Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

CHAPITRE

10 Variables aléatoires réelles

Savoir si un jeu de hasard est équitable

Nicolas Bernoulli

Nicolas Bernoulli (1687-1759) est un mathématicien suisse issu d'une grande famille de physiciens et de mathématiciens. Il a travaillé sur les probabilités et en particulier sur un « paradoxe » dit « de Saint-Pétersbourg » que son cousin, Daniel Bernoulli, avait déjà évoqué dans une publication de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg (d'où son nom).

Le mathématicien D'Alembert a reformulé le paradoxe de Saint-Pétersbourg de la façon suivante.
« Pierre joue avec Paul à croix ou pile, avec cette condition que si Paul amène pile au premier coup, il donnera un écu à Pierre ; s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, deux écus ; s'il n'amène pile qu'au troisième coup, quatre écus ; au quatrième, huit écus ; au cinquième, seize ; et ainsi de suite jusqu'à ce que pile vienne ; on demande l'espérance de Paul, ou ce qui est la même chose, ce qu'il doit demander à Pierre avant que le jeu commence, pour jouer avec lui à jeu égal, ou, comme on l'exprime d'ordinaire, pour son enjeu. Les formules connues du calcul des probabilités font voir aisément, et tous les mathématiciens en conviennent, que si Pierre et Paul ne jouent qu'en un coup, Paul doit donner à Pierre un demi-écu ; s'ils ne jouent qu'en deux coups, deux demis-écus ; s'ils ne jouent qu'en trois coups, trois demis-écus ; en quatre coups, quatre demis-écus, etc. »

Pourquoi Paul doit-il demander une certaine somme à Pierre avant que le jeu commence ? Expliquer le passage : « si Pierre et Paul ne jouent qu'en un coup, Paul doit donner à Pierre un demi-écu ; s'ils ne jouent qu'en deux coups, deux demis-écus ».

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Séries statistiques

On présente deux séries statistiques.

Série A

Valeurs	−5	−1	0	1	3
Fréquences	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Série B

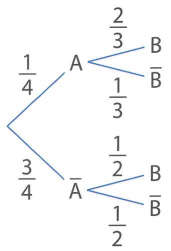
Valeurs	−3	−1	0	1	2
Fréquences	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

1. Calculer la moyenne et l'écart type de chaque série.
2. Comparer ces deux séries.

2 Probabilités

L'arbre de probabilité pondéré ci-contre modélise une situation. Déterminer les probabilités suivantes.

1. $P(A \cap B)$
2. $P_A(B)$
3. $P(B)$
4. $P_B(A)$



3 Probabilité conditionnelle

Charles lance un dé équilibré sans voir le résultat. Camilla l'informe que l'évènement E : « Le 6 n'est pas sorti. » est réalisé.

• Calculer, de deux manières différentes, la probabilité de l'évènement F : « Le numéro sorti est pair. »

4 Pièce truquée

Une pièce est truquée : la probabilité d'obtenir « Face » vaut $\frac{3}{4}$. On lance deux fois cette pièce.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois « Pile » ?
3. Représenter cette situation par un tableau à double entrée.

5 Probabilité

Un tiroir contient cinq stylos rouges et sept stylos bleus. Un professeur y pioche au hasard un stylo, le remet dans le tiroir, puis en pioche un deuxième.

• Calculer la probabilité que les deux stylos choisis soient de couleur différente.

6 Tableau croisé d'effectifs

Dans un lycée, la répartition des élèves est donnée par le tableau suivant :

	Seconde	Première	Terminale
Filles	230	180	140
Garçons	190	160	100

On choisit un élève au hasard dans cette population.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit un(e) élève de Première ?
3. Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité que ce soit une élève de Terminale ?
4. Sachant que c'est un(e) élève de Seconde, quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

7 Simulations

On entre dans un tableur la formule :

```
=ALEA.ENTRE.BORNES(0;3)+ALEA.ENTRE.BORNES(0;3).
```

1. Expliquer ce que renvoie cette formule.
2. Quelle expérience aléatoire cette formule peut-elle simuler ?
3. Donner une formule permettant de simuler, dans un tableur, la somme du lancer de trois dés cubiques équilibrés.

