CHAPITRE

9 Probabilités conditionnelles et indépendance

Ressources du chapitre disponibles ici : www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

Calculer des probabilités sous condition

Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace est un mathématicien et physicien français du XVIII^e et du début du XIX^e siècle, qui, avec les mathématiciens Moivre et Bayes, fut l'un des premiers à décrire la notion de probabilité conditionnelle.

Il a travaillé également dans le domaine de l'astronomie et de la mécanique. Alors que la mécanique était traitée de façon très géométrique, par Newton notamment, il en donna une approche analytique. Il fut aussi ministre de l'Intérieur durant le Consulat.

Dans son livre *Théorie analytique des probabilités*, publié en 1812, il définit une probabilité comme « une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est celui de tous les cas possibles ». Il poursuit :
« Tous nos jugements sur les choses qui ne sont que vraisemblables (et c'est le plus grand nombre) sont fondés sur un pareil rapport. La différence des données que chaque homme a sur elles, et la manière souvent erronée dont on apprécie ce rapport, donne naissance à cette foule d'opinions que l'on voit exister sur les mêmes objets. »
Pour illustrer son propos, il considère trois urnes A, B et C, dont deux ne contiennent que des boules blanches et dont l'autre ne contient que des boules noires. Une personne tire une boule de l'urne C. Si elle n'a aucune information sur la composition des urnes, la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{1}{3}$. Si elle sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{1}{2}$. Enfin, si elle sait que les urnes A et B ne contiennent que des boules blanches, tirer une boule noire est une certitude.

Expliquer le calcul des probabilités précédentes.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Probabilité d'un évènement

Un singe tape au hasard sur une touche d'un clavier où chaque touche correspond à une lettre de l'alphabet français.

Donner la probabilité qu'il tape sur :

a. une voyelle ;

b. une lettre du mot *hasard* ;

c. une voyelle du mot *hasard* ;

d. une voyelle ou une lettre du mot *hasard*.

2 Réunion et intersection

A et B sont deux évènements.

1. Si $P(\text{A}) = 0{,}5$, $P(\overline{\text{B}}) = 0{,}7$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}12$, que vaut $P(\text{A} \cup \text{B})$?

2. Si $P(\text{A}) = \frac{1}{4}$, $P(\text{B}) = \frac{3}{5}$ et $P(\text{A} \cup \text{B}) = \frac{7}{10}$, que vaut $P(\text{A} \cap \text{B})$?

3 Dé truqué

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité d'obtenir 6 dans chacune des situations suivantes.
Situation n°1 : On suppose que la probabilité d'obtenir 6 est deux fois plus grande que celle de ne pas obtenir 6.

Situation n°2 : La probabilité d'une face est proportionnelle à son numéro.

4 Simulation d'une expérience

On a écrit le script suivant en langage Python.

```python
from random import randint
jeu=randint(1,6)
if jeu==6:
    print("gagné")
else:
    print("perdu")

```

1. Quel jeu peut simuler ce script ?
Quelle est la probabilité de gagner ?

2. Modifier le script pour que la probabilité de gagner au jeu qu'il simule soit égale à $\frac{3}{4}$.

5 Tableau à double entrée

Un magasin propose deux fruits en promotion : des ananas et des bananes. On sait que parmi les 200 clients venus un certain jour :

- 92 ont acheté des ananas en promotion ;
- 113 ont acheté des bananes en promotion ;
- 61 ont profité des deux promotions.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un tableau à double entrée.

2. On interroge un client au hasard.

Calculer la probabilité des évènements suivants.

A : « Le client interrogé a acheté des bananes en promotion ».

B : « Le client interrogé n'a acheté que des bananes en promotion ».

C : « Le client interrogé n'a pas acheté d'ananas en promotion ».

D : « Le client interrogé a profité des deux promotions ».

E : « Le client interrogé a profité d'au moins une des deux promotions ».

6 Modélisation d'une expérience

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note le résultat sous la forme de trois lettres indiquant le résultat de chacun des trois tirages (par exemple FPF pour « Face », « Pile » et « Face »).

1. Dénombrer les issues possibles à l'aide d'un arbre.

2. Quelle est la probabilité de chaque issue ?

3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « Face » lors des trois lancers.

7 Tirage avec ou sans remise

Une urne contient deux boules rouges et une boule verte. On tire successivement deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur lorsqu'on remet la première boule tirée dans l'urne.

2. Reprendre la question précédente en supposant qu'on ne remet pas la première boule dans l'urne.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Fiabilité d'un test médical

Objectif
Comprendre la notion de probabilité conditionnelle.

