-8) \times 4 = -0,1 + 32 \neq 0$.

Réponse **c**.

5. Réponse **c**.

Chapitre 9

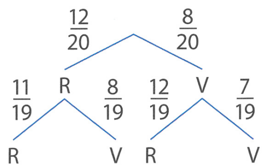
5 **1.** Un nougat ayant été pris, il ne reste plus que 30 caramels et 19 nougats. La probabilité de choisir un caramel est alors $\frac{30}{49}$.

2. Un nougat ayant été pris, il ne reste plus que 30 caramels et 19 nougats. La probabilité de choisir un nougat est alors $\frac{18}{49}$.

7 **1.** $P(\text{C} \cap \text{A}) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

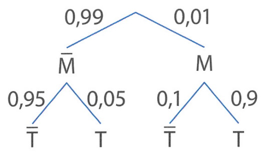
2. $P_{\text{C}}(\text{A}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

13 **1.**



2. $P(\text{V} \cap \text{R}) + P(\text{R} \cap \text{V}) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} + \frac{12}{20} \times \frac{8}{19} = \frac{48}{95}$

18 **1.**



2. Les évènements M et $\overline{\text{M}}$ forment une partition de l'univers, alors, d'après la formule des probabilités totales on a :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$\quad = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,05 = 0,0585$

3. $P_{\overline{\text{T}}}(\text{M}) = \frac{P(\overline{\text{T}} \cap \text{M})}{P(\overline{\text{T}})} = \frac{0,01 \times 0,1}{1 - 0,0585} = \frac{2}{1883} \approx 0,001$

27 **1.** $P(\text{A}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $P(\text{B}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

$P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{3}{10}$ et $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{10}$ donc les évènements ne sont pas indépendants.

2. $P(\text{A}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{C}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

$P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{1}{10}$ et $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{10}$

donc les évènements ne sont pas indépendants.

3. On peut choisir l'évènement D : « Obtenir un a ».

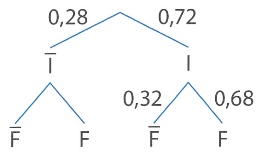
On a $P(\text{D}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$P(\text{D} \cap \text{B}) = \frac{1}{10} = P(\text{D} \cap \text{C})$ et $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$, donc l'évènement D est bien indépendant des évènements B et C.

Corrigés

31 On a $P(A) = 0{,}12 + 0{,}48 = 0{,}6$ et, d'après le tableau, $P(A \cap E) = 0{,}12$.
Les évènements A et E étant indépendants, on a $P(A \cap E) = P(A) \times P(E)$, d'où $P(E) = \frac{0{,}12}{0{,}6} = 0{,}2$.
Alors $P(\bar{A} \cap E) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08$.
$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0{,}8$ alors $P(\bar{A} \cap \bar{E}) = 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}32$.

41 On peut représenter la situation par un arbre pondéré. On note I l'évènement « Le client a acheté le billet par internet » et F l'évènement « Le client est une femme ».



a. D'après l'énoncé, on a $P_F(I) = \frac{4}{5}$,
donc $\frac{P(F \cap I)}{P(F)} = \frac{4}{5} = 0{,}8$
et $P(F \cap I) = 0{,}72 \times 0{,}68 = 0{,}4896$,
alors $P(F) = \frac{0{,}4896}{0{,}8} = 0{,}612$.

b. $P_{\bar{F}}(I) = \frac{P(\bar{F} \cap I)}{P(\bar{F})} = \frac{0{,}72 \times 0{,}32}{1 - 0{,}612} = \frac{0{,}2304}{0{,}388} = \frac{288}{485} \approx 0{,}59$

43 **1.** Étant donné qu'il s'agit d'un tirage avec remise, les tirages sont indépendants.