8 Évènements indépendants

a. Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,5$.

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

b. Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux évènements indépendants C et D tels que $P(C) = 0,1$ et $P(D) = 0,46$.

Calculer $P(C \cup D)$.

Pour construire le cours

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation A Des nombres dépendant du hasard

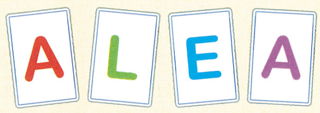
Objectifs
Modéliser le résultat numérique d'une expérience aléatoire et découvrir la notion de variable aléatoire réelle sur un univers fini.

Maëlys écrit sur neuf cartons identiques les lettres du mot ALEATOIRE et les place dans un sac.
Elle propose à son amie Jade le jeu suivant.
Jade tire au hasard un carton dans le sac et observe la lettre obtenue :
- si elle obtient la lettre O, elle gagne dix points ;
- si elle obtient une consonne, elle gagne cinq points ;
- sinon, elle perd huit points (on dira que son gain est alors égal à –8).

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Le gain de Jade à ce jeu est ainsi un nombre dépendant du hasard : c'est une **variable aléatoire**, que l'on notera X.
Quelles sont les valeurs possibles de X ?
3. L'évènement $\{X = 5\}$ est constitué des issues pour lesquelles X prend la valeur 5.
Quelles sont ces issues ?
4. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X = 5\}$, notée $P(X = 5)$.
5. Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeurs k de X			
Probabilité $P(X = k)$			

Ce tableau est appelé « **loi de probabilité de la variable aléatoire X** ».



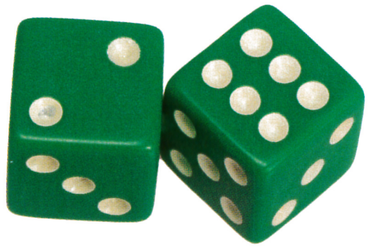
6. Jade propose alors à Maëlys de changer les règles du jeu et de n'utiliser que les lettres du mot ALEA.
Maëlys choisit une lettre au hasard, la note puis la remet dans le sac. Elle recommence et note la seconde lettre.
- Si elle obtient deux voyelles, elle perd trois points ;
- si elle obtient deux consonnes, elle gagne cinq points ;
- sinon, elle ne gagne ni ne perd de point.

On note Y le gain de Maëlys à ce jeu.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Situation B — Le jeu des différences TABLEUR

Objectifs
Découvrir et comprendre le sens de l'espérance d'une variable aléatoire réelle.

Lors du lancer de deux dés cubiques équilibrés, on note X la variable aléatoire réelle égale à la valeur absolue de la différence entre les deux résultats. Un joueur mise deux euros pour jouer et lance les deux dés : X représente la somme d'argent qui lui est alors remise.



1 À l'aide du tableur, on souhaite simuler 1 000 parties comme ci-dessous.

	A	B	C	D
1		**Dé 1**	**Dé 2**	**X**
2	**Partie 1**	6	3	3
3	**Partie 2**	2	3	1
4	**Partie 3**	5	4	1
5	**Partie 4**	6	5	1
6	**Partie 5**	4	2	2
7	**Partie 6**	4	1	3
8	**Partie 7**	3	2	1
9	**Partie 8**	2	2	0
10	**Partie 9**	2	3	1
11	**Partie 10**	1	6	5
12	**Partie 11**	6	5	1
13	**Partie 12**	5	3	2
14	**Partie 13**	3	3	0
15	**Partie 14**	2	4	2
16	**Partie 15**	2	2	0

a. Quelles formules a-t-on pu entrer dans les cellules B2, C2 et D2 puis recopier vers le bas ?

b. Simuler une partie puis 1 000 parties de ce jeu.

c. Quel calcul peut-on alors faire pour savoir si le jeu est en faveur du joueur ?

d. Simuler, grâce à la commande F9 (ou Ctrl+maj+F9), plusieurs autres séries de 1 000 parties. Que constate-t-on ?

e. À l'aide du tableur, simuler 10 000 autres parties de ce jeu.

f. Le jeu semble-il en faveur du joueur ?