Un test permet de dépister les personnes atteintes d'une maladie rare.
Pour étudier les performances de ce test, on a fait une étude statistique sur 5 000 personnes et obtenu les résultats suivants.

	Personnes malades	Personnes non malades
Personnes testées positives	18	300
Personnes testées négatives	2	4680

On choisit au hasard une personne étudiée et on considère les évènements suivants.
T : « La personne testée est positive ».
M : « La personne testée est malade ».

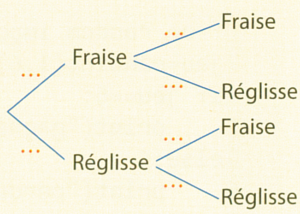
1. Calculer les probabilités $P(\mathrm{M})$, $P(\mathrm{T})$ et $P(\mathrm{T} \cap \mathrm{M})$. Interpréter les résultats obtenus.
2. Un médecin affirme que ce test a une efficacité de 90 % sur les malades.
A-t-il raison ?
3. Léa a été dépistée positive.
Doit-elle être inquiète d'être malade ? Expliquer.

Situation 2 Sachet de bonbons

Objectif
Découvrir et utiliser un arbre pondéré.

Un sachet contient six bonbons : deux au réglisse et quatre à la fraise.
On tire successivement et sans remise deux bonbons.

1. **a.** Écrire toutes les issues possibles de ce tirage. Ces issues sont-elles équiprobables ?
b. À l'aide d'un arbre de dénombrement, calculer la probabilité d'obtenir deux bonbons à la fraise.
2. **a.** Quelle est la probabilité que le premier bonbon tiré soit à la fraise ? au réglisse ?
b. On a représenté ci-contre un arbre sur lequel on veut faire figurer les probabilités de certains évènements.
Où peut-on écrire les probabilités trouvées à la question **2 a** ?



3. **a.** Le premier bonbon qui a été tiré est à la fraise.
Quelle est la probabilité que le deuxième soit aussi à la fraise ?
Où pourrait-on faire figurer cette probabilité sur l'arbre ci-contre ?
b. Compléter les autres pointillés figurant sur l'arbre.
4. **a.** Passer en couleur le chemin correspondant à l'évènement F :
« Les deux bonbons tirés sont à la fraise ».
Comment peut-on retrouver le résultat obtenu à la question **1 b** ?
b. Calculer la probabilité de l'évènement R : « Les deux bonbons tirés sont au réglisse ».
c. Comment peut-on en déduire la probabilité de l'évènement D : « Les deux bonbons tirés ont le même parfum » ?

Situation 3 Produits bio

Objectif
Découvrir la notion d'évènements indépendants.

Une chaîne d'hypermarchés souhaite réorganiser ses magasins, notamment en développant la vente de produits bio.
Pour cela, elle triple la surface de rayonnage de ce type de produits dans deux magasins pilotes.
Elle lance ensuite une grande campagne publicitaire et, pour en mesurer l'impact, réalise un sondage auprès de ses clients à la sortie de chacun des deux magasins.
Les résultats obtenus sont les suivants.

Magasin pilote n°1

	A acheté des produits bio	N'a pas acheté des produits bio
A vu la publicité	126	378
N'a pas vu la publicité	99	297

Magasin pilote n°2

	A acheté des produits bio	N'a pas acheté des produits bio
A vu la publicité	267	153
N'a pas vu la publicité	177	303

1. **a.** On choisit au hasard un client du magasin 1.
Calculer la probabilité qu'il ait acheté des produits bio.
b. On choisit au hasard un client du magasin 1 ayant vu la publicité.
Calculer la probabilité qu'il ait acheté des produits bio.
2. Réaliser une étude analogue pour le magasin 2.
3. Quelles conclusions le directeur de la chaîne d'hypermarchés peut-il tirer quant à l'impact de sa campagne publicitaire ?

2. Arbres pondérés

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

1. Règles de calcul dans un arbre pondéré

Propriétés

DÉMO en ligne

Dans un arbre pondéré :

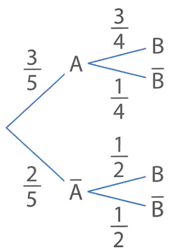
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Remarque

Un chemin passant par un évènement A puis un évènement B correspond à l'intersection de ces deux évènements, soit $A \cap B$.

Exemple

Un footballeur tire successivement deux pénaltys. A est l'évènement « Il marque le premier pénalty » et B l'évènement « Il marque le second pénalty ».
On a représenté cette expérience aléatoire sur l'arbre ci-dessous.



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

La probabilité qu'il marque deux buts est égale à $\frac{9}{20}$.

