Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Calculer le plus rapidement possible.

1. $\frac{2}{3}\times 8+\frac{1}{3}+5$
2. $1-\frac{3}{10}-\frac{1}{5}$
3. $\frac{1}{3}\times 0{,}3+\frac{1}{6}\times 0{,}36+(-0{,}4)$
4. $\sqrt{\frac{1}{4}(19-5)^2+\frac{3}{4}(5-5)^2}$

2 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	1	3
$P(X=x_i)$	k	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$

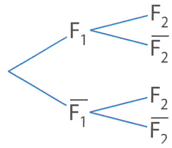
- Que vaut k ?

3 Un jeu donne une répartition des gains selon les probabilités suivantes.

Gain	$+5$	0	-2
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$

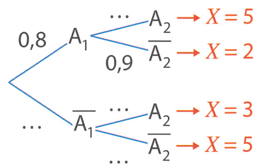
- Ce jeu est-il équitable ?

4 On lance deux fois successivement une pièce équilibrée. On appelle X le nombre de « Face » obtenues.



- Déterminer la loi de probabilité de X.

5 Compléter l'arbre pondéré suivant sachant que $P(X=5)=0{,}18$.



DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

6 « Rien ne sert de courir, il faut partir à point. »

On écrit chaque mot de cette citation sur un carton. On place tous les cartons dans une urne et on tire au hasard un de ces cartons.

- À ce jeu, combien de lettres en moyenne peut-on espérer obtenir sur le carton tiré ?

7 La loi de probabilité d'une variable aléatoire S est donnée dans le tableau suivant.

s_i	-2013	0	2015
$P(S=s_i)$	$\frac{234}{728}$	$\frac{260}{728}$	$\frac{234}{728}$

- Quelle est son espérance ?

8 Un jeu équitable (c'est-à-dire dont l'espérance de gain est nulle) donne une répartition des gains selon les probabilités suivantes.

Gain	…	2	5
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	…

- Quelles sont les valeurs manquantes ?

9 On donne la loi de probabilité du gain X obtenu lors d'un jeu A et celle du gain Y obtenu à un jeu B.

x_i	-1	$0{,}5$	2
$P(X=x_i)$	$0{,}5$	$0{,}3$	…

y_i	$-2{,}5$	0	2
$P(Y=y_i)$	$0{,}2$	…	$0{,}4$

- À quel jeu vaut-il mieux jouer ?

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Sur un panel de 2 527 familles n'ayant que deux enfants, on note X le nombre de garçons de chaque famille. On a $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.
2. Si toutes les valeurs prises par une variable aléatoire X sont négatives, alors l'espérance de X est négative.
3. L'écart type d'une variable aléatoire est toujours inférieur à sa variance.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Axelle propose à Hapsatou de jouer au dé. Elle sort trois dés d'une boîte : un rouge, un vert et un bleu. Hapsatou s'étonne : « Tes dés sont étranges ! Le rouge a deux « 3 », deux « 4 » et deux « 8 » ! ». Axelle répond : « Oui, ils sont tous spéciaux : le vert a deux « 1 », deux « 5 » et deux « 12 », quant au bleu, il a deux « 2 », deux « 6 » et deux « 7 ». Je te propose de jouer avec : on choisit un dé, on le lance et celui qui fait le plus grand résultat a gagné. Pour te prouver que ce n'est pas truqué, je te laisse choisir ton dé en premier. »

- Que penser de la proposition d'Axelle ?

Exposé

voir p. 306

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Dans le jeu *Croix-Pile*, Nicolas Bernoulli écrit : « Pierre joue avec Paul à croix ou pile, avec cette condition que si Paul amène pile au premier coup, il donnera un écu à Pierre ; s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, deux écus ; s'il n'amène pile qu'au troisième coup, quatre écus ; au quatrième, huit écus ; au cinquième, seize. »
On suppose que les joueurs jouent en cinq coups au maximum (ils s'arrêtent après). On note X la variable aléatoire égale à la somme reçue par Pierre à la fin d'une partie.
1. Donner la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$. Que représente cette valeur pour Paul dans le contexte du problème ?
2. Plus généralement, si le nombre de coups n'est pas limité, ce jeu est à l'origine d'un phénomène appelé « Paradoxe de Saint-Pétersbourg ». Effectuer des recherches sur ce paradoxe et l'expliquer en utilisant la notion de variable aléatoire.

Exercices

Variable aléatoire et loi de probabilité

1 Un jeu consiste à lancer un dé cubique. On gagne 5 € si on obtient un multiple de 3 et on perd 4 € sinon. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire G ?
2. Donner les issues réalisant l'évènement $\{G = -4\}$.
3. Donner les issues réalisant l'évènement $\{G > 0\}$.

2 Un jeu consiste à tirer au hasard une boule dans un sac contenant 15 boules numérotées de 1 à 15. On gagne 2 € si on obtient un multiple de 2 ; 7 € si on obtient un multiple de 7 et on perd 10 € sinon.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Donner les issues réalisant l'évènement $\{X = 9\}$.
3. Donner les issues réalisant l'évènement $\{X \leqslant 0\}$.

3 X est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée dans le tableau suivant :

x_i	-2	3	4	7	10
$P(X = x_i)$	0,24	0,12	0,2	0,4	0,04

Calculer $P(X \leqslant 7)$ et $P(X < 5)$.

4 On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au double du numéro obtenu sur la face du dessus.
• Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

5 Parmi les tableaux suivants, le(s)quel(s) peuvent représenter la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	0	1,2	0,1	0,7

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	0,32	0,23	0,22	0,23

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	0,3	$-0,4$	0,8	0,3

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

6 **Beignets à la pomme**

À la boulangerie, Sandy demande à la boulangère de choisir au hasard deux beignets. Il y a six beignets à la pomme, cinq beignets choco-noisettes et neuf beignets aux fruits rouges.
On note B la variable aléatoire égale au nombre de beignets à la pomme choisis.
1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire B ?
2. Calculer $P(B = 2)$.
3. Calculer $P(B = 1)$.
4. Calculer $P(B \leqslant 1)$.

7 On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note S la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus.
1. Lister dans un tableau à double entrée tous les résultats possibles.
2. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire S.

8 Y est une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité donnée dans le tableau suivant.

y_i	-2	-1	2	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

• Déterminer $P(Y \leqslant 0)$, $P(-1 \leqslant Y \leqslant < 5)$ et $P(|Y| = 2)$.