2 **a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Sur 18 000 parties jouées, combien de fois le joueur peut-il espérer se voir remettre la somme de zéro euro ? un euro ? deux euros ? trois euros ? quatre euros ? cinq euros ?

c. En moyenne, quelle somme le joueur peut-il espérer se voir remettre après le jeu ?

3 Comment rendre ce jeu équitable, c'est-à-dire ni favorable ni défavorable au joueur ?

Connaître le cours

2. Paramètres d'une variable aléatoire

Espérance, variance et écart type

Définition

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une loi de probabilité P associée à cette expérience.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- L'**espérance** de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :
$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$
- La **variance** de X est le nombre noté $V(X)$ défini par :
$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2.$$
- L'**écart type** de X est le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}\ .$$

Remarque

On peut également noter :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2.$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante.

x_i	-3	9
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

On a :
- $E(X) = -3 \times \frac{5}{6} + 9 \times \frac{1}{6} = -1$
- $V(X) = \frac{5}{6}(-3 + 1)^2 + \frac{1}{6}(9 + 1)^2 = 20$
- $\sigma(X) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Interprétation

- De façon générale, l'espérance d'une variable aléatoire X peut être interprétée comme la moyenne des valeurs prises par X sur un grand nombre de répétitions de cette même expérience aléatoire.
Dans cet exemple, cette moyenne est égale à -1 €.
Si la variable aléatoire X désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est **équitable** lorsque $E(X) = 0$.
- Par analogie avec les statistiques, de la même façon que $E(X)$ représente une moyenne, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.
Plus la variance et l'écart type sont grands, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne (espérance).

Exercice résolu 1 Calculer une espérance, une variance et un écart type

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

x_i	-1	2	3	5
$P(X=x_i)$	0,4	0,1	0,2	0,3

• Calculer l'espérance de X, sa variance et son écart type.

Solution commentée

1 $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}2 + 5 \times 0{,}3 = 1{,}9.$

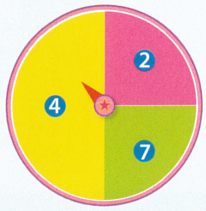
$$V(X) = p_1\,(x_1 - E(X))^2 + p^2\,(x_2 - E(X))^2 + p_3\,(x_3 - E(X))^2 + p_4\,(x_4 - E(X))^2$$
$$= 0,4 \times (-1 - 1{,}9)^2 + 0{,}1 \times (2 - 1{,}9)^2 + 0{,}2 \times (3 - 1{,}9)^2 + 0{,}3 \times (5 - 1{,}9)^2$$
$$= 6{,}49$$

$\sigma(X) = \sqrt{6{,}49} \approx 2{,}548$

EXERCICE 24 p. 326

Exercice résolu 2 Interpréter la notion d'espérance

Dans un jeu, une partie se déroule en deux étapes, dont chacune consiste à faire tourner la roue de loterie ci-contre.



À chaque étape, on gagne le nombre de chamallows indiqué par la flèche rouge.

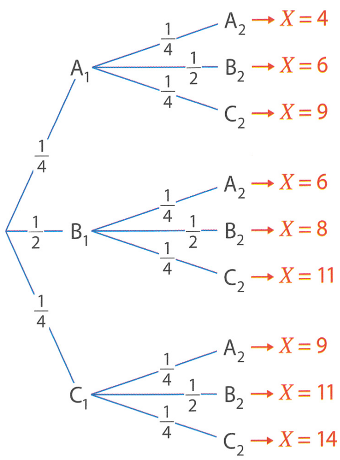
• Si on joue un très grand nombre de parties, combien peut-on espérer gagner, en moyenne, de chamallows par partie ?

Solution commentée

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de chamallows gagnés lors d'une partie.

On sait alors que $E(X)$ représente la moyenne recherchée. On détermine la loi de probabilité de X à l'aide d'un arbre pondéré.