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

La probabilité qu'il marque seulement le deuxième pénalty est égale à $\frac{1}{5}$.

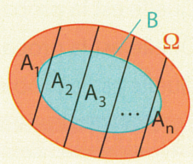
2. Formule des probabilités totales

Définition et propriété

DÉMO p. 282

Soient des évènements non vides $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de Ω, deux à deux disjoints et tels que leur réunion forme l'univers Ω.
Soit B un évènement.

- On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une **partition** de Ω.
- $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$



Remarques

- Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω. On a donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.
- Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités des chemins correspondant à cet évènement.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la formule des probabilités totales donne :

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{9}{20} + \frac{1}{5} = \frac{13}{20}$.

Exercice résolu 1 Représenter une situation par un arbre pondéré

Un fabricant de smartphones achète ses écrans chez deux fournisseurs.

- 60 % des écrans proviennent du fournisseur A, 40 % du fournisseur B.
- Le fournisseur A a un taux d'écrans défectueux de 1 %, le fournisseur B de 2 %.

On prélève au hasard un smartphone dans le stock du fabricant.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants.

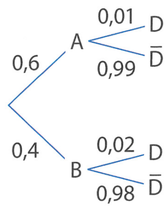
a. « Le smartphone provient du fournisseur A et est défectueux. »

b. « Le smartphone provient du fournisseur B et n'est pas défectueux. »

Solution commentée

1. On note A l'évènement « L'écran provient du fournisseur A », B l'évènement « L'écran provient du fournisseur B » et D l'évènement « L'écran est défectueux ».
D'après l'énoncé, on a $P(\text{A}) = 0{,}6$; $P(\text{B}) = 0{,}4$; $P_{\text{A}}(\text{D}) = 0{,}01$ et $P_{\text{B}}(\text{D}) = 0{,}02$.
On a donc :

$$P_{\text{A}}(\overline{\text{D}}) = 1 - P_{\text{A}}(\text{D}) = 0{,}99 \text{ et}$$
$$P_{\text{B}}(\overline{\text{D}}) = 1 - P_{\text{B}}(\text{D}) = 0{,}98.$$



2. **a.** $P(\text{A} \cap \text{D}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{D}) = 0{,}6 \times 0{,}01 = 0{,}006$
La probabilité que l'écran provienne du fournisseur A et soit défectueux est 0,006.
b. $P(\text{B} \cap \overline{\text{D}}) = P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\overline{\text{D}}) = 0{,}4 \times 0{,}98 = 0{,}392$
La probabilité que l'écran provienne du fournisseur B et ne soit pas défectueux est 0,392.

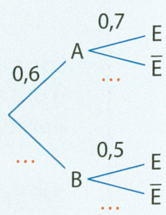
EXERCICE 13 p. 293

Exercice résolu 2 Utiliser la formule des probabilités totales

Une station de ski des Pyrénées propose deux types de forfaits.

- Le forfait A comprend la journée de ski et la visite de l'observatoire.
- Le forfait B comprend uniquement la journée de ski.

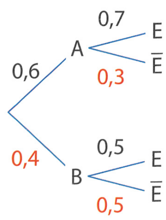
60 % des skieurs choisissent le forfait A et, parmi eux, 70 % sont étrangers. 50 % des skieurs ayant choisi le forfait B sont étrangers. On note E l'évènement « Le skieur est étranger ».



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. On interroge un skieur au hasard.
Calculer la probabilité qu'il soit étranger.

Solution commentée

1. On complète l'arbre en utilisant le fait que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.



2. Les évènements A et B forment une partition de l'univers.
Donc $P(\text{E}) = P(\text{A} \cap \text{E}) + P(\text{B} \cap \text{E})$
$= P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{E}) + P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{E})$
$= 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}5$
$= 0{,}62$
La probabilité que le skieur soit étranger est égale à 0,62.

EXERCICE 18 p. 293

Connaître le cours

3. Indépendance

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

1. Évènements indépendants

Définition

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

DÉMO en ligne

Propriété

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

Remarques

- $P_B(A) = P(A)$ signifie que la réalisation ou non de l'évènement B n'a pas d'influence sur la réalisation de l'évènement A.
- Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. Deux évènements sont incompatibles lorsque $P(A \cap B) = 0$, ce qui signifie que les évènements A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

DÉMO p. 282

Propriété

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Remarque

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants, ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

2. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Exemples

On tire au hasard successivement deux cartes dans un jeu de cartes et on note les deux cartes obtenues.
Dans l'hypothèse où l'on remet la carte tirée dans le paquet, les deux tirages sont indépendants.
Sinon le contenu du paquet après le premier tirage dépend de la carte tirée en premier et les deux tirages ne sont pas indépendants.

