Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1 **1.** Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(-1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur du plan.
Le vecteur $\vec{n}$ est-il normal à $\mathcal{D}$?
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(-1\,;2)$ et le point $B(0\,;-1)$.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal de $\mathcal{D}$?
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-5x+7y-2=0$.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal de $\mathcal{D}$?

2 On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A\ (-2\,;1)$ et de rayon 3.
1. Le point $O\ (0\,;0)$ est-il situé sur le cercle ?
2. Même question pour le point $B\ (3\,;3)$.

3 Déterminer une équation de l'axe de symétrie des paraboles définies par les équations suivantes.
1. $y=6x^2-3x+1$
2. $y=-x^2-x+3$
3. $y=x^2+12$
4. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x+6$

4 Dire si chacune des équations suivantes est celle d'un cercle. Si oui, préciser les coordonnées de son centre et son rayon.
1. $x^2+y^2-2=0$
2. $(x-1)^2+(y+3)^2+4=0$
3. $x^2+y^2+2=1$
4. $x^2+2x+y^2-2y=-2$

5 On considère la parabole d'équation $y=-x^2-x+3$.
• Déterminer l'ordonnée du sommet de la parabole.

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

6 Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et passant par le point $A\,(4\,;3)$.
1. Déterminer une équation de d.
2. Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d passant par A.
3. Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à d et passant par l'origine du repère.

7 Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne est $3x-5y+1=0$.
Soit $\mathcal{D}'$ la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ qui passe par l'origine du repère.
• Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles perpendiculaires ?

8 On considère les trois droites d'équations suivantes.
$d_1 : x-2y+7=0$
$d_2 : y=3-8x$
$d_3 : y=1-2x$
• Justifier que les points d'intersection de ces trois droites sont les sommets d'un triangle rectangle.

9 Soient deux points $A\,(1\,;2)$ et $B\,(-2\,;-3)$.
1. Déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon 3.
2. Déterminer une équation du cercle de centre $I\,(5\,;-3)$ et passant par le point $A\,(2\,;1)$.
3. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

10 On considère deux paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dont les équations sont données ci-dessous.
$\mathcal{P}_1 : y=x^2+2x+1$
$\mathcal{P}_2 : y=-2x^2+4x-3$
1. Calculer les coordonnées du sommet de chacune des paraboles.
2. En déduire le nombre de points d'intersection entre chaque parabole et l'axe des abscisses.

11 Soit Δ une droite du plan. On considère le point $A\,(2\,;-3)$ dont on note H le projeté orthogonal sur Δ.
• Calculer les coordonnées du point H dans les cas suivants.
• $\Delta : x=1$
• $\Delta : y=-1$
• $\Delta : 2x-3y=0$

12 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x-y+1=0$. Le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ de chaque point de la colonne de gauche se trouve dans la colonne de droite.
• Retrouver les paires de points associés.

$A\,(3\,;0)$	$R\,(2\,;3)$
$B\,(0\,;-1)$	$S\,(-1\,;0)$
$C\,(2\,;-1)$	$T\,(0\,;1)$
$D\,(4\,;1)$	$U\,(1\,;2)$

13 Le point $C\,(1{,}5\,;2)$ appartient-il à l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y=x^2-3x+1$?

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. La droite passant par le point $A(2\,;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne $-2x+y+1=0$.

2. Le sommet de la parabole d'équation $y=-5x^2+7x$ est situé au-dessus de l'axe des abscisses.

3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $3x-4y+10=0$. Soit $\mathscr{D}'$ la droite d'équation $3x+4y-3=0$. Tout vecteur normal de $\mathscr{D}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$.

4. L'intersection entre le cercle de centre $A(2\,;4)$ et de rayon 3 et la droite d'équation $x=5$ est réduite à un point.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Lors d'un coup d'approche, la trajectoire d'une balle de golf peut être modélisée par une parabole. La balle part du sol, atteint une hauteur maximale de 10 mètres et retombe sur le sol 90 mètres plus loin. À 60 mètres du point de départ et sur sa trajectoire, la balle rencontre un arbre de 6 mètres de haut.

- La balle passera-t-elle au-dessus de cet obstacle ?

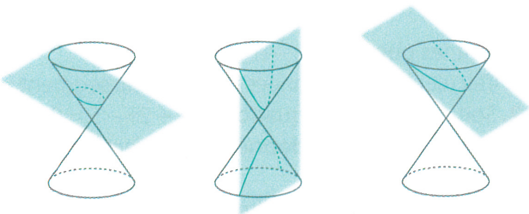
Exposé

voir p. 240

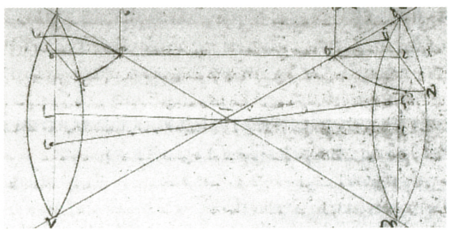
Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Les courbes coniques tirent leur nom du fait qu'elles ont été définies comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan. C'est Apollonius qui leur a attribué leurs noms actuels dans son traité *Éléments des coniques*.