On note A_1 l'évènement « On gagne 2 chamallows à la première étape », B_1 l'évènement « On gagne 4 chamallows à la première étape », et C_1 l'évènement « On gagne 7 chamallows à la première étape ».
On définit de même A_2, B_2 et C_2 pour la deuxième étape.



$P(X=4) = P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

$P(X=6) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = 2 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(X=8) = P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(X=9) = P(A_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap A_2) = 2 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

$P(X=11) = P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) = 2 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(X=14) = P(C_1 \cap C_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

On obtient la loi de probabilité de X.

x_i	4	6	8	9	11	14
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = 4 \times \dfrac{1}{16} + 6 \times \dfrac{1}{4} + 8 \times \dfrac{1}{4} + 9 \times \dfrac{1}{8} + 11 \times \dfrac{1}{4} + 14 \times \dfrac{1}{16} = 8{,}5$

Si on joue un très grand nombre de parties, on peut espérer gagner, en moyenne, 8,5 chamallows par partie.

EXERCICE 36 p. 327

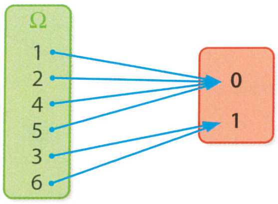
Apprendre par le texte & la vidéo

4 VIDÉOS DE COURS

Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté Ω.
Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple : On lance un dé cubique et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le numéro tiré est un multiple de 3 et 0 sinon.



Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est donner, pour chaque valeur x_i que peut prendre X, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On a toujours $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Espérance d'une variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une loi de probabilité P associée à cette expérience.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- L'**espérance** de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

- L'espérance d'une variable aléatoire X peut être interprétée comme la moyenne des valeurs prises par X sur un grand nombre de répétitions de cette même expérience.

Variance et écart type d'une variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une loi de probabilité P associée à cette expérience. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- La **variance** de X est le nombre noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2.$$

- L'**écart type** de X est le nombre noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.

Plus la variance et l'écart type sont grands, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 8 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 On dispose d'une urne contenant des boules rouges, jaune et vertes.
On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On gagne 4 € à chaque boule jaune tirée, on gagne 1 € à chaque boule rouge tirée et on perd 5 € à chaque boule verte tirée.
- Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire en précisant les valeurs qu'elle peut prendre.

2 On lance une pièce équilibrée.
Si on obtient « Face », on lance ensuite un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4, sinon on lance un dé équilibré à 6 faces.
Dans les deux cas, on note X le numéro obtenu avec le dé lancé.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3 On dispose d'un jeu de 32 cartes.
On tire successivement deux cartes de ce jeu, sans remise.
On gagne 10 € pour chaque figure (valet, dame ou roi) tirée et on perd 2 € pour chaque autre carte tirée.
- Déterminer la probabilité d'être perdant à ce jeu.

4 On étudie un jeu dans lequel le joueur doit miser 1 € puis obtient des gains définis par le tableau suivant.

Gain du joueur	+5	0	–8
Probabilité	0,4	0,5	0,1

- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire égale au gain final du joueur.

5 On dispose d'une urne contenant 3 boules jaunes et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On gagne 2 € à chaque boule jaune tirée et on perd 1 € à chaque boule verte tirée.
- Ce jeu est-il équitable (c'est-à-dire ni favorable, ni défavorable au joueur) ?

6 Un jeu consiste à miser une somme d'argent puis à lancer un dé équilibré. Si on obtient un multiple de 3, on gagne 9 €, sinon, on perd 3 €.
- Comment fixer la mise pour que le jeu soit équitable ?

7 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y dans le tableau suivant.

y_i	–1	–2	3
$P(Y=y_i)$	0,3	0,6	0,1

- Déterminer la variance et l'écart type de Y.

8 On donne les lois de probabilité de deux variables aléatoires représentant le gain algébrique d'un joueur lors de deux jeux.