2. On peut faire un tableau à double entrée contenant la somme et le produit des nombres.

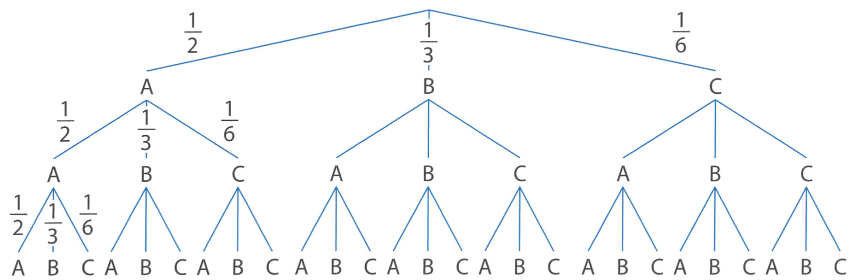
Somme ; produit	1	2	3	4	5
1	2 ; 1	3 ; 2	4 ; 3	5 ; 4	6 ; 5
2	3 ; 2	4 ; 4	5 ; 6	6 ; 8	7 ; 10
3	4 ; 3	5 ; 6	6 ; 9	7 ; 12	8 ; 15
4	5 ; 4	6 ; 8	7 ; 12	8 ; 16	9 ; 20
5	6 ; 5	7 ; 10	8 ; 15	9 ; 20	10 ; 25

$P(P) = \frac{8}{25}$; $P(S) = \frac{12}{25}$; $P(P \cap S) = \frac{4}{25}$
et $\frac{8}{25} \times \frac{12}{25} = \frac{96}{625} \neq \frac{4}{25}$, donc les évènements ne sont pas indépendants.

50 **1. a.** $P(B) = 0{,}36$ **b.** $P(\bar{F}) = 0{,}48$
c. $P_F(S) = \frac{0{,}26}{0{,}49} = \frac{26}{49}$ **d.** $P_D(\bar{F}) = \frac{0{,}09}{0{,}15} = \frac{3}{5}$
e. $P(F \cap S) = 0{,}26$
f. $P(\bar{F} \cup D) = P(\bar{F}) + P(D) - P(\bar{F} \cap D)$
$= 0{,}48 + 0{,}15 - 0{,}09 = 0{,}54$

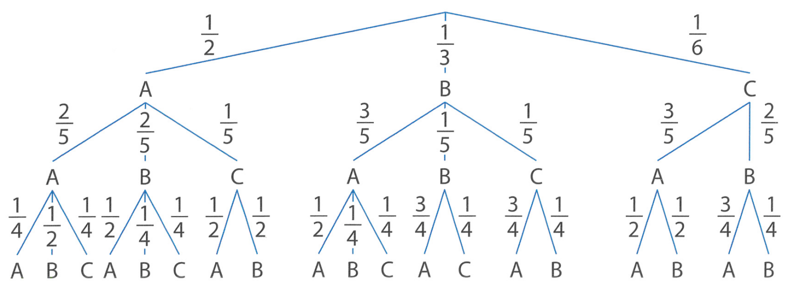
2. $P(F) = 0{,}52$; $P(B) = 0{,}36$; $P(F \cap B) = 0{,}20$.
$0{,}52 \times 0{,}36 = 0{,}1872 \neq 0{,}20$, donc les évènements ne sont pas indépendants.

59 **1. a.** Il s'agit d'un tirage avec remise, donc c'est une succession d'épreuves indépendantes et les probabilités sur les branches sont les mêmes à chaque étape.



b. $P(BAC) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ **c.** $P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{103}{216} \approx 0{,}48$

2. a.



b. $P(BAC) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c. $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

3. Comme $\frac{1}{36}<\frac{1}{20}$, alors la probabilité d'obtenir les lettres B, A, C dans cet ordre est plus grande lors d'un tirage sans remise et c'est donc ce type de tirage qu'il faut choisir pour avoir le maximum de chances.

Chapitre 10

1 **1.** L'ensemble des valeurs prises par G est $\{-4\,;5\}$.