9 Dans une urne, on place dix boules numérotées de 1 à 10. On y tire une boule au hasard et on note V la variable aléatoire égale au nombre de voyelles nécessaires pour écrire en toutes lettres le numéro de la boule tirée.
• Déterminer la loi de probabilité de V.

10 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Si on obtient une figure, on gagne 10 points, sinon, on perd la valeur de la carte.
• Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire et préciser sa loi de probabilité.

11 QCM

On lance deux fois un dé équilibré à quatre faces numérotées 1, 2, 2 et 3 et on note X la somme des deux numéros obtenus sur la face du dessous.
On dispose par ailleurs d'une urne contenant des boules numérotées 1, 2, 2 et 3 et on tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note Y la somme des deux numéros obtenus.
Pour chaque affirmation suivante, indiquer la seule proposition correcte en justifiant.

1. L'ensemble des valeurs prises par X est :
a {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} b {3 ; 4 ; 5}
c {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} d {1 ; 2 ; 3}

2. L'ensemble des valeurs prises par Y est :
a {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} b {3 ; 4 ; 5}
c {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} d {1 ; 2 ; 3}

3. La loi de probabilité de X est :

a

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

c

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

d

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

4. La loi de probabilité de Y est :

a

x_y	3	4	5
$P(X = x_y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b

x_y	2	3	4	5	6
$P(X = x_y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

c

x_y	3	4	5
$P(X = x_y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

d

x_y	2	3	4	5	6
$P(X = x_y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

12 Dans une urne contenant deux boules rouges, trois vertes et dix oranges, on tire une boule au hasard. On gagne 3 € si la boule est verte, on perd 1 € si elle est orange, et on gagne 2 € sinon. On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
• Déterminer la loi de probabilité de G.

13 Lors d'une tombola, on a une chance sur dix de gagner un lot d'une valeur de 100 € et autant de chances de gagner un lot d'une valeur de 20 € que de ne rien gagner.
On note G la variable alétoire égale au gain d'un joueur.
1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Déterminer la probabilité de gagner à ce jeu.

14 Une boîte contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules dans la boîte. On note S la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus.
1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer $P(X = 6)$.
3. Déterminer $P(X < 5)$.
4. Déterminer $P(X \geqslant 7)$.

15 Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. On tire une boule au hasard dans cette urne et on note T la variable aléatoire qui prend la valeur 5 si le numéro est un multiple de 3 et la valeur 0 sinon.
• Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T.

16 Le nombre de caisses en service à midi dans un supermarché donné est une variable aléatoire prenant les valeurs 1, 2, 3 et 4. Elle vaut :
• 1 avec la probabilité 0,2 ;
• 2 avec la probabilité 0,3 ;
• 3 avec la probabilité 0,25.
1. Calculer la probabilité que quatre caisses soit en service à midi dans ce supermarché.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux caisses en service à midi dans ce supermarché.

17 VRAI OU FAUX

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire T dans le tableau suivant.

t_i	−2	−1	3	5
$P(T = t_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. $P(T \leqslant 4) = \frac{7}{8}$ **2.** $P(T \geqslant 3) = \frac{7}{8}$

3. $P(T = 0) = 0$ **4.** $P(T > -3) = 0$

5. On ne peut pas calculer $P(T < 6)$.

18 **Raisonner, calculer**

Z est une variable aléatoire prenant les valeurs 10, 20, 30 et 40.

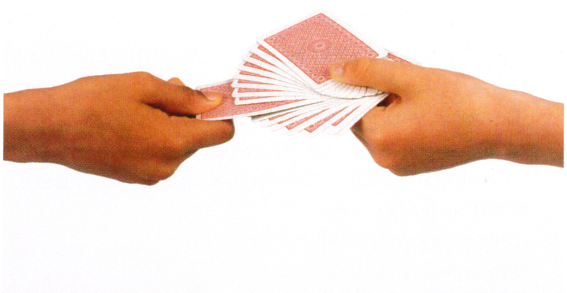
On a $P(Z=10)=P(Z=30)=\frac{1}{5}$ et $P(Z=20)=\frac{1}{2}P(Z=40)$.

• Quelle est la loi de probabilité de Z ?

19 On choisit au hasard un nombre entier entre 15 et 25 et on note S la somme des chiffres du nombre choisi.

• Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire S ?

20 **Tirage au hasard**



Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 52.

• si on tire un as, on gagne 5 € ;
• si on tire une figure, on gagne 2 € ;
• dans tous les autres cas, on perd 1 €.

• Déterminer la loi de probabilité du gain algébrique d'un joueur.

21 ALGO PYTHON

Communiquer

On s'intéresse à la fonction suivante écrite en Python.

```
from random import randint

def gain():
    tirage=randint(1,11)
    if tirage==2:
        G=3
    elif tirage==4:
        G=-5
    else:
        G=-10
    return(G)
```

• Inventer une situation dans laquelle cette fonction pourrait être utilisée.

22 Lors d'une animation dans un supermarché, on distribue 200 enveloppes contenant des bons d'achat. Deux de ces enveloppes contiennent un bon de 50 €, dix contiennent un bon de 20 € et les autres contiennent un bon de 10 €.

On interroge au hasard un client qui a obtenu une enveloppe et on note R la variable aléatoire égale au montant du bon de réduction obtenu.

• Déterminer la loi de probabilité de R.

Espérance et écart type d'une variable aléatoire

23 Un lot de dix pièces contient trois pièces défectueuses. On tire successivement et au hasard deux pièces de ce lot (sans remise). X désigne le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées.

1. Calculer l'espérance de X ainsi que son écart type.

2. Quelle est la probabilité que parmi les deux pièces tirées, au moins une soit défectueuse ?

24 Une variable aléatoire Z a la loi de probabilité suivante.

z_i	0	2	4
$P(Z=z_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$

• Calculer l'espérance et l'écart type de Z.

25 Une urne contient douze boules, des bleues, des vertes et des blanches. Six sont bleues et une seule est blanche.

On tire au hasard une boule de l'urne et on définit une variable aléatoire X égale au gain algébrique obtenu sachant que :

• on perd 3 € si la boule tirée est bleue ;
• on gagne 1 € si la boule tirée est verte ;
• on gagne 7 € si la boule tirée est blanche.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer l'espérance de X.