Jeu 1

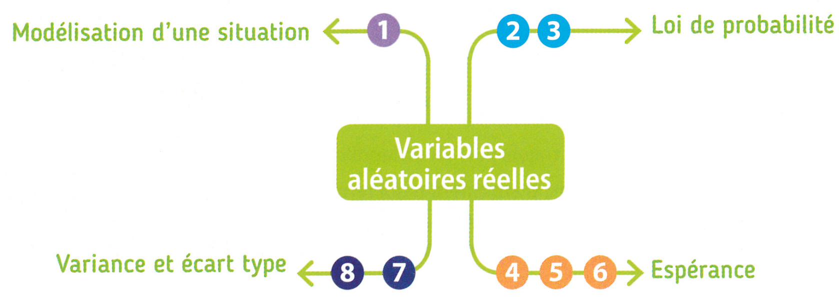
x_i	–2	1	–1
$P(X=x_i)$	0,3	0,6	0,1

Jeu 2

y_i	–1	0	2
$P(Y=y_i)$	0,3	0,6	0,1

- Comparer la moyenne et l'écart type de ces deux variables aléatoires et interpréter ces résultats.

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire

Objectifs
Générer des listes en compréhension, compléter et créer des fonctions informatiques.

Une variable aléatoire G prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. La probabilité de chaque issue est proportionnelle à la valeur de cette issue.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. On souhaite trouver à l'aide d'un algorithme les paramètres de G : espérance, variance et écart type.
   a. Expliquer ce que contient la liste X définie par $X =$ `[x for x in range(1,11)]`.
   b. Créer de façon analogue la liste P des probabilités correspondantes.
   c. Recopier et compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie l'espérance de la variable aléatoire X.

```python
def esperance(X,P):
    E=0
    for k in range(...,...):
        ...
    return ...
```

   d. Écrire une fonction `parametres_dispersion` qui utilise la fonction `esperance` et renvoie la variance et l'écart type de la variable aléatoire G.
3. À l'aide de ces fonctions, déterminer les paramètres de la variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est la suivante.

y_i	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024
$P(Y=y_i)$	0,15	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,1	0,1	0,1	0,1

TP 2 Simuler une variable aléatoire

Objectifs
Utiliser les fonctions informatiques et les listes pour simuler des échantillons d'une variable aléatoire.

Un robot se déplace sur une droite graduée de façon aléatoire et équiprobable de la manière suivante : à chaque seconde, soit il avance d'une graduation, soit il recule d'une graduation, soit il reste à sa place. Un trajet du robot est une succession de cinq déplacements, le robot étant initialement situé au point d'abscisse 10. On note X la variable aléatoire égale à l'abscisse du robot après un trajet.

1. Écrire une fonction `deplacement` d'argument A qui simule un déplacement du robot à partir de l'abscisse A et qui renvoie l'abscisse du robot à l'issue de ce déplacement.
2. On place le robot à l'abscisse 10.
   Déduire de ce qui précède une fonction `trajet` qui simule un trajet du robot et qui renvoie la valeur de X.
3. Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie un échantillon simulé de taille n de la variable X.

```python
def echantillon(n):
    L=[]
    for k in range(...):
        L.append(...)
    return L
```

4. Simuler un échantillon de 5 trajets puis un échantillon de 12 trajets.
5. Écrire une fonction `etendue` d'argument n qui renvoie la valeur minimale de X et sa valeur maximale dans un échantillon de taille n. Dans la console, taper plusieurs fois `etendue(10)` puis plusieurs fois `etendue(1000)` et commenter les résultats obtenus.

TP 3 Faire la distinction entre un modèle et la réalité

Objectifs
Étudier la distance entre la moyenne d'un échantillon simulé de taille n d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.

Le principe d'un jeu est le suivant : on mise 2 € et on lance quatre fois une pièce équilibrée. En cas d'apparition d'un « Pile », le gain est égal au rang de sortie de ce « Pile », si aucun « Pile » ne sort, on perd sa mise.