2. Les issues réalisant l'évènement $\{G=-4\}$ sont 1, 2, 4 et 5.

3. Les issues réalisant l'évènement $\{G>0\}$ sont 3 et 6.

3 $P(X \leqslant 7) = 1 - P(X=10) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$P(X<5) = P(X=-2)+P(X=3)+P(X=4)$
$= 0{,}24 + 0{,}12 + 0{,}2 = 0{,}56$

7 **1.**

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

2. Loi de probabilité de la variable aléatoire S.

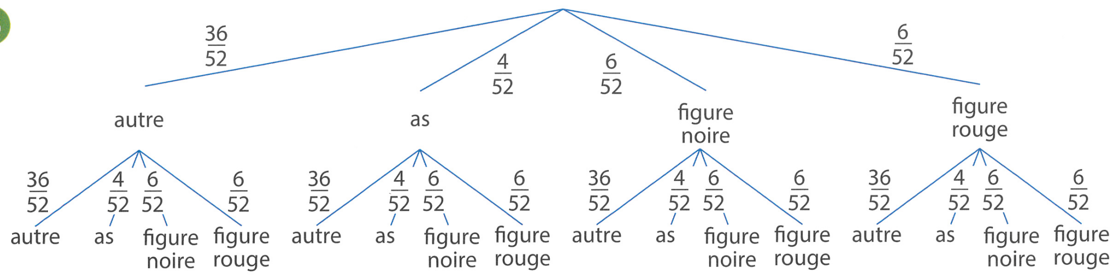
s_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(S=s_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

24 $E(X) = 0\times\frac{21}{32}+2\times\frac{6}{32}+4\times\frac{5}{32}=1$

$V(X) = \frac{21}{32}\times(0-1)^2+\frac{6}{32}(2-1)^2+\frac{5}{32}(4-1)^2 = 2{,}25$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

36



Soit X le gain algébrique d'un joueur. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant.

x_i	6	5	8	2,50	4	7	1,50	10	4,50	–1
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{676}$	$\frac{9}{338}$	$\frac{3}{169}$	$\frac{27}{169}$	$\frac{9}{676}$	$\frac{3}{169}$	$\frac{27}{169}$	$\frac{1}{169}$	$\frac{18}{169}$	$\frac{81}{169}$

On a donc :

$$E(X) = 6\times\frac{9}{676}+5\times\frac{9}{338}+8\times\frac{3}{169}+2{,}50\times\frac{27}{169}+4\times\frac{9}{676}+7\times\frac{3}{169}+1{,}50\times\frac{27}{169}+10\times\frac{1}{169}$$
$$+4{,}50\times\frac{18}{169}-1\times\frac{81}{169}=\frac{16}{13}\approx 1{,}23.$$

$E(X)>0$, donc on a intérêt à jouer à ce jeu (favorable au joueur).

47 **1.** $P(\mathrm{T}) = \frac{10\ 500}{15\ 000} = 0{,}7$

$P(\overline{\mathrm{T}}\cap \mathrm{B}) = P(\overline{\mathrm{T}})\times P_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{B}) = 0{,}3\times\frac{450}{15\ 000-10\ 500}=0{,}03$

$P(\mathrm{T}\cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{T})\times P_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}) = 0{,}7\times 0{,}3 = 0{,}21$

2. $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{T}\cap\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{T}}\cap\mathrm{B}) = 0{,}21+0{,}03 = 0{,}24$

3. a. S peut prendre les valeurs 50, 20, 70 et 0.

b. Loi de probabilité de S

s_i	50	20	70	0
$P(S=s_i)$	0,49	0,03	0,21	0,27

c. $E(S) = 50\times0{,}49+20\times0{,}03+70\times0{,}21+0\times0{,}27$
$= 35{,}3$

Dans cette ville, les familles reçoivent en moyenne 35,30 €.

Programme

Préambule

Intentions majeures

La classe de première générale est conçue pour préparer au baccalauréat général, et au-delà à une poursuite d'études réussie et à l'insertion professionnelle. L'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première générale est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis de la seconde, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- préparer au choix des enseignements de la classe de terminale : notamment choix de l'enseignement de spécialité de mathématiques, éventuellement accompagné de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes, ou choix de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires.

Le programme de mathématiques définit un ensemble de connaissances et de compétences, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de seconde dans un souci de cohérence, en réactivant les notions déjà étudiées et y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

• Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il importe de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul numérique et du calcul littéral, sous ses diverses formes : mentale, écrite, instrumentée.