3. Déterminer l'écart-type de X.

26 **Appels reçus**

À l'accueil d'une agence bancaire, on étudie le nombre d'appels reçus dans un laps de temps de 5 minutes. La loi de probabilité déduite de cette étude est la suivante.

Nombre d'appels	0	1	2	3
Probabilité	0,08	0,25	0,48	0,19

1. Quelle est la probabilité de recevoir au moins deux appels pendant ce laps de temps ?

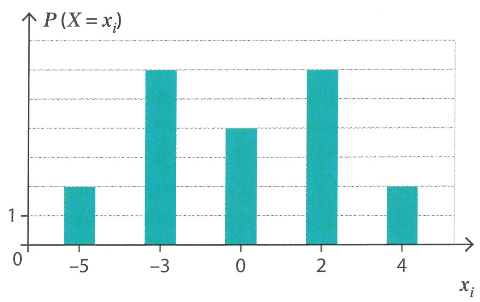
2. On considère que cette étude reste valable quelle que soit l'heure de la journée. Quel est le nombre moyen d'appels dans un laps de temps de 5 minutes dans cette agence ?

27 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note les résultats obtenus.
Par exemple, (Face ; Face ; Pile) est une issue que l'on notera FFP.
1. Représenter cette expérience par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité pour que le troisième lancer de la pièce donne « Face ».
3. À chaque tirage, on associe 20 points pour « Pile » et 10 points pour « Face ».
On note X la somme des points obtenus.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance. Interpréter cette valeur.

28 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Si on obtient trois fois « Pile » ou trois fois « Face », on gagne 10 euros, sinon on perd 2 euros.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
2. Déterminer l'espérance de ce gain ainsi que son écart type.
3. A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ?

29 Dans un lot de 150 piles, dont 20 sont insuffisamment chargées, on tire successivement et sans remise deux piles.
1. Quelle est la probabilité que, dans ce tirage, les deux piles tirées soient insuffisamment chargées ?
2. Quelle est la probabilité que, dans ce tirage, au plus une pile soit insuffisamment chargée ?
3. Quelle est le nombre moyen de piles insuffisamment chargées obtenues si on réitère un grand nombre de fois un tel tirage ?

30 On donne ci-dessous la représentation graphique de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.



1. Déterminer l'espérance de X.
2. Déterminer l'écart type de X.

31 VRAI OU FAUX
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et argumenter la réponse.
1. Plus l'espérance d'une variable aléatoire est grande, plus les valeurs qu'elle peut prendre sont dispersées.
2. La variance d'une variable aléatoire est toujours un nombre réel positif.

32 VRAI OU FAUX
On lance deux dés cubiques équilibrés et on note S la variable aléatoire égale à la somme obtenue. L'espérance de S vaut 7.
Parmi les affirmations suivantes, la(les)quelle(s) est (sont) vraie(s) ?
1. Si on obtient 1 avec le premier dé, on obtient forcément 6 avec le second dé.
2. Quel que soit le nombre de fois que l'on répète cette expérience aléatoire, la moyenne de la somme des points obtenus vaut toujours 7.
3. La somme des points obtenus peut valoir 2.
4. La somme des points obtenus peut valoir 1.

33 Une roulette de casino comporte 37 secteurs de même surface. 18 sont rouges, 18 sont noirs et le dernier est vert.
On mise 1 € sur une couleur rouge ou noire et on reçoit le double de sa mise si la couleur annoncée est la bonne. Sinon, on perd sa mise.
• Déterminer l'espérance de gain d'un joueur jouant un grand nombre de parties.

34 Une pièce de monnaie est truquée. On appelle X le nombre de « Pile » obtenus lors d'un lancer (X peut donc prendre la valeur 0 ou 1). On sait que $E(X) = \frac{1}{3}$.
• Déterminer la loi de probabilité de X.

35 Des sondeurs interrogent trois personnes au hasard dans la rue. On note G la variable aléatoire égale au nombre d'hommes interrogés par un sondeur pris au hasard.
• Déterminer l'espérance de X et interpréter concrètement cette espérance.

36 Dans un jeu de 52 cartes, on tire successivement et au hasard deux cartes avec remise.
On gagne 3 € si la carte est une figure rouge, 2 € si la carte est une figure noire et 5 € si la carte est un as. On perd 50 centimes dans tous les autres cas.
• A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ?

37 Un jeu consiste à lancer une pièce de monnaie. On gagne 2 € si on obtient « Pile » et on perd 1 € si on obtient « Face ».
• Comment peut-on truquer la pièce pour que le jeu soit équitable ?

38 Soit a nombre réel. Y est une variable aléatoire qui représente le gain algébrique à un certain jeu et qui suit la loi de probabilité donnée dans le tableau suivant.

y_i	–2	–1	a
$P(Y = y_i)$	0,5	0,4	0,1

• Déterminer la valeur de a pour que ce jeu soit équitable.

39 **Calculer, raisonner**

Les caractéristiques de deux jeux sont données dans le tableau ci-dessous.

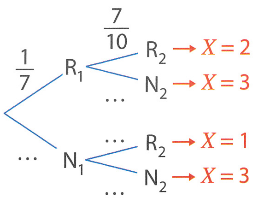
	Jeu 1		Jeu 2	
Gain	-2	5	-1	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

• À quel jeu est-il préférable de jouer ? Argumenter

40 On lance deux dés équilibrés à 6 faces : un dé rouge et un dé bleu. On note le couple de résultats obtenus $(R\,;B)$, R représentant le résultat du dé rouge et B le résultat du dé bleu, et on considère dans un repère le point M de coordonnées $(R\,;B)$.
On gagne 5 € si ce point appartient à la droite d'équation $y = 2x$, 10 € s'il appartient à la droite d'équation $y = 3x$, sinon, on ne gagne rien.
1. Quelle est la loi de probabilité du gain ?
2. Quel gain moyen peut-on espérer ?

41 **Raisonner, calculer, représenter**

Compléter les valeurs manquantes sur l'arbre suivant sachant que $P(X = 3) = \frac{3}{20}$.



42 ALGO

On considère l'algorithme suivant.

$k \leftarrow 0$
$L \leftarrow$ *liste vide*
Tant que $k < 5$
  $k \leftarrow k + 1$
  ajouter à L l'élément (nombre entier aléatoire entre 1 et 4 + nombre entier aléatoire entre 1 et 4)

1. Écrire un contenu possible de la liste L après l'exécution de ce programme.
2. Écrire un énoncé de problème pour lequel ce programme pourrait être utile.