1 On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G.

2 On souhaite étudier la distance entre l'espérance de G et la moyenne des gains algébriques obtenue lors d'un échantillon simulé.

a. La fonction ci-contre permet de simuler une partie de ce jeu et renvoie le gain algébrique du joueur.
Expliquer le rôle des deux conditions de la ligne 6.

```
1 import random as rd
2
3 def jeu():
4     G=-2
5     for i in range(1,5):
6         if (rd.randint(0,1)==0) and G==-2:
7             G=G+i
8     return(G)
```

b. Créer une fonction simul_n_jeux qui simule n parties de ce jeu et renvoie le gain algébrique moyen du joueur par partie.

c. Simuler la moyenne de gain avec plusieurs échantillons de tailles différentes et comparer les résultats avec l'espérance trouvée à la question **1.**

3 **a.** Expliquer le rôle de la fonction evolmoy ci-contre.

b. Programmer cette fonction puis commenter l'affichage obtenu après exécution.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def evolmoy(nbreexp):
    s=0
    n=1
    L=[]
    while n<=nbreexp:
        s=s+jeu()
        L.append(s/n)
        n=n+1
    plt.plot(list(range(1,nbreexp+1)),L,'b.')
    plt.plot([1,nbreexp],[-3/8,-3/8],'r-')
    plt.grid()
    plt.show()
```

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- La boucle Pour s'écrit de la manière suivante.
Boucle avec un compteur k variant de a à b :

```
for k in range(a,b+1):
    instructions
```

- Créer une liste « en extension », c'est entrer un par un les éléments de la liste :

```
>>> L=['Bonjour','mardi',11,2018]
>>> L
['Bonjour', 'mardi', 11, 2018]
```

- Créer une liste « en compréhension », c'est utiliser une instruction qui permet de construire la liste

```
>>> L=[x**2 for x in range(4)]
>>> L
[0, 1, 4, 9]
```

- Le premier élément de la liste est `L[0]`, le 2e `L[1]`, etc.
- On peut ajouter un élément à la fin d'une liste :

```
>>> L=[1,2,3]
>>> L.append(4)
>>> L
[1, 2, 3, 4]
```

- L'affichage d'un point de coordonnées (x ; y) dans un repère se fait par l'instruction `plot(x,y)`.
- L'affichage du graphique se fait par l'instruction `show()`.

TP Algorithmique et programmation en Python

TP 4 Observer une fluctuation relative

Objectifs
Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire et calculer la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance de la variable est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

En France, il naît environ 105 garçons pour 100 filles.
On s'intéresse à des familles comportant deux enfants issues de grossesses non gémellaires.
Pour une telle famille, on note F la variable aléatoire égale au nombre de filles nées dans cette famille.

1. Déterminer la loi de probabilité de F ainsi que son espérance μ et son écart type σ.

2. On souhaite simuler N échantillons de n familles et étudier la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et μ est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

a. Créer une fonction famille qui simule la naissance de deux enfants issues de grossesses non gémellaires et renvoie le nombre de filles nées.

```python
import random as rd
from math import sqrt

def famille():


```

b. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie le nombre moyen de filles sur n familles simulées ayant deux enfants issus de grossesses non gémélaires.

```python
def simul_n_familles(n):
    filles=...
    for k in range(n):
        filles=...
    moyenne=...
    return(moyenne)
```

c. Expliquer le rôle de la fonction suivante.

```python
def ecart(moyenne,n,mu,sigma):
    if abs(moyenne-mu)<2*sigma/sqrt(n):
        return(True)
    else:
        return(False)
```

d. Expliquer la ligne 27 de la fonction suivante puis compléter cette fonction.

```python
24 def simul_N_échantillons_de_n_familles(n,N):
25     somme=0
26     for j in range(...):
27         somme=somme+ecart(simul_n_familles(n),n,40/41,sqrt(840/1681))
28     proportion=...
29     return(proportion)
```

3. Exécuter l'instruction simul_N_échantillons_de_n_familles(1000, 100).
Interpréter et commenter les résultats obtenus.

TP 5 Fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné

Objectifs
Calculer la fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné, en français, en anglais.

On considère la fonction python ci-contre.