• Utilisation de logiciels

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, favorise l'interaction entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.
L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques en classe, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

• Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : devoirs surveillés avec ou sans calculatrice, devoirs en temps libre, rédaction de travaux de recherche individuels ou collectifs, travaux pratiques pouvant s'appuyer sur des logiciels, exposé oral d'une solution.

• Place de l'oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales à travers notamment la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs… L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul). Si ces considérations sont valables pour tous les élèves, elles prennent un relief particulier pour ceux qui choisiront les mathématiques comme enseignement de spécialité en terminale et qui ont à préparer l'épreuve orale terminale du baccalauréat. Il convient que les travaux proposés aux élèves y contribuent dès la classe de première.

• Trace écrite

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin, tout au long du cycle terminal. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (conjecture, définition, propriété – admise ou démontrée –, démonstration, théorème).

• Travail personnel des élèves

Si la classe est le lieu privilégié pour la mise en activité mathématique des élèves, les travaux hors du temps scolaire sont indispensables pour consolider les apprentissages. Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, ces travaux sont essentiels à la formation des élèves. Individuels ou en groupe, évalués à l'écrit ou à l'oral, ces travaux sont conçus de façon à prendre en compte la diversité des élèves et permettent le développement des qualités d'initiative tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences.

Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.
L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.
Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel, en prenant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ils doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme.
Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :
• les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
• les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
• les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
• les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
• les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
• les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

Le programme s'organise en cinq grandes parties : « Algèbre », « Analyse », « Géométrie », « Probabilités et statistiques » et « Algorithmique et programmation ». Ce découpage n'est pas un plan de cours et il est essentiel d'exploiter les possibilités d'interaction entre ces parties.
Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison…
Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires. Ils permettent une différentiation pédagogique.
Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur pourra, s'il le désire, s'appuyer sur l'étude de textes historiques.

Algèbre

Objectifs

En classe de première, les suites sont présentées d'un point de vue principalement algébrique. L'objectif est que l'élève soit confronté à des systèmes discrets pour lesquels les suites numériques apparaissent comme modélisation adaptée. C'est aussi l'occasion d'aborder le concept de définition par récurrence.
L'élève rencontre différents modes de génération de suites :

- par une formule explicite $u_n = f(n)$;
- par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$;
- par des motifs géométriques ou combinatoires, par exemple suite de nombres figurés, suite décrivant le nombre d'éléments dans une configuration dépendant d'un entier naturel.

Les suites arithmétiques et géométriques sont formalisées. D'autres types simples peuvent être abordés, mais aucune connaissance spécifique à leur sujet n'est au programme.
Dans tous les cas, on peut s'intéresser au passage d'un mode de génération à un autre, et notamment à la recherche d'une formule explicite pour une suite définie d'une autre façon.
Les suites interviennent comme modélisations d'évolutions à temps discret rencontrées dans les autres disciplines : évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une population, décroissance radioactive. C'est l'occasion de réactiver le travail sur l'information chiffrée fait en classe de seconde, notamment sur le taux d'évolution. L'élève doit automatiser le fait qu'une évolution à taux fixe est modélisée par une suite géométrique et percevoir l'intérêt de considérer le rapport de deux termes consécutifs. Lors de l'étude ultérieure de la fonction exponentielle, on réactive le travail sur les suites géométriques en mettant en parallèle évolution géométrique à temps discret et évolution exponentielle à temps continu.
L'étude des suites est l'occasion d'une sensibilisation à l'idée de limite. Toute formalisation est exclue, mais sur des exemples, on s'attachera à en développer une intuition en s'appuyant sur des calculs numériques, des algorithmes de recherche de seuil.
L'étude des fonctions polynômes du second degré réactive les connaissances acquises en seconde (fonction carré, identités remarquables) qu'elle permet de consolider. Il est important de diversifier les registres (algébrique, graphique) et de mettre en valeur les interactions avec l'ensemble du programme : problèmes variés, notamment d'origine géométrique, se ramenant à une équation du second degré ou à l'étude d'une fonction polynôme du second degré (optimisation, variations).
On illustre avec les fonctions polynômes du second degré des notions générales sur les fonctions (taux de variation, calcul de la fonction dérivée, position du graphe de $x \mapsto f(x-m)$) et on fait le lien avec la variance en probabilités et statistique.
Les élèves doivent savoir qu'une fonction polynôme du second degré admet une forme canonique, et être capables de la déterminer dans des cas simples à l'aide de l'identité $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$ (méthode de complétion du carré). Le calcul effectif de la forme canonique dans le cas général n'est pas un attendu du programme.
Les élèves sont entraînés à reconnaître et pratiquer la factorisation directe dans les cas qui s'y prêtent : racines apparentes, coefficient de x nul, racines entières détectées par calcul mental à partir de leur somme et de leur produit.