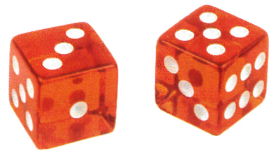
43 On considère une rangée de quatre cases numérotées de 1 à 4 et un jeton initialement placé sur la case 1.

1	2	3	4
●			

On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. Si elle tombe sur « Pile », le jeton avance d'une case, sinon, il ne bouge pas. On note N le numéro de la case occupée au final par le jeton.
• Déterminer la loi de probabilité de N.

44 **Raisonner, calculer**

On lance simultanément deux dés équilibrés et on note S la somme obtenue.

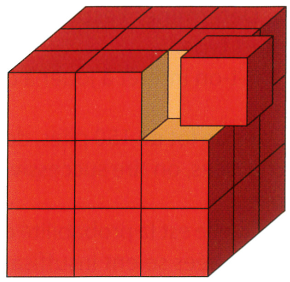


• Quelle est l'espérance de S ? Comment l'interpréter ?

45 X est une variable aléatoire prenant les valeurs -2 ; -1 ; 0 et 10.
On a :
• $P(X = -2) = P(X = 10)$
• $P(X = -1) = \frac{1}{2}P(X = 0)$
• $P(X = -2) = 3P(X = 0)$
• Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

46 **Représenter**

On dispose d'un cube en bois de côté 3 cm et on le peint en rouge. On découpe ce cube en 27 petits cubes de 1 cm de côté que l'on place dans un sac opaque.



On tire un cube de ce sac et on note R le nombres de faces peintes en rouge du cube tiré.
• Déterminer la loi de probabilité de la variable R.

47 Dans une ville comportant 15 000 foyers, une enquête portant sur les habitudes en matière d'écologie a donné les résultats suivants :
• 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif ;
• parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30 % consomment des produits bio ;
• parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.
On choisit un ménage au hasard et on note :
T l'évènement : « Le foyer pratique le tri sélectif. » ;
B l'évènement : « Le foyer consomme des produits bio. »
1. Déterminer $P(\mathrm{T})$, $P(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{B})$ et $P(\mathrm{T} \cap \mathrm{B})$.
2. Justifier que $P(\mathrm{B}) = 0{,}24$.
3. Cette ville décide de favoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle offre chaque année un chèque de 50 € aux foyers qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 20 € aux foyers qui consomment des produits bio (les deux récompenses pouvant être cumulées).
Soit S la somme d'argent reçue par un ménage choisi au hasard.
a. Donner les différentes valeurs que peut prendre S.
b. Déterminer la loi de probabilité de S.
c. Calculer l'espérance de S et interpréter ce résultat.

48 ALGO

Une variable aléatoire X prend toutes les valeurs entières de 1 à 100.
On a, pour tout k entier entre 1 et 100 :

$$P(X = k) = \frac{k}{5050}.$$

• Écrire un algorithme en langage naturel qui calcule l'espérance de X.

49 ALGO PYTHON

Communiquer

On considère la fonction suivante écrite en Python.

```python
from random import random

def gain():
    tirage=floor(random()*6+1)
    if tirage<=2:
        X=5
    elif tirage==4:
        X=-3
    else:
        X=-20
    return(X)
```

• Inventer une situation dans laquelle cette fonction pourrait être utile.

50 On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires identiques numérotés de 1 à 15 comme représentée ci-dessous.

On fait tourner cette roue et la flèche rouge arrive dans un des 15 secteurs dont on note le numéro.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
a. A : « Le numéro est un multiple de 5. »
b. B : « Le numéro n'est pas un multiple de 3. »
c. C : « Le numéro est pair et strictement inférieur à 10. »
d. A ∩ B
e. B ∪ C
2. On définit la variable aléatoire X en associant à la couleur bleue sur la roue le nombre 80, à la couleur verte le nombre 20, à la couleur rose le nombre 10 et à la couleur orange le nombre 0.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. On suppose que ces nombres correspondent à des gains en euros. Quelle doit être la mise de départ pour que le jeu soit équitable ?

51 On lance une fois un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6.
1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus. Quelle est l'espérance de X ?
2. On suppose qu'on reçoit 12 € si on obtient 1, rien si on obtient 2, 3 ou 4, et 6 € si on obtient 5 ou 6.
Soit G la variable aléatoire égale au gain à ce jeu.
a. Quelle est la loi de probabilité de G ?
b. Que vaut le gain moyen ?
3. On suppose maintenant qu'on reçoit 27 € pour l'obtention d'un 1 et rien sinon.
Est-il préférable de jouer au jeu de la question 2 ou à celui-ci ? Argumenter.

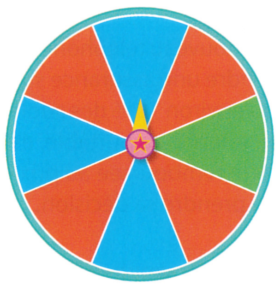
52 ALGO

On considère l'algorithme suivant.

```
Gain ← −10
Pour i allant de 1 à 50
    T ← nombre entier aléatoire entre 1 et 6
    Si T > 2
        Gain ← Gain + 3
    Sinon
        Gain ← Gain − 2
```

• Écrire un énoncé de problème pour lequel cet algorithme pourrait servir.

53 Un organisateur de jeux dispose d'une roue divisée en huit secteurs identiques : trois bleus, un vert et quatre rouges.



Il propose un jeu : le joueur fait tourner la roue, s'il obtient vert, il gagne 11 €, s'il obtient bleu, il perd, s'il obtient rouge, il refait tourner la roue : s'il obtient vert, il gagne 8 €, s'il obtient bleu, il gagne 6 €, s'il obtient rouge, il perd.
• Quel prix l'organisateur doit-il faire payer pour que chaque partie lui rapporte en moyenne 2 € ?

54 **Raisonner, calculer**

Marion possède quatre cartes dont trois sont rouges et une est bleue. Elle les pose à l'envers devant Emma sur une table et lui propose le jeu suivant : Emma retourne une carte au hasard. Si elle obtient la carte bleue, Marion lui donne x billes ; si elle obtient une carte rouge, elle donne y billes à Marion.
1. Comment choisir x et y pour que le jeu soit équitable pour Emma ?
2. L'est-il aussi alors pour Marion ?