1. Rechercher les noms des trois coniques et les associer aux différentes figures obtenues ci-dessous.



2. Identifier parmi les sections ci-contre celle qui correspond à l'image extraite du traité d'Apollonius.



Exercices

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Vecteur normal

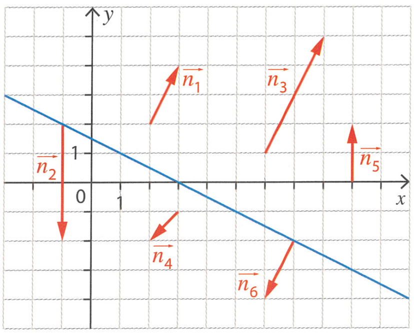
1 **Calculer**

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$ si un vecteur directeur est :

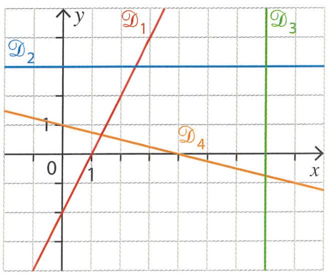
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-2}{5}\end{pmatrix}$

2 Parmi les vecteurs représentés ci-dessous, lesquels sont des vecteurs normaux à la droite $\mathscr{D}$? Justifier graphiquement.



3 Déduire du graphique ci-dessous les coordonnées d'un vecteur normal à chacune des quatre droites. Justifier.



4 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathscr{D} : 4x - y + 8 = 0$

2. $\mathscr{D} : -2x + 5y - 3 = 0$

3. $\mathscr{D} : x - y = 0$

4. $\mathscr{D} : y = \frac{1}{3}x + 2$

5. $\mathscr{D} : y = -3$

5 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

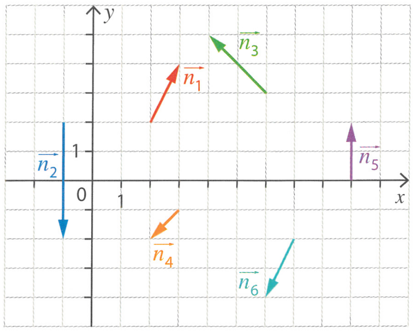
1. $A(-3 ; 2)$ et $B(3 ; -2)$.

2. $A(0 ; -1)$ et $B(-3 ; -12)$.

3. $A(1 ; -3)$ et $B(3{,}23 ; -4{,}5)$.

6 **Représenter**

Reproduire la figure ci-dessous et tracer six droites telles que chaque vecteur représenté soit normal à l'une de ces droites.



7 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$ dans les deux cas suivants.

1. $\mathscr{D}$ est la droite passant par le point $A(-5 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

2. $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.

8 **Calculer**

En utilisant les vecteurs normaux, déterminer dans chaque cas si les droites suivantes sont perpendiculaires.

1. $d : x - 3y + 8 = 0$ et $d' : 3x - y + 2 = 0$.

2. $d : 2x + y + 4 = 0$ et $d' : 4x - 8y - 3 = 0$.

3. $d : y = 3x$ et $d' : -3x - y + 5 = 0$.

4. $d : 2x - (1 + \sqrt{3})y - 5 = 0$ et $d' : x - (1 - \sqrt{3})y + 2 = 0$.

Équation de droite

9 Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation cartésienne de la droite Δ qui passe par le point A et qui a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$.

1. $A(-1 ; 2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix}$. **2.** $A(10 ; -4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

3. $A(5 ; -2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$. **4.** $A(0 ; -7)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

10 Soient les points $B(4 ; -1)$ et $C(2 ; 8)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu du segment $[BC]$.

2. Soit Δ la droite d'équation $-3x + 2y - 5 = 0$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal de Δ.

3. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{n}$?

4. Δ est-elle la médiatrice du segment $[BC]$?

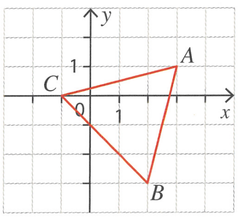
11 Soient les points $A(8\,;-5)$, $B(-1\,;1)$ et $C(-3\,;4)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC). On souhaite déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
1. Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de (BC).
2. Que représente un vecteur directeur de (BC) pour la droite $\mathcal{D}$?
3. En déduire que $\mathcal{D}$ a une équation du type $-2x + 3y + c = 0$, où c est un réel.
4. Conclure en utilisant les coordonnées du point A.