Histoire des mathématiques

Bien avant de faire l'objet d'une étude formalisée, les suites apparaissent dans deux types de situations :

- approximation de nombres réels (encadrement de π par Archimède, calcul de la racine carrée chez Héron d'Alexandrie) ;
- problèmes de comptage (les lapins de Fibonacci…).

Les problèmes décrits dans les livres de Fibonacci, ou chez les savants arabes qui le précèdent, se modélisent avec des suites. Oresme calcule des sommes de termes de suites géométriques au XIVe siècle.
On trouve chez Diophante, puis chez Al-Khwârizmî, des méthodes de résolutions d'équations du second degré. Le travail novateur d'Al-Khwârizmî reste en partie tributaire de la tradition (utilisation de considérations géométriques équivalentes à la forme canonique) et de l'état alors embryonnaire de la notation algébrique, ainsi que de l'absence des nombres négatifs. Les méthodes actuelles sont un aboutissement de ce long cheminement vers un formalisme efficace et concis.

1 Suites numériques, modèles discrets

Contenus

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations : $u(n)$, u_n, $(u(n))$, (u_n).
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + \ldots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + \ldots + q^n$.
- Sens de variation d'une suite.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

Capacités attendues

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Démonstrations

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + \ldots + n$.
- Calcul de $1 + q + \ldots + q^n$.

Exemples d'algorithme

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Approfondissements possibles

- Tour de Hanoï.
- Somme des n premiers carrés, des n premiers cubes.
- Remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

2 Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration

- Résolution de l'équation du second degré.

Approfondissements possibles

- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$, de $x^n - a^n$ par $x - a$.
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - sx + p$.

Analyse

Objectifs

Deux points fondamentaux du programme de première sont ici étudiés : le concept de dérivée, avec ses applications à l'étude des fonctions, et la fonction exponentielle.
L'étude de la dérivation distingue le point de vue local (nombre dérivé) et le point de vue global (fonction dérivée). Les fonctions étudiées sont toutes régulières et le nombre dérivé est introduit à partir de la perception intuitive de la limite du taux de variation. On n'en donne pas de définition formelle, mais on s'appuie sur :

- des représentations graphiques fournies par les outils logiciels (calculatrice, tableur, logiciel de géométrie dynamique) ;
- le calcul algébrique du taux de variation dans des cas qui s'y prêtent : fonctions du second degré, fonction inverse ;
- le calcul numérique d'expressions $f(a + h) - f(a)$, où h prend des valeurs proches de 0, faisant apparaître une approximation linéaire, par exemple avec $a = 1$ et f étant une des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Il est intéressant d'exploiter ces divers registres dans l'étude d'un même nombre dérivé.
Taux de variation et nombre dérivé gagnent à être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente ;
- en cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.

Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution.
Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières).

En liaison avec les autres disciplines, on peut signaler et utiliser la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour un taux de variation et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour une dérivée ; si $y = f(x)$, on peut ainsi écrire $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$, en adaptant selon le contexte : $x = f(t)$, $q = f(t)$…

Histoire des mathématiques

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation).
Le développement d'un calcul des variations chez Leibniz et Newton se fonde sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations. Leurs approches partent de notions intuitives mais floues d'infiniment petit. Ce n'est que très progressivement que les notions de limites et de différentielles, qui en fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au XIXe siècle.
La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVIIe siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.
La trigonométrie a été utilisée chez les Anciens dans des problèmes de natures diverses (géométrie, géographie, astronomie). Elle est à l'époque fondée sur la fonction corde, d'un maniement bien moins facile que les fonctions sinus et cosinus de la présentation actuelle.