55 On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 100. On choisit dans l'ensemble E un entier au hasard et on considère la variable aléatoire X qui prend pour valeur cet entier.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X ?
3. Déterminer les probabilités suivantes.

a. $P(X = 43)$
b. $P(X \leqslant 20)$
c. $P(X > 61)$
d. $P(30 \leqslant X < 40)$
e. $P(X \in [45\,;67])$
f. $P_{\{X \leqslant 60\}}(X > 35)$
g. $P(\{X < 50\} \cup \{X > 80\})$

56 ALGO PRISE D'INITIATIVE

Une entreprise produisant des céréales décide de glisser des bons de réduction de 1 €, 2 € et 3 € dans les paquets de céréales qu'elle fabrique. Lors d'un contrôle de qualité sur 500 paquets, on trouve cinq bons de 3 €, 52 bons de 2 € et 101 bons de 1 €.
On s'intéresse à l'expérience suivante : on prend un paquet de céréales au hasard et on note X le montant de la réduction obtenue.

1. Quel modèle de probabilité paraît le plus adapté à cette situation ?
2. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de simuler cette variable aléatoire X.
3. Quelle est la réduction moyenne par paquet à laquelle peut s'attendre un gros consommateur de ces céréales ?

57 Maelle achète un nouveau téléphone portable à 200 €. Elle hésite à prendre une assurance supplémentaire à 50 €. Elle a lu qu'environ 10 % des adolescents cassent ou perdent leur téléphone portable, et l'assurance lui permettrait d'être remboursée au prix du neuf.

• Aider Maelle à prendre sa décision.

58 Un jeu consiste à lancer simultanément une pièce équilibrée et un dé cubique équilibré. On gagne 10 points si on obtient « Pile » et un multiple de 3, on gagne 3 points si on obtient « Pile » mais pas de multiple de 3, on perd 5 points dans tous les autres cas.
On note X le nombre de points obtenus par le joueur à la fin d'une partie.

1. Interpréter l'évènement $\{X = -5\}$ dans le contexte de ce jeu.
2. Calculer $P(X \geqslant 4)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
5. Déterminer l'écart type de X.

59 Dans une population d'animaux où il y a deux fois plus de femelles que de mâles, on choisit au hasard deux individus et on note X le nombre de femelles obtenues.

• L'évènement le plus probable est-il $\{X = 2\}$,$\{X = 1\}$ ou $\{X = 0\}$?

60 **Raisonner, calculer**

Un club de sport propose à ses adhérents trois types de pratique : la compétition (C), le loisir (L) et la remise en forme (R). Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une sorte d'activité.
La répartition des adhérents est donnée par le tableau suivant.

Activité	C	L	R
Proportion des adhérents	12 %	36 %	52 %

L'adhésion annuelle aux sections L ou R coûte 50 € et celle à la section C coûte 80 €.
De plus, le club organise chaque année une sortie en extérieur (S) pour laquelle une participation de 40 € est demandée.
Un tiers des adhérents de la section C, un quart de ceux de la section L et la moitié de ceux de la section R participent à cette journée.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	C	L	R	Total
S				
$\bar{S}$				
Total				100 %

2. On choisit une personne de ce club au hasard.
On note M la variable aléatoire qui, à chaque adhérent, associe le montant annuel à payer au club.

a. Quelles sont les valeurs prises par M ?
b. Donner la loi de probabilité de M.
c. À quel prix le directeur du club de sport doit-il fixer la sortie s'il veut que le montant moyen par adhérent ne dépasse pas 65 € ?

61 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner, calculer

Gaëlle et Célia jouent à lancer une pièce équilibrée selon les règles suivantes :
Gaëlle lance deux fois la pièce et Célia trois fois ; si Gaëlle obtient plus de « Pile » que Célia, elle gagne 10 €, si elle en obtient autant, elle gagne 1 € et si elle en obtient moins, elle perd 5 €.

• Le jeu est-il favorable à Gaëlle ou à Célia ?

62 PRISE D'INITIATIVE

Raisonner

Florane joue au basket. Elle a fait des statistiques sur ces paniers et a obtenu les résultats suivants :

• tirs à 2 points réussis : 70 % ;
• tirs à 3 points réussis : 40 %.

• Quel type de tirs devrait-elle privilégier pour marquer un maximum de points ?

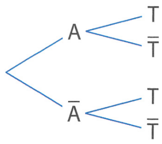
63 **Au restaurant**

Un restaurant propose à sa carte deux types d'entrées : chaude ou froide. Une entrée chaude est vendue 4 € et une froide 3 €. Chaque client choisit une entrée et un plat à 7 €. Il peut prendre éventuellement en supplément un café à 1,50 €.
Le restaurant a eu 250 clients et 60 % d'entre eux ont choisi une entrée froide.
Le restaurateur a remarqué que :
• parmi les clients ayant pris une entrée froide, 80 % prennent un café ;
• parmi les clients ayant pris une entrée chaude, 70 % prennent un café ;
On interroge au hasard un client de ce restaurant et on considère la variable aléatoire S correspondant à la somme payée par le client.
1. Déterminer la loi de probabilité de S.
2. Déterminer l'espérance de S et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

64 TABLEUR

Un sac contient trois jetons jaunes et sept jetons mauves. On tire au hasard un jeton du sac. On note sa couleur et on le remet dans le sac. On réitère une fois ce tirage. Si on obtient deux jetons de même couleur, on gagne 15 €, sinon, on perd 5 €.
1. On souhaite simuler cette expérience aléatoire.
a. Expliquer pourquoi, avec un tableur, la formule =ENT(ALEA()+0,3) renvoie 0 avec la probabilité 0,7 et 1 avec la probabilité 0,3.
b. Simuler 10 000 expériences.
c. Donner alors une valeur approchée du gain moyen à ce jeu.
2. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.
b. Quel est le gain moyen ?