```
def a(texte):    #Le texte est écrit entièrement
#en lettres minuscules, sans accent et sans espace
    nbcar=0
    for i in range (len(texte)):
        if texte[i]=="a":
            nbcar=nbcar+1
    return(nbcar)
```

1. a. Expliquer ce que renvoie a("lesmathematiquessontsympathiques").

   b. Quel est le rôle de cette fonction ?

2. a. Créer une fonction alphabet qui renvoie l'effectif de chaque lettre de l'alphabet dans un texte, qui sera l'argument de la fonction.

   b. Modifier cette fonction afin qu'elle renvoie la fréquence de chaque lettre de l'alphabet dans un texte.

   c. Utiliser cette fonction pour déterminer la lettre qui semble être la plus fréquente dans un texte français donné.

3. Le codage de César consiste à décaler les lettres de l'alphabet d'un certain nombre de rangs. On a codé ainsi l'extrait d'un texte français connu et on a obtenu :

   xltecpnzcmplfdfcfylcmcpapcnspepyltepydzympnfyqczxlrpxltecpcpylcoalcwzopfclw
   wpnspwftetyelapfacpdnpwlyrlrppemzyuzfcxzydtpfcofnzcmplfbfpgzfdpepduzwtbfp
   gzfdxpdpxmwpkmplfdlydxpyetcdtgzecpclxlrpdpclaazceplgzecpawfxlrpgzfdpepdwp
   aspytiopdszepdopnpdmztdlnpdxzedwpnzcmplfypdpdpyealdopuztppeazfcxzyecpcd
   lmpwwpgztitwzfgcpfywlcrpmpnwltddpezxmpcdlacztp

   a. En utilisant les questions précédentes, conjecturer le décalage effectué pour ce codage.

   b. À l'aide de cette conjecture, compléter la fonction ci-contre afin qu'elle puisse décoder un texte donné.

   c. De quelle œuvre ce texte est-il tiré ?

```
def decodage(texte):    #Le texte est écrit entièrement
#en lettres minuscules, sans accent et sans espace
    alphabet="abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
    LT=[]
    for i in range(...):
        LT.append(alphabet[...])
    for i in range(...):
        LT.append(alphabet[...])
    textedecode=[]
    for k in range(len(texte)):
        textedecode.append(alphabet[LT.index(texte[k])])
    return("".join(textedecode))
```

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- La boucle Pour s'écrit de la manière suivante. Boucle avec un compteur k variant de a à b :

```
for k in range(a,b+1):
    instructions
```

- Créer une liste « en extension », c'est entrer un par un les éléments de la liste :

```
>>> L=['Bonjour','mardi',11,2018]
>>> L
['Bonjour', 'mardi', 11, 2018]
```

- On peut utiliser la longueur d'une liste L, c'est-à-dire le nombre d'éléments de cette liste : `len(L)`

- Le premier élément de la liste est `L[0]`, le 2e `L[1]`, etc.
- On peut ajouter un élément à la fin d'une liste :

```
>>> L=[1,2,3]
>>> L.append(4)
>>> L
[1, 2, 3, 4]
```

- L.index(n) renvoie l'indice de la première occurence de n dans la liste L.