Propriété (admise)

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'entre eux.

Exemple

On lance successivement deux fois un dé cubique non truqué. Il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes, et la probabilité d'obtenir deux fois le numéro 6 est égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Exercice résolu 1 Étudier l'indépendance de deux évènements

Une urne contient quatre jetons rouges indiscernables au toucher numérotés de 1 à 4, trois jetons verts numérotés de 5 à 7 et un jeton noir numéroté 8.

On tire au hasard un jeton dans l'urne et on considère les évènements A : « Obtenir un numéro pair », B : « Obtenir un jeton rouge » et C : « Obtenir un jeton vert ».

1 Calculer $P(\text{A})$.

2 **a.** Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier à l'aide de la définition.

b. Reprendre la question précédente avec les évènements A et C.

3 Retrouver les résultats de la question **2** en calculant $P_{\text{B}}(\text{A})$ et $P_{\text{C}}(\text{A})$.

Solution commentée

1 Il y a quatre jetons dont le numéro est pair, donc $P(\text{A}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2 **a.** A ∩ B est l'évènement « Obtenir un numéro pair et rouge », donc $P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$P(\text{B}) = \frac{1}{2}$, donc $P(\text{A}) \times P(\text{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = et $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

Les évènements A et B sont indépendants.

b. A ∩ C est l'évènement « Obtenir un numéro pair et vert », donc $P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{1}{8}$.

$P(\text{C}) = \frac{1}{8}$ donc $P(\text{A}) \times P(\text{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ donc $P(\text{A} \cap \text{C}) \neq P(\text{A}) \times P(\text{C})$.

Les évènements A et C ne sont pas indépendants.

3 Parmi les quatre jetons rouges, il y en a deux dont le numéro est pair. Parmi l'ensemble des huit jetons, il y en a quatre dont le numéro est pair.

Ainsi, $P_{\text{B}}(\text{A}) = \frac{1}{2} = P(\text{A})$.

Le fait que le jeton soit rouge n'influe pas sur la réalisation de l'évènement A : les évènements A et B sont indépendants.

En revanche, parmi les 3 jetons verts, seul l'un d'entre eux possède un numéro pair.

Ainsi, $P_{\text{C}}(\text{A}) = \frac{1}{3}$ donc $P_{\text{C}}(\text{A}) \neq \text{P}(\text{A})$: les évènements A et C ne sont pas indépendants.

EXERCICE 27 p. 294

Exercice résolu 2 Étudier une répétition d'expériences aléatoires

Dans une population, 13 % des personnes sont gauchères. On interroge au hasard deux individus et on suppose la population suffisamment importante pour considérer ces deux épreuves indépendantes.

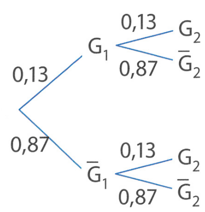
1 Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2 Calculer la probabilité que les deux personnes soient gauchères.

3 Calculer la probabilité qu'exactement l'une de ces personnes soit gauchère.

Solution commentée

1 La probabilité qu'une personne interrogée au hasard soit gauchère est égale à 0,13.
On a donc $P(\text{G}_1) = P(\text{G}_2) = 0{,}13$ et $P(\overline{\text{G}_1}) = P(\overline{\text{G}_2}) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87$.



2 La probabilité que les deux personnes soient gauchères est :

$$P(\text{G}_1 \cap \text{G}_2) = 0{,}13 \times 0{,}13 = 0{,}0169.$$

3 La probabilité qu'exactement l'une de ces personnes soit gauchère est $P(\text{G}_1 \cap \overline{\text{G}_2}) + P(\overline{\text{G}_1} \cap \text{G}_2) = 0{,}13 \times 0{,}87 + 0{,}87 \times 0{,}13 = 2 \times 0{,}13 \times 0{,}87 = 0{,}2262$.

EXERCICE 43 p. 297

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont également.

Démonstration

$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$
De plus, comme les évènements A et B sont indépendants, on a :

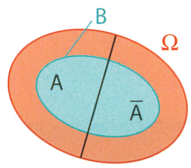
$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}).$$

Ainsi $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$
et donc $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \times (1 - P(\mathrm{A})) = P(\mathrm{B}) \times P(\overline{\mathrm{A}})$.
On conclut alors que les évènements $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants.

1. Justifier que $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.
2. Expliquer pourquoi $P(\mathrm{B}) \times (1 - P(\mathrm{A})) = P(\mathrm{B}) \times P(\overline{\mathrm{A}})$.