65 Dans un pays, 9 % des habitants sont atteints par une épidémie. Le test de dépistage de la maladie a quelques défauts :
• si l'individu est touché par la maladie, le test se révèle quand même négatif dans 0,5 % des cas ;
• si l'individu n'est pas atteint, le test se révèle tout de même positif dans 1,5 % des cas.
On fait passer le test à tous les habitants et on décide de donner un traitement à tous les individus dont le test est positif.
1. On choisit au hasard le dossier médical d'un individu dans cette population.
On note A l'évènement : « L'individu choisi est atteint par la maladie. » et T l'évènement : « L'individu a pris le traitement. ».
a. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.



b. Quelle est la probabilité que cet individu ait pris ce traitement ?
c. À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?
2. On tire au hasard un échantillon de deux individus dans la population. On note N le nombre d'individus de l'échantillon ayant été traité pour cette épidémie.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T, ainsi que son espérance, sa variance et son écart type, arrondis à 0,001 près.

66 **Représenter, Raisonner**

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis.
On sait également que 30 % de l'ensemble des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
• F l'évènement « Le membre choisi est une femme » ;
• T l'évènement « Le membre choisi adhère à la section tennis ».
1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?
3. Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie chaque semaine pendant deux semaines. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie. Lors de ces deux semaines, on note X le nombre d'adhérents de la section tennis choisis pour tenir la loterie.
a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
b. Déterminer la loi de probabilité de X.

67 On lance trois fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le nombre de valeurs distinctes obtenues. Par exemple, si on obtient 2, 6 et 1, alors $X = 3$, si on obtient 4, 4 et 2, alors $X = 2$.
• Quelle est la loi de probabilité de X ? Quelle est son espérance ?

68 Une urne contient n jetons ($n \geqslant 9$) indiscernables au toucher dont sept sont noirs et les autres blancs.
On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne.
1. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « Les deux jetons sont blancs. » ;
B : « Les deux jetons sont de la même couleur. » ;
C : « Les deux jetons sont de couleurs différentes. »
2. On suppose maintenant que n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 9. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors d'un tirage.
a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n.
b. Montrer que $E(X) = \dfrac{n^2 + 13n - 98}{n(n-1)}$.
c. Déterminer n afin que l'espérance soit maximale.

69 Dix chevaux, quatre blancs et six alezans, entrent en piste un par un au hasard.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de chevaux blancs précédant le premier cheval alezan.
• Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.

70 On lance un dé trois fois de suite et on s'intéresse au nombre L de lancers nécessaires pour obtenir le premier 6 ; si l'on n'obtient pas de 6 au bout des trois lancers, alors L prend la valeur 0.
• Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de L.

71 **Raisonner, calculer**
On lance deux dés bien équilibrés à six faces et on note S la somme des points obtenus et P leur produit.
1. On note les évènements A : « $S = 7$ ou $P = 6$. » et B : « $S = 6$ ou $P = 4$. ».
Quel est le plus probable de ces deux évènements ?
2. On note les évènements C : « $S = 7$ et $P = 6$. » et D : « $S = 4$ et $P = 4$. ».
Quel est le plus probable de ces deux évènements ?

72 **Trois cyclistes**

Benoît, Sandrine et Éric sont en colocation et partent ensemble au travail en vélo.
Benoît a des pneus de mauvaise qualité et crève une fois sur quatre. Lorsque cela lui arrive, il continue à pied et arrive bien évidemment en retard !
Éric a des problèmes de santé qui font qu'il n'arrive à l'heure au travail que trois fois sur cinq.
Si l'un des deux est en retard, il en informe Sandrine, qui, très influençable, décide une fois sur trois, par solidarité, d'arriver elle aussi en retard.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de cette maisonnée arrivant à l'heure au travail.
• Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X. Interpréter.

73 L'entreprise EKTR fabrique des casques audio. Dans sa production, 5 % d'entre eux ne sont pas conformes (ils ont un défaut). Le contrôle de production mis en place dans cette entreprise rejette 96 % des casques défaillants et malheureusement, il rejette aussi 7 % des casques qui n'ont pas de défaut.
1. Quelle est la probabilité qu'un casque, choisi au hasard dans cette production, ne soit pas conforme et ne soit pas rejeté par le contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
3. Quelle est la probabilité qu'un casque pris au hasard ne soit pas rejeté par ce premier contrôle ?
4. Un second contrôle de production est réalisé, indépendamment du premier contrôle. La probabilité qu'un casque de cette entreprise ne soit pas rejeté après ce deuxième contrôle est égale à 0,94. Un casque subit les deux contrôles : l'entreprise EKTR réalise un bénéfice de 89 € s'il n'est rejeté par aucun contrôle ; elle perd 40 € s'il est rejeté par les deux contrôles et elle réalise un bénéfice de 29 € sinon.
Soit B la variable aléatoire égale au bénéfice en euros réalisé par EKTR sur la fabrication d'un casque.
Déterminer l'espérance de B et interpréter ce résultat.

74 **Poissons d'ornement**

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

• pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restants deviennent gris.

• pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restants deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit vivant un mois plus tard vaut 0,92.

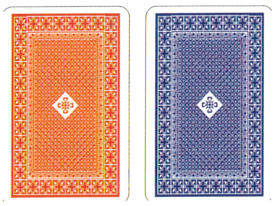
b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

2. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 € si le poisson est rouge, 0,25 € s'il est gris et perd 0,10 € s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance, arrondie au centime.

75 Lors d'un jeu, un joueur mise 5 €. Ensuite, il tire au sort une carte parmi quatre cartes bleues numérotées 0, 1, 2 et 3 et une autre carte parmi quatre cartes rouges numérotées 1, 2, 3 et 4.



Il gagne 2 € si le produit des deux résultats obtenus est inférieur à 5 et il gagne le produit des deux résultats en euros si ce produit est supérieur à 5.

1. Combien l'organisateur de ce jeu peut-il espérer gagner quotidiennement si 50 parties par jour sont réalisées ?

2. Il modifie la mise du joueur pour que les 50 parties journalières lui rapportent en moyenne 120 € par jour. Quelle est la nouvelle mise ?

76 **Approfondissement**

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω, un modèle de probabilité P associé à cette expérience et X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est la suivante.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

1. a. Rappeler l'expression de l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

b. Soient a et b deux réels.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $aX + b$.

En déduire que, pour tous réels a et b, on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

2. Soit x un nombre réel.

On considère la variable aléatoire $Y = (X - x)^2$.

a. Donner l'expression développée et réduite de Y.

b. Démontrer que la fonction $f : x \to E[(X - x)^2]$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Pour quelle valeur de x est-il atteint et que représente alors ce minimum ?