1 Dérivation

Contenus

Point de vue local

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Démonstrations

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.

Exemple d'algorithme

- Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

2 Variations et courbes représentatives des fonctions

Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Newton, en se limitant à des cas favorables.

3 Fonction exponentielle

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.
- Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Approfondissements possibles

- Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

4 Fonctions trigonométriques

Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

Démonstration

- Calcul de $\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Géométrie

Objectifs

L'étude de la géométrie plane menée au collège et en seconde a familiarisé les élèves à la géométrie de configuration, au calcul vectoriel et à la géométrie repérée.
En première, on poursuit l'étude de la géométrie plane en introduisant de nouveaux outils. L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

- donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique (produit scalaire) ;
- enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

Les élèves doivent conserver une pratique du calcul vectoriel en géométrie non repérée.

Histoire des mathématiques

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparaît chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIX^e siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique.
Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.
Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre AB comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVII^e siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

1 Calcul vectoriel et produit scalaire

Contenus

- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Capacités attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

Démonstrations

- Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (démonstration avec le produit scalaire).

Approfondissements possibles

- Loi des sinus.
- Droite d'Euler d'un triangle.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

2 Géométrie repérée

Dans cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Contenus

- Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées $(a\ ;\ b)$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.
- Équation de cercle.
- Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.

Capacités attendues

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.
- Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

Approfondissements possibles

- Recherche de l'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point donné.
- Déterminer l'intersection d'un cercle ou d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec une droite parallèle à un axe.

Probabilités et statistiques

Objectifs

L'enseignement dispensé en classe de seconde a abordé le modèle probabiliste, dans le cas d'un univers fini. En première, on développe l'étude de ce modèle. L'enseignement s'organise autour des buts suivants :

- introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;
- formaliser la notion d'indépendance ;
- introduire la notion de variable aléatoire, en lien étroit avec les applications des probabilités ;
- introduire les notions d'espérance, de variance et d'écart type d'une variable aléatoire.

Comme en seconde, on distingue nettement modèle et réalité. Ainsi, une hypothèse d'indépendance fait partie d'un modèle : elle peut être un point de départ théorique ou être la conséquence d'autres hypothèses théoriques. Lorsque le modèle est appliqué à une situation réelle (par exemple, lancer de deux dés physiques), l'indépendance fait partie de la modélisation et résulte de l'analyse de la situation physique.

Les notions de statistique descriptive vues en seconde sont articulées avec le cours de probabilités. Une population statistique peut être étudiée d'un point de vue probabiliste en considérant l'expérience aléatoire de tirage au sort avec équiprobabilité dans la population. Un lien est ainsi fait entre des notions statistiques (sous-population, proportion, moyenne, écart type) et les notions probabilistes analogues (évènement, probabilité, espérance, écart type). La notion de fréquence conditionnelle ne fait pas l'objet d'une étude, mais on donne des situations de calcul de probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé d'effectifs. Les arbres pondérés sont introduits à partir des arbres de dénombrements vus en seconde.

Histoire des mathématiques

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais ; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIIIe siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

L'histoire des probabilités contribue à la réflexion sur la codification d'une théorie scientifique. On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

1 Probabilités conditionnelles et indépendance

Contenus

- Probabilité conditionnelle d'un évènement B sachant un évènement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux évènements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'évènements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

Capacités attendues

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Monte-Carlo : estimation de l'aire sous la parabole, estimation du nombre π.

Approfondissements possibles

- Exemples de succession de plusieurs épreuves indépendantes.
- Exemples de marches aléatoires.

2 Variables aléatoires réelles

Le programme ne considère que des univers finis et des variables aléatoires réelles.
L'objectif est simultanément de développer une intuition autour de l'idée de nombre dépendant du hasard et de formaliser la notion mathématique de variable aléatoire comme fonction numérique définie sur un univers, permettant d'affecter des probabilités aux valeurs possibles de la variable.

Contenus

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Capacités attendues

- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable…).