Rédiger une démonstration

1. On souhaite démontrer la propriété suivante, dite « formule des probabilités totales ».



Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.
- Les évènements A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de Ω.
- $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Que peut-on dire des évènements $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$?
- Expliquer pourquoi la réunion de ces deux évènements est égale à B.
- Conclure.

2. On souhaite démontrer les propriétés suivantes.

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
- $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
- $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de ces propriétés.
- Démontrer la première propriété en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle de deux façons différentes.
- Justifier que $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$.
- En déduire que $1 = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}})$.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 Soient A et B deux ensembles.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. $A \cap B \subset A$

b. $A \cup B \subset B$

c. $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$.

d. $A \cap B = B$ si et seulement si $B \subset A$.

2 Soient A et B deux ensembles.
Dire si les inclusions et les égalités suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

b. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

3 Dans chacun des cas suivants, décrire les évènements $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$.

a. On lance un dé à six faces.
On définit les évènements suivants.
A : « Le numéro est pair ».
B : « Le numéro est un multiple de 3 ».

b. On tire une boule dans une urne qui contient trois boules jaunes et cinq boules rouges.
On définit les évènements suivants.
A : « Tirer une boule rouge ».
B : « Tirer une boule jaune ».

c. On achète un billet de loterie parmi une série de 100 billets numérotés de 00 à 99.
On définit les évènements suivants.
A : « Le billet se termine par un 5 ».
B : « Le billet commence par un 3 ».

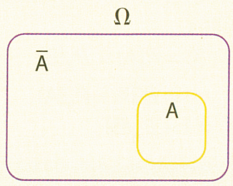
Utiliser l'inclusion et l'égalité

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B, et on note $A \subset B$, lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

Les ensembles A et B sont égaux lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.

Ensemble complémentaire

Le complémentaire d'un ensemble A dans Ω, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de Ω n'appartenant pas à A.



Conjonctions « Et » et « Ou »

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire.

• L'évènement « A et B » est réalisé si A et B sont réalisés, et il n'est pas réalisé si au moins un des évènements A et B n'est pas réalisé.

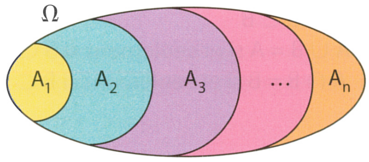
• L'évènement « A ou B » est réalisé si au moins un des deux évènements A et B est réalisé, et il n'est pas réalisé si aucun des évènements A et B n'est réalisé.

Apprendre par le texte & la vidéo

5 VIDÉOS DE COURS

Partition de l'univers

On dit que des évènements non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Ω constituent une **partition** de Ω lorsque ces évènements sont deux à deux disjoints et que leur réunion constitue Ω.



Probabilité conditionnelle

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

Définition

Soient A et B deux évènements avec $P(\text{A}) \neq 0$

$$P_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{A})}$$

$P_{\text{A}}(\text{B})$ se lit « P de B sachant A ».

Propriétés

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

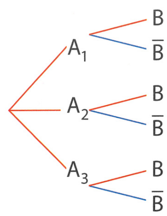
- $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{B})$
  $= P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{A})$
- $P_{\text{A}}(\overline{\text{B}}) = 1 - P_{\text{A}}(\text{B})$

Formule des probabilités totales

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.
Soient B un évènement et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements formant une partition de Ω.

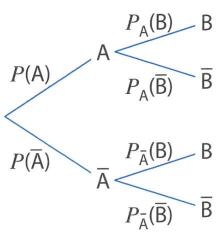
$$P(\text{B}) = P(A_1 \cap \text{B}) + P(A_2 \cap \text{B}) + \dots + P(A_n \cap \text{B})$$

Dans un arbre, la probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins correspondant à cet évènement.



Arbre pondéré

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.



Propriétés

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur ce chemin.

Indépendance

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

Définitions

- Deux **évènements A et B sont indépendants** lorsque $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.
- Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit que c'est une succession **d'épreuves indépendantes**.

Propriétés

A et B deux évènements de probabilités non nulles.

- A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_{\text{B}}(\text{A}) = P(\text{A})$
  $\Leftrightarrow P_{\text{A}}(\text{B}) = P(\text{B})$
- Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{\text{A}}$ et B le sont également.

Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 8 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que :

$$P(\text{A}) = \frac{1}{4},\ P(\text{B}) = \frac{1}{3} \text{ et } P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{1}{8}.$$

• Calculer $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P_{\text{B}}(\text{A})$.