77 **Approfondissement**

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω, un modèle de probabilité P associé à cette expérience et X une variable aléatoire définie sur Ω.

L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

1. a. Soit a un nombre réel. Montrer que $E(aX) = aE(X)$.

b. Soit Y une autre variable aléatoire définie sur Ω. Montrer que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

On dit que **l'espérance est linéaire** car elle vérifie ces deux premières propriétés.

c. Soit Z une variable aléatoire constante et égale à a sur Ω.

Expliquer pourquoi $E(Z) = a$.

2. a. Expliquer pourquoi on peut écrire :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

b. En utilisant les propriétés démontrées au **1**, montrer que :

$$V(X) = E(X^2) - 2E[XE(X)] + E[E(X)^2].$$

c. Justifier que $E[XE(X)] = E(X)^2$ et que $E[E(X)^2] = E(X)^2$.

d. Conclure.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité décrite ci-dessous.

x_i	–2	–3	5	6
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,6	0,1

a. Déterminer l'espérance de X.

b. En utilisant la formule de König-Huygens démontrée plus haut, calculer la variance de X puis son écart type.

VERS

L'épreuve écrite

78 **Calculer, raisonner**

On lance deux fois un dé à six faces. On définit une variable aléatoire Y en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on obtient le 1 ;
- 10 si on obtient le 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

1. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de Y.

2. On suppose maintenant que le dé est truqué : la probabilité d'obtenir un 6 est deux fois plus élevée que celle d'obtenir un 2 ; toutes les autres faces sont équiprobables, de probabilité 0,13. Le jeu est-il équitable ?

79 **Représenter, calculer**

Une boîte contient trois jetons rouges et deux verts. On tire au hasard des jetons dans la boîte, un par un et sans remise, jusqu'à obtenir un jeton vert.

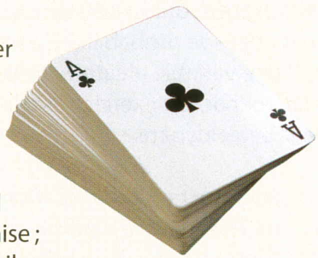
X est la variable aléatoire qui donne le rang de l'obtention du jeton vert.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

80 **Raisonner, calculer**



Un jeu consiste à miser une somme puis à tirer au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

Si le joueur tire un as, il gagne quatre fois sa mise ; si le joueur tire un roi, il gagne deux fois sa mise ; si le joueur tire une dame ou un valet, il récupère sa mise ; si le joueur tire une autre carte, il perd sa mise.

On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée.

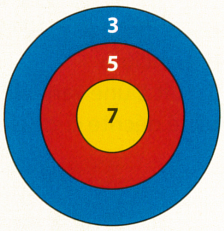
Soit X la variable aléatoire égale au gain final du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Le jeu est-il équitable ? Discuter selon les valeurs de la mise.

81 Dans un club de tir à l'arc, on a relevé les résultats suivants pour les deux meilleurs tireurs, Chloé et Karim.

- En quel joueur peut-on avoir le plus confiance au vu de ces résultats ?



Nombre de points	3	5	7
Chloé	14 %	35 %	51 %
Karim	16 %	23 %	61 %

82 ALGO

On considère des familles de deux enfants prises au hasard dans une population où une naissance sur deux donne un garçon.

1. Compléter cet algorithme afin qu'il simule le tirage de 1 000 de ces familles et que la variable Moyenne contienne, après exécution, le nombre moyen de garçons dans ce tirage.

```
Somme ← ...
Pour i allant de ... à ...
        Naissance1 ← ...
        Naissance2 ← ...
        Somme ← ...
Moyenne ← ...
```

2. Quelle notion a-t-on approchée ainsi ?

83 QCM

Dans une foire, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante : il tire au hasard un jeton dans une urne qui contient quatre jetons rouges et deux jetons bleus. Si le jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton. Si ce jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le deuxième jeton tiré, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne. Si ce jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon le jeu s'arrête et Luc a perdu.

Pour chaque affirmation, indiquer la seule proposition correcte.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

ⓐ $\frac{19}{15}$ ⓑ $\frac{2}{5}$ ⓒ $\frac{11}{15}$ ⓓ $\frac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

ⓐ $\frac{1}{5}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{2}{15}$ ⓓ $\frac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

ⓐ $\frac{3}{5}$ ⓑ $\frac{4}{15}$ ⓒ $\frac{7}{15}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

D'après Bac

84 **Raisonner, calculer**

Un magazine est proposé sous deux versions, l'une papier, l'autre numérique. L'éditeur a chargé une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels. Le centre d'appel contacte une personne au hasard sur cette liste. On considère les évènements :
P : « La personne contactée s'abonne à la version papier. » et N : « La personne contactée s'abonne à la version numérique. ».
Une étude a montré que :
• la probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version papier est de 0,18 ;
• la probabilité qu'une personne contactée s'abonne à la version numérique est de 0,22 ;
• la probabilité qu'une personne contactée ne s'abonne à aucune des deux versions est de 0,83.
Pour chacune des personnes appelée par le centre, l'éditeur paie au centre d'appels :
• 1 € si la personne ne s'abonne pas ;
• 5 € si la personne s'abonne seulement à la version numérique ;
• 6 € si la personne s'abonne seulement à la version papier ;
• 10 € si la personne s'abonne aux deux versions.
On appelle S la variable aléatoire indiquant la somme reçue par la plateforme d'appels pour une personne contactée.

1. Déterminer la loi de probabilité de S.

2. Donner une estimation de la somme perçue par la plateforme si elle parvient à contacter 10 000 clients potentiels.

85 **Calculer**

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros, et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.
Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

1. Démontrer que :

$$P(X=-1)=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

2. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable aléatoire X.

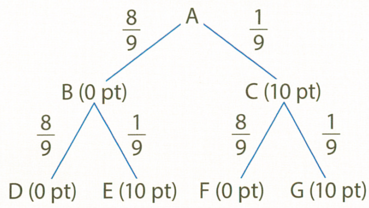
3. Vérifier que l'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$$

4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance est strictement positive.

D'après Bac

86 Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué, sur chaque branche de l'arbre, la probabilité que la bille l'emprunte après être passée par un nœud. Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie, c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance de X.