Exemples d'algorithmes

- Algorithme renvoyant l'espérance, la variance ou l'écart type d'une variable aléatoire.
- Fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné, en français, en anglais.

Approfondissements possibles

- Formule de König-Huygens.
- Pour X variable aléatoire, étude de la fonction du second degré $x \mapsto E((X - x)^2)$.

Expérimentations

Le travail expérimental de simulation d'échantillons prolonge celui entrepris en seconde. L'objectif est de faire percevoir le principe de l'estimation de l'espérance d'une variable aléatoire, ou de la moyenne d'une variable statistique dans une population, par une moyenne observée sur un échantillon.

- Simuler une variable aléatoire avec Python.
- Lire, comprendre et écrire une fonction Python renvoyant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire.
- Étudier sur des exemples la distance entre la moyenne d'un échantillon simulé de taille n d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.
- Simuler, avec Python ou un tableur, N échantillons de taille n d'une variable aléatoire, d'espérance μ et d'écart type σ. Si m désigne la moyenne d'un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

Algorithmique et programmation

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. La classe de seconde a permis de consolider les acquis du cycle 4 autour de deux idées essentielles :

- la notion de fonction ;
- la programmation comme production d'un texte dans un langage informatique.

L'enseignement de spécialité de mathématiques de classe de première vise la consolidation des notions de variable, d'instruction conditionnelle et de boucle ainsi que l'utilisation des fonctions. La seule notion nouvelle est celle de liste qui trouve naturellement sa place dans de nombreuses parties du programme et aide à la compréhension de notions mathématiques telles que les suites numériques, les tableaux de valeurs, les séries statistiques…
Comme en classe de seconde, les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. Les notions relatives aux types de variables et à l'affectation sont consolidées. Comme en classe de seconde, on utilise le symbole « ← » pour désigner l'affection dans un algorithme écrit en langage naturel.
L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.

Histoire des mathématiques

De nombreux textes témoignent d'une préoccupation algorithmique au long de l'Histoire. Lorsqu'un texte historique a une visée algorithmique, transformer les méthodes qu'il présente en un algorithme, voire en un programme, ou inversement, est l'occasion de travailler des changements de registre qui donnent du sens au formalisme mathématique.

Notion de liste

La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique. Afin d'éviter des confusions, on se limite aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Capacités attendues

- Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension).
- Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer…) et leurs indices.
- Parcourir une liste.
- Itérer sur les éléments d'une liste.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.
Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple et celle de produit cartésien de deux ensembles.
Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation $\overline{A}$ des probabilités, ou la notation $E \setminus A$.
Les élèves apprennent en situation à :

- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ;
- utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ;
- formuler la négation de propositions quantifiées.