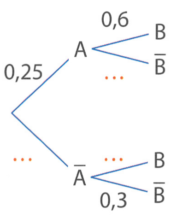
2 Un atelier fabrique deux types de puces électroniques : type A et type B.
On prélève au hasard un lot de 100 puces et on regarde si elles ont un défaut ou pas.
Les résultats sont donnés par le tableau suivant.

	Type A	Type B	Total
Défaut	5	12	17
Sans défaut	35	48	83
Total	40	60	100

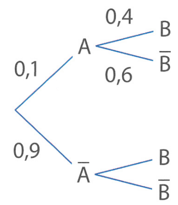
Calculer la probabilité que la puce prélevée soit :
a. de type A ;
b. avec un défaut ;
c. de type A sachant qu'elle a un défaut.

3 Une urne contient quatre boules bleues et cinq boules noires indiscernables au toucher. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise.
On note A l'évènement « La première boule tirée est bleue » et B l'évènement « La deuxième boule tirée est noire ».
• Calculer $P(\text{A})$ et $P_{\text{A}}(\text{B})$, puis en déduire $P(\text{A} \cap \text{B})$.

4 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.
a. Recopier et compléter cet arbre.
b. En déduire $P(\text{A} \cap \text{B})$ et $P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$.



5 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



On donne $P(\text{B}) = 0{,}31$.
• Calculer la probabilité de A sachant B.

6 Soient A et B deux évènements indépendants d'une même expérience aléatoire tels que $P(\text{A}) = \frac{3}{7}$ et $P(\text{B}) = \frac{2}{5}$.
• Calculer $P(\text{A} \cap \text{B})$ et $P(\text{A} \cup \text{B})$.

7 Soient A et B deux évènements indépendants d'une même expérience aléatoire tels que $P_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{1}{6}$.
• Calculer $P(\text{B})$ et $P_{\text{B}}(\text{A})$.

8 Léo a acheté deux tickets pour deux jeux de grattage différents. La probabilité qu'il gagne au premier jeu est de $\frac{1}{3}$, et celle qu'il gagne au deuxième est de $\frac{1}{4}$. Les évènements « Gagner au premier jeu » et « Gagner au deuxième jeu » sont indépendants.
Quelle est la probabilité que Léo :
• gagne aux deux jeux ?
• gagne seulement au premier jeu ?
• ne gagne à aucun des jeux ?

CORRIGÉS DES EXERCICES

TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Une première marche aléatoire

Objectif
Simuler une marche aléatoire.

Un kangourou se trouve en un point d'une route déserte d'Australie occidentale.
À chaque seconde, il saute d'un mètre vers l'avant ou d'un mètre vers l'arrière avec la même probabilité.

1. Recopier et compléter la fonction `mille_sauts` ci-dessous qui simule le déplacement du kangourou et qui renvoie la position du kangourou après avoir effectué mille sauts.

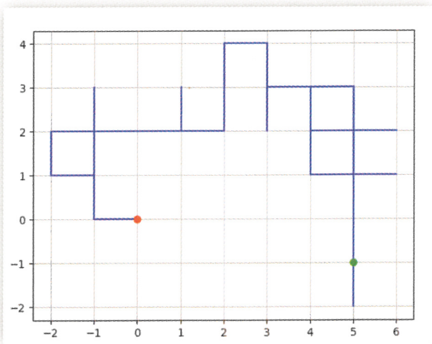
```python
from random import random
def mille_sauts():
    position=0
    for i in ... :
        if ... :
            position=position+1
        else:
            position=position-1
    return position
```

2. Exécuter la fonction `mille_sauts` plusieurs fois.
Quelle est la plus grande valeur renvoyée ?
3. En utilisant la fonction précédente, écrire le script d'une fonction `cent_metres` qui simule n expériences de mille sauts et qui renvoie le nombre de fois où le kangourou a avancé de plus de 100 mètres à la fin des mille sauts lors de ces n expériences.
4. Exécuter la fonction `cent_metres` pour $n = 10\,000$. Commenter.

TP 2 Une seconde marche aléatoire

Objectif
Représenter une marche aléatoire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On place un robot à l'origine du repère.
À chaque seconde, le robot se déplace de façon aléatoire en effectuant une translation de vecteur $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$ ou $-\vec{j}$, chaque déplacement ayant la même probabilité.
On suppose que l'expérience dure n secondes, où n est un entier naturel différent de 0.
Juliette a écrit une fonction `graphique`, d'argument n, qui simule le déplacement du robot au cours du temps, affiche son déplacement dans le repère et affiche son point d'arrivée en vert.
Elle a lancé son algorithme pour $n = 50$ et obtenu l'affichage ci-contre.
Dans son script, Juliette a stocké les abscisses des points du graphique dans une liste `abscisse` et les ordonnées dans une liste `ordonnee`.