D'après Bac

87 Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée. Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet Paris-Marseille lors de ces journées « rouges ». Il s'avère que :
• 40 % des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence ;
• parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30 % prennent la route départementale de Valence à Marseille ;
• parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60 % prennent la route départementale de Valence à Marseille.
On note B l'évènement « L'automobiliste prend l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence. » et V l'évènement « L'automobiliste prend la route départementale entre Valence et Marseille. ».

1. a. Montrer que $P(\overline{B} \cap \overline{V}) = 0{,}24$ et interpréter ce résultat.

b. Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille.

2. On donne les temps de parcours suivants : Paris-Beaune (par autoroute) : 4 heures ; Beaune-Valence : (par autoroute, en passant par Lyon) : 5 heures ; Beaune-Valence (par itinéraire de délestage, en ne passant pas par Lyon) : 4 heures ; Valence-Marseille (par autoroute) : 5 heures ; Valence-Marseille (par la route départementale) : 3 heures.

a. Calculer les temps de parcours entre Paris et Marseille, selon l'itinéraire choisi.

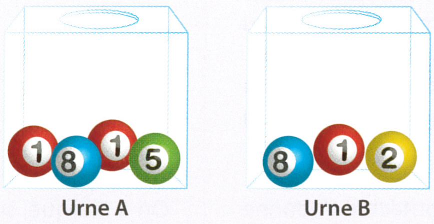
b. Donner la loi de probabilité de la durée du trajet (en heure) pour se rendre de Paris à Marseille selon l'itinéraire choisi.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire égale à la durée du trajet en heure et en donner une interprétation.

D'après Bac

88 Des urnes

On considère les deux urnes ci-dessous. L'urne A contient quatre boules numérotées 1, 1, 5 et 8 et l'urne B contient trois boules numérotées 1, 2 et 8.



Questions Va piano

Un jeu consiste à payer 5 euros pour jouer et à piocher au hasard une boule dans l'urne A puis une boule dans l'urne B : si la somme des numéros obtenus est supérieure ou égale à 9, on reçoit 20 euros, sinon on perd sa mise.

1. À l'aide d'un tableau à double entrée, visualiser l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire associée à ce jeu.
2. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de G.
3. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Questions Moderato

Un jeu consiste à payer 5 euros pour jouer et à piocher au hasard une boule dans l'urne A puis une boule dans l'urne B : si on obtient au moins un « 1 », on perd sa mise, si on obtient au moins un « 8 », on reçoit 7 euros, sinon on reçoit x euros ($x \geqslant 6$). On note G le gain algébrique du joueur à ce jeu.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de perdre de l'argent à ce jeu.
2. Déterminer la loi de probabilité de G en fonction de x.
3. Déterminer la valeur de x pour que le jeu soit équitable.

Questions Allegro

Un jeu consiste à miser une certaine somme m en euros pour jouer et à piocher au hasard une boule dans l'urne A, puis, sans remise, une deuxième boule dans l'urne A et enfin une boule dans l'urne B : on reçoit une somme d'argent égale à la somme des trois numéros obtenus.

- Déterminer la valeur de m pour qu'un tel jeu soit équitable.

89 Une roue variable

Une roue de loterie comporte des secteurs identiques, dont trois secteurs verts, quatre secteurs noirs et n secteurs gris, n entier naturel non nul.
Léo fait tourner la roue : si elle s'arrête sur un secteur vert, Léo gagne 6 points, si elle s'arrête sur un secteur noir, Léo perd 3 points et sinon, Léo refait tourner la roue : si le vert sort, Léo gagne 1 point, si le noir sort, Léo perd 2 points, sinon, Léo ne gagne ni ne perd de point.

Questions Va piano

On prend $n = 5$ et on note X la variable aléatoire égale au gain algébrique de Léo.

1. Réaliser un arbre pondéré illustrant l'expérience aléatoire liée à ce jeu.
2. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
3. Calculer $P(X = -3)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de X.
5. Calculer l'espérance et l'écart type de X.

Questions Moderato

On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de Léo.

1. Démontrer que :
$$P(X_n = 0) = \frac{n^2}{(n+7)^2}.$$
2. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
3. Léo veut savoir s'il a plus de chances de gagner une somme d'argent strictement positive avec cinq secteurs gris ou avec six secteurs gris. Aider Léo à répondre à la question.

Questions Allegro

On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de Léo.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n en fonction de n.
2. Calculer l'espérance de X_n en fonction de n.
3. Déterminer n pour que Léo gagne en moyenne 0,5 point par partie.

No problem!

1 A race organisation

Three runners give their running number to the race organizer for registration. Then the organizer gives them back the running numbers at random.
We denote D the random variable associated to the number of runners that were given back their own running number.

1. Represent this information on a tree-diagram.

2. The distribution law of the random variable D is given by the grid below:

D	0	1	2	3
$P(D)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Comment that grid and explain the probabilities given in the second line.

3. Work out the expectancy and the standard deviation of variable D.

4. Use your calculator to check the results found in the previous question.

2 A city walk

Philip wants to go downtown. He can choose between three different bus routes.

When he arrives at the bus stop, he discovers that he has:

- 5 chances over 8 to wait for bus 1 for 10 minutes;
- 1 chance over 4 to wait for bus 2 for 15 minutes;
- 1 chance over 8 to wait for bus 3 for 20 minutes.

1. What is the probability that he waits for more than 15 minutes?

2. Compute the average waiting time.

3 A strange dice

A game involves rolling twice an unbiased six-sided dice with faces marked 1, 1, 1, 2, 2, 3.
At the end of the game we add up the two numbers we had.

1. a. Draw a tree diagram representing the results after two throws.

b. If the sum of the score is greater than 5, the player wins 50 p.
If the sum of the score is 3 or 4 the player wins 20 p.
Otherwise he loses 1 pound.
Let X be the random variable "Amount of player wins in pence". Find the probability distribution of X.

c. What is the probability to win money?

d. Is it a fair game? Why?

e. Change a single number in question **1 b** to have a fair game.

2. We play the same game with the same rules but we have to pay 10 p.
Answer questions **1 b** to **1 e**.

Individual work — Crosswords

1. Two events that have the same probability to happen.
2. An issue which is not related to another issue.
3. Something which is not rig.
4. Random in probability and input for a function.
5. The chance that something will occur.
6. If the experiment is fair, all the outcomes will be unplanned.
7. A diagram that represents a probability space in probability theory.
8. In probability, it is when something happens.
9. It's a law.