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

Index

Crédits photographiques

p. 6 : Régis Domergue/Biosphoto ; p. 8 : Orbon Alija/Getty ; p. 9 : Denis Bringard/Biosphoto ; p. 20 : pikselstock/Shuuterstock ; p. 21 h : BortN66/Shutterstock ; p. 21 b : pikselstock/Shutterstock ; p. 28 : pikselstock/Shutterstock ; p. 32 : Popartic/Shutterstock ; p. 35 g : Laurent GRANDGUILLOT/REA ; p. 35 d : Design Pics/Photononstop ; p. 37 : Environmental Images/UIG/Photononstop ; p. 39 : iStock/Getty Images Plus ; p. 40 : Adam Gault/Caiaimages/Photononstop ; p. 42 : Natalia Mels/Shutterstock ; p. 44 : Ngukiaw/Shutterstock ; p. 46 : JL. Klein & ML. Hubert/Naturagency ; p. 47 : Didier MAILLAC/REA ; p. 69 : Pete Saloutos/Getty ; p. 70 : Lucas Vallecillos/AGE ; p. 73 : PixieMe/Shutterstock ; p. 74 : Angellodeco/Shutterstock ; p. 75 : Imagenavi/AGE ; p. 76 : Everyonephoto Studio/Shutterstock ; p. 77 : Collection particulière ; p. 78 : iStock/Getty Images Plus ; p. 104 : Werner Heiber/AGE ; p. 110 : Alamer/Iconotec/Photononstop ; p. 112 : GibsonPictures/Getty ; p. 113 : t_kimura/Getty ; p. 122 : Eric Audras/Onoky/Photononstop ; p. 127 : Ekaterina79/Getty ; p. 129 : CSP_SafakOguz/AGE ; p. 134 : Glenn Bartley/BIA/Minden Pictures/Biosphoto ; p. 135 : Paul-André Coumes/Biosphoto ; p. 136 : Mike Brinson/Getty ; p. 142 : Sharon Green/Flirt/Photononstop ; p. 144 : Patrick Llewelyn-Davies/Ojo Images/Photononstop ; p. 156 h : JUICE IMAGES/BSIP ; p. 156 b : RIEGER Bertrand/hemis.fr ; p. 167 : AntonioGuillem/AGE ; p. 170 : NICOLAS José/hemis.fr ; p. 174 : Thapana Apisariyakul/Shutterstock ; p. 176 : Minden/hemis.fr ; p. 196 : Julien Thomazo/Photononstop ; p. 198 : Marcos Welsh/AGE ; p. 199 : 5nikolas5/Shutterstock ; p. 200 g : Ian HANNING/REA ; p. 201 g : Dennis MacDonald/AGE ; p. 201 d : Westend 61/hemis.fr ; p. 202 : Eric Audras/Onoky/Photononstop ; p. 203 g : evgeny kondrashov/Shutterstock ; p. 203 d : Martin Diebel/AGE ; p. 206 g : Collection particulière ; p. 206 d : Bianchetti/Leemage/AFP ; p. 209 : Charlie Abad/Photononstop ; p. 225 : E.Perrin/Novapix/Leemage ; p. 229 : Viktor1/Shutterstock ; p. 232 : Fraser Hall/Getty ; p. 234 : Luckykot/Shutterstock ; p. 235 : Christian Zappel/AGE ; p. 236 : Ian HANNING/REA ; p. 240 : FabrikaSimf/Shutterstock ; p. 253 : Carlos Caetano/Shutterstock ; p. 257 : Thomas Dressler/imageBROKER/AGE ; p. 260 g : CULTURA/IMAGE SOURCE/BSIP ; p. 260 d : HAUSER Patrice/hemis.fr/Hemis/AFP ; p. 264 : al7/Shutterstock ; p. 267 : Photo12/Alamy ; p. 272 : Vira Mylyan-Monastyrska/Shutterstock ; p. 274 : Dulsita/AGE ; p. 275 : Pascal SITTLER/REA ; p. 292 : LWA-Dann Tardif/Flirt/Photononstop ; p. 293 : Hero Images/Getty ; p. 296 : PASCAL PAVANI/AFP ; p. 302 : Impact Photography/Shutterstock ; p. 305 : Mouse family/Shutterstock ; p. 306 : hiv360/Shutterstock ; p. 309 : Kirilldz/Shutterstock ; p. 318 : Santypan/Shutterstock ; p. 320 : Jon Feingersh/AGE ; p. 322 : Mint Images/AGE ; p. 324 : Joanna Dorota/Shutterstock ; p. 326 g : Dorling Kindersley/Getty ; p. 326 d : Ian HANNING/REA ; p. 328 : Viktor Fedorenko/Shutterstock ; p. 331 g : Daniel Thierry/Photononstop ; p. 331 d : Valentina Barreto/AGE ; p. 332 g : Christian Grau/Shutterstock ; p. 332 d : Vgajic/Getty ; p. 333 h : Oleg_P/Shutterstock ; p. 333 b : Bardocz Peter/Shutterstock ; p. 334 g : wavebreakmedia/Shutterstock ; p. 334 d : FooTToo/Shutterstock ; p. 337 : RIEGER Bertrand/hemis.fr.

Les copies d'écran sont issues des logiciels Excel, GeoGebra et de l'environnement EduPython.
Merci aux sociétés Casio et Texas Instruments pour la fourniture d'émulateurs de calculatrices.

Achevé d'imprimer en France par Pollina - 12586
Dépôt légal : Mai 2019 - Collection n° 65 - Édition 01 - 76/8750/9