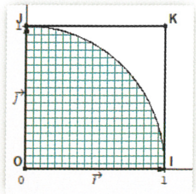


1. Quelle est la première valeur à mettre dans la liste `abscisse` ? dans la liste `ordonnee` ?
2. Lors de sa simulation, quel a été le premier déplacement du robot ? En quel point se trouve le robot 50 secondes après le début de l'expérience ? En déduire `abscisse[1]`, `ordonnee[1]`, `abscisse[50]`, `ordonnee[50]`.
3. Retrouver le script de Juliette.
4. À l'aide de la fonction `graphique`, simuler la marche aléatoire du robot sur une journée complète.

TP 3 Une approximation de π par la méthode de Monte-Carlo

Objectif
Simuler une expérience aléatoire.

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le carré $OIKJ$ dessiné ci-contre.
On a tracé dans ce carré le quart de disque de centre O et de rayon 1.



1 **a.** Quelle est la probabilité qu'un point M pris au hasard dans ce carré se trouve dans le quart de disque ?

N ← 200
Q ← 0
Pour i allant de 1 à N
  $x \leftarrow$ un nombre aléatoire entre 0 et 1
  $y \leftarrow$ un nombre aléatoire entre 0 et 1
  Si $x^2+y^2<1$ alors
    Q ← Q + 1
Fréquence ← Q/N

b. On considère l'algorithme ci-contre.
À quoi correspondent les variables N et Q ?
Expliquer l'instruction de la sixième ligne.
À quelle valeur correspond la variable Fréquence à l'issue de l'algorithme ?

c. Comment modifier cet algorithme afin d'obtenir une approximation de π ?

d. Programmer en Python la fonction Montecarlo qui prend en argument le nombre N de points à générer aléatoirement et renvoie l'approximation correspondante de π. La tester pour différentes valeurs de N.

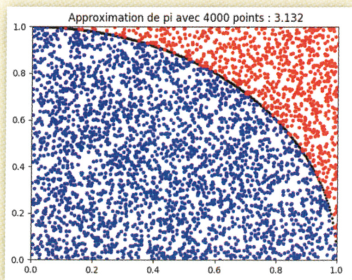
2 On souhaite visualiser la simulation faite précédemment.

a. Pour cela, on commence par taper les instructions ci-contre. Expliquer le rôle de ces différentes instructions.

```python
import math
import random
import matplotlib.pyplot as plt

plt.axis(xmin=0,xmax=1,ymin=0,ymax=1)
ListeX=[x/300 for x in range(301)]
ListeY=[math.sqrt(1-x**2) for x in ListeX]
plt.plot(ListeX,ListeY,"k.",ms=4)
plt.show()
```

b. Programmer la fonction Montecarlo_graph qui prend en argument le nombre de points à générer aléatoirement et renvoie un graphique comme ci-contre (afin de gagner en rapidité d'exécution, on construira les listes de points avant de les afficher).



3 En s'inspirant de la méthode utilisée ci-dessus, programmer une fonction aire qui prend en argument le nombre de points à générer et renvoie une approximation de l'aire du domaine délimité par la parabole d'équation $y=x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Créer une liste vide : `L=[]`
- Générer une liste L de n valeurs en utilisant une *expression* :
  `L=[`*expression* `for x in range(n)]`
  Ajouter un nombre m à la fin d'une liste L :
  `L.append(m)`
- `random()` génère un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1
- Afficher un repère :
  `plt.axis(xmin,xmax,ymin,ymax)`
- Afficher des points dont les abscisses sont dans ListeX, les ordonnées dans ListeY :
  `plt.plot(ListeX,ListeY,"k.",ms=4)`
  (la marque est un point, ms=4 donne l'épaisseur du point, le code de la couleur est k (noir), r (rouge), b (bleu), g (vert)…)
- Afficher le graphique (à écrire à la fin du programme) :
  `plt.show()`

TP Outils numériques

TP 4 Paradoxe du duc de Toscane TABLEUR

Objectif
Simuler à l'aide d'un tableur.

À la cour de Florence, au XVII^e siècle, de nombreux jeux de société étaient pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9.