```
>>> L=[2,4,6,8]
>>> L.index(6)
2
```

- "".joincode(L) renvoie tous les éléments de la liste L « collés » les uns aux autres.

TP 6 Bandit manchot

Objectifs
Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire et calculer la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance de la variable est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

Le bandit manchot est un jeu de machine à sous.
Lorsqu'on tire le levier, trois rouleaux tournent et s'arrêtent sur un chiffre compris entre 1 et 9 pour le rouleau le plus à gauche, entre 0 et 9 pour les deux rouleaux suivants.
Lorsque le joueur, qui a misé 1 € pour jouer, obtient trois fois le même chiffre, il gagne 70 €.
On suppose que pour chaque rouleau, on a autant de chances de tomber sur chacun des chiffres possibles, et ce, indépendamment de ce que donnent les autres rouleaux.

1 On appelle X le gain algébrique du joueur pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance μ et son écart type σ.

2 On souhaite simuler 100 échantillons de 500 parties et étudier la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et μ est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{500}}$.
Pour cela, on a commencé la feuille de calcul ci-dessous afin de simuler une partie de ce jeu.
Expliquer la formule entrée en cellule B2.

	A	B	C	D
1		Valeur prise par X		
2	Partie 1	-1	**=SI(ALEA()<1/100;69;-1)**	
3	Partie 2			
4	Partie 3			
5	Partie 4			
6	Partie 5			
7	Partie 6			

3 **a.** Simuler un échantillon de 500 parties, puis 100 échantillons de 500 parties.
b. En cellule B505, on a entré une formule qui affiche 1 lorsque la condition est vérifiée et 0 sinon.
Quelle formule a-t-on pu rentrer ?

495	Partie 494	69	-1	-1	-1	-1
496	Partie 495	-1	-1	-1	-1	-1
497	Partie 496	-1	-1	-1	-1	-1
498	Partie 497	-1	-1	-1	-1	-1
499	Partie 498	-1	-1	-1	-1	-1
500	Partie 499	-1	-1	-1	-1	-1
501	Partie 500	-1	-1	-1	-1	-1
502	m=	-0,16	-0,16	-0,16	0,12	-0,58
503	μ	-0,3				
504	σ	6,96491206				
505	écart entre m et μ est inférieur ou égal à 2σ/√500 ?	1	1	1	1	1
506	nombre de cas ou l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à 2σ/√500	98				

c. Compléter la feuille de tableur comme ci-dessus.
d. Renouveler les simulations avec la touche F9 (ou CTRL+MAJ+F9) et commenter les résultats obtenus.

TP 7 Chuck-a-luck

Objectif
Étudier la distance entre la moyenne d'un échantillon simulé de taille n d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.

Le jeu américain Chuck-a-luck consiste à parier sur un nombre de 1 à 6 puis à lancer trois dés supposés équilibrés.
Si le nombre sur lequel on a parié sort trois fois, on gagne 3 €, s'il sort deux fois, on gagne 2 €, s'il sort une fois, on gagne 1 €, et s'il ne sort pas, on perd 1 €.
Léa a choisi de parier sur le 3.

1. On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique de Léa.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G.

2. On souhaite étudier la distance entre l'espérance de G et la moyenne obtenue lors d'un échantillon simulé. Pour cela, on a commencé la feuille de calcul ci-dessous afin de simuler des parties de ce jeu.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Choix de Léa**	3						
2								
3								
4		**dé 1**	**dé 2**	**dé 3**	**Nombre de fois où le choix de Léa est sorti**	**Gain de Léa**		
5	**Partie 1**	1	6	2	0	-1	**=SI(E5=0;-1;E5)**	
6	**Partie 2**							
7	**Partie 3**							
8	**Partie 4**							
9	**Partie 5**							

   a. Quelle formule a-t-on pu entrer dans les cellules B5, C5, D5 et E5 ?
   b. Expliquer la formule entrée en cellule F5.
   c. Construire une telle feuille de calcul pour simuler 100 parties de ce jeu.
   d. Comparer la moyenne de gain de cet échantillon simulé avec l'espérance trouvée à la question 1.
   e. Augmenter le nombre d'experiences simulées et relancer plusieurs fois la simulation (F9 ou Ctrl + MAJ + F9).
   Commenter les résultats obtenus.

Boîte à outils

Tableur

- Lorsqu'on rentre une formule, comportant des noms de cellules et qu'on l'étire, le nom des cellules se « décale » si le nom de la cellule ne comporte pas de « $ ».

B	C	D	E	F	G
0	2	5	10	15	
=B1+3	=C1+3	=D1+3	=E1+3	=F1+3	
					Options de recopie incrémentée

- La fonction ABS(n) renvoie la valeur absolue de n.

- Lorsqu'on met un « $ » devant la lettre ou le nombre, par recopie vers la droite ou la gauche (ou le haut ou le bas), la référence à la colonne (ou la ligne) ne change pas.

B	C	D	E	F
0	2	5	10	15
3				
=B1+$B$2	=C1+$B$2	=D1+$B$2	=E1+$B$2	=F1+$B$2

- =SI(condition;valeur 1;valeur2) renvoie la valeur 1 si la condition est vérifiée et la valeur 2 sinon.

- =NB.SI(A100:A200;">=1") compte le nombre de cellules de la colonne A entre les lignes 100 et 200 dont le contenu est supérieur ou égal à 1.