1 On veut réaliser une feuille de tableur comme ci-dessous pour effectuer une simulation de 100 lancers des trois dés.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	Lancer n°	Dé n°1	Dé n°2	Dé n°3	Somme		Nombre	Fréquence d'apparition
4	1	3	6	1	10		9	0,09
5	2	1	5	4	10		10	0,13
6	3	3	2	4	9			
7	4	1	1	6	8			
8	5	3	1	3	7			
9	6	6	4	4	14			
10	7	4	5	6	15			
11	8	1	2	1	4			

a. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule B4 pour simuler le lancer d'un dé ?
Étirer alors cette formule vers la droite puis vers le bas.
b. Quelle formule doit-on entrer dans les cellules H4 et H5 pour obtenir les fréquences d'apparition du 9 et du 10 ?
c. Augmenter le nombre de lancers, et appuyer sur F9 pour obtenir d'autres simulations.
Les résultats obtenus confirment-ils l'observation faite par le duc de Toscane ?

2 **a.** À l'aide d'un arbre, dénombrer le nombre de tirages possibles.
b. Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9, puis celle d'obtenir une somme égale à 10.
c. D'où vient le paradoxe ?

TP 5 Maladie rare et faux positif TABLEUR

Objectifs
Simuler à l'aide d'un tableur et utiliser des fonctions logiques.

Dans une population, une personne sur 1 000 est atteinte d'une maladie rare.
Un laboratoire propose un test de dépistage et affirme que celui-ci est positif dans 99 % des cas si la personne est atteinte de la maladie, et dans seulement 0,1 % des cas si la personne ne l'est pas. On veut vérifier si ce test est sûr.

1 Réaliser une feuille de calcul comme ci-dessous afin de faire une simulation sur 1 000 individus.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	individu n°	malade (M) ou sain (S)	test positif(+) test négatif(-)		Nombre de tests positifs	Nombre d'individus malades et ayant un test positif	Fréquence des individus malades sachant qu'ils ont un test positif
4	1	S	-		4	3	0,750
5	2	S	-				
6	3	S	-				
7	4	S	-				
8	5	S	-				
9	6	S	-				

a. Pour simuler qu'une personne est malade avec une probabilité de 0,001, entrer la formule =SI(ALEA()<=0,001;"M";"S").
b. Proposer des formules pour les cellules C4, E4, F4 et G4.

2 À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est positif.
Que penser du test ?

TP 6 Répétition de lancers de pièce de monnaie TABLEUR

Objectif
Simuler une répétition d'épreuves indépendantes.

On lance deux fois une pièce de monnaie qui a deux fois plus de chances de tomber sur « Pile » que sur « Face ». On s'intéresse au nombre de « Face » obtenues.
Dans la feuille de calcul ci-dessous, on a simulé plusieurs fois cette expérience aléatoire.

A2 =SI(ALEA()<2/3;0;1)

	A	B	C	D	E	F
1	Lancer 1	Lancer 2	Total	Fréquence de la valeur 0	Fréquence de la valeur 1	Fréquence de la valeur 2
2	0	0	0			
3	0	0	0			
4	0	1	1			
5	0	1	1			
6	1	0	1			
7	1	0	1			

1. Expliquer la formule écrite dans la cellule A2.
2. **a.** Sur un tableur, recopier cette formule dans la cellule B2.
b. Calculer dans la cellule C2 le nombre de « Face » obtenues à l'issue des deux lancers.
Renouveler l'expérience avec la touche F9.
Quelle semble être la valeur la plus fréquente dans la cellule C2 ? la moins fréquente ?
3. **a.** Simuler 1 000 expériences aléatoires dans la plage A2:C1001.
b. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D2 pour calculer la fréquence de la valeur 0 dans la colonne C ?
c. Calculer de même, dans la cellule E2, la fréquence d'apparition de la valeur 1, et, dans la cellule F2, la fréquence d'apparition de la valeur 2.
d. Quel est le nombre de « Face » qui semble être le plus probable lors de cette expérience ?
4. À l'aide d'un arbre, valider ou infirmer le résultat conjecturé dans la question précédente.

Boîte à outils

Tableur

- Appliquer les critères aux cellules de plusieurs plages et compter le nombre de fois où tous les critères sont remplis :
=NB.SI.ENS(plage_critère1;critère1;plage_critère2
critère2 ;…)
- Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1 : ALEA()
- Générer un nombre entier aléatoire compris entre Min et Max :
=ALEA.ENTRE.BORNES(Min;Max)
- Afficher la valeur maximale des nombres de la plage : MAX(Plage)
- Spécifier un test logique à effectuer : SI
- Renvoyer vrai si un des arguments est vrai lors d'un test logique : OU
- Renvoie vrai si tous les arguments d'un test logique sont vrais : ET
Ces fonctions peuvent être imbriquées ; par exemple :
=SI(OU(ET(1re condition;2e condition);ET(1re condition;
2e condition));affichage si vrai; affichage si faux)