12 Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $K(-2\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
• Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(1\,;1)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

13 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-4x + 2y = 0$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $B(0\,;-2)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $C(3\,;3)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.

14 On considère la droite Δ qui passe par le point $A(2\,;-4)$ et qui est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $-x + 2y + 21 = 0$.
• Le point $E(-2\,;5)$ appartient-il à Δ ?

15 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Raisonner, calculer, représenter
Soient trois points $A(3\,;1)$, $B(2\,;-3)$ et $C(-1\,;0)$.
1. Déterminer une équation de la hauteur issue de A.
2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.



3. Construire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et vérifier les résultats.

16 Soient $D(3\,;-2)$ et $D'(5\,;6)$ deux points du plan.
Soit Δ la droite d'équation $y = x - 2$.
1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[DD']$.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite Δ.
3. Le vecteur $\overrightarrow{DD'}$ est-il colinéaire au vecteur normal de Δ ?
4. D' est-il le symétrique de D par rapport à la droite d'équation $y = x - 2$?

Équation de parabole

17 On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne :
$$x - y - 2 = 0.$$
Soient $A(4\,;2)$ et $H(1\,;-1)$ deux points du plan.
1. Vérifier que le point H appartient à la droite Δ.
2. Le vecteur $(\overrightarrow{AH})$ est-il un vecteur normal à Δ ?
3. Le point H est-il le projeté orthogonal de A sur Δ ?

18 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Soit Δ la droite d'équation $3x + y - 2 = 0$.
1. Associer à chaque point de la colonne de droite son projeté orthogonal sur Δ, dans la colonne de gauche.

$A(-8\,;6)$	$R(-1\,;5)$
$B(0\,;2)$	$S(-2\,;8)$
$C(2\,;6)$	$T(0\,;2)$

2. Vérifier les résultats en effectuant les tracés sur un logiciel de géométrie dynamique.

19 Soit Δ la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$. Soit H le point de coordonnées $(-1\,;0)$.
1. Vérifier que le point H appartient à la droite Δ.
2. Déterminer les coordonnées d'un point du plan dont H est le projeté orthogonal sur Δ.

20 Déterminer une équation de l'axe de symétrie de chacune des paraboles définies par les équations suivantes
• $y = 5x^2 - 3x + 1$
• $y = -x^2 - x$
• $y = 3x^2 + 9$
• $y = (x - 2)(3x - 1)$
• $y = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + 1$

21 Indiquer dans chacun des cas suivants si le point B appartient à l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P}$.
• $B(-1\,;3)$ et $\mathcal{P} : y = x^2 + 2x - 1$.
• $B(5\,;-1)$ et $\mathcal{P} : y = x^2 - 5x - 12$.
• $B(4\,;4)$ et $\mathcal{P} : y = 2x^2 + 16x - 9$.
• $B(-2\,;2)$ et $\mathcal{P} : y = 35x^2 + 140x - 77$.

22 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux paraboles d'équations :
$$\mathcal{P} : y = x^2 + 2x + 1$$
$$\text{et } \mathcal{P}' : y = -2x^2 + 4x - 3.$$
• Pour chacune de ces paraboles, déterminer les coordonnées de son sommet et en déduire le nombre de points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.

23 CALCULATRICE
On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -3x^2 + x + 2$.
1. Afficher $\mathcal{P}$ à la calculatrice.
2. Afficher les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des ordonnées.
3. $\mathcal{P}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, afficher les coordonnées du ou des point(s).
4. Retrouver les coordonnées des différents points par le calcul.

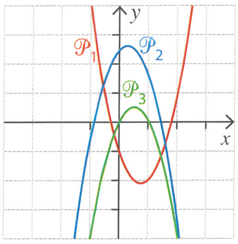
24 On considère la parabole d'équation :

$$y = -3x^2 + x - 2.$$

1. Déterminer les coordonnées du point de la parabole d'abscisse -1.

2. La parabole admet-elle des points d'ordonnée 4 ?

25 Parmi les paraboles suivantes, laquelle a pour équation $y = -x^2 + x + 5$? Justifier.



26 On considère une parabole $\mathcal{P}$ qui passe par les points $A(-2\,;4)$ et $B(3\,;4)$.

• Déterminer une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

27 On considère une parabole $\mathcal{P}$ qui passe par le point $A(3\,;-2)$ et dont une équation de l'axe de symétrie est $x = 7$.

• Déterminer les coordonnées d'un autre point de $\mathcal{P}$.

28 Déterminer les équations de deux paraboles distinctes qui admettent la droite d'équation $x = -3$ pour axe de symétrie.

29 Déterminer une équation de la parabole de sommet $S\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ qui passe par le point $T(0\,;-1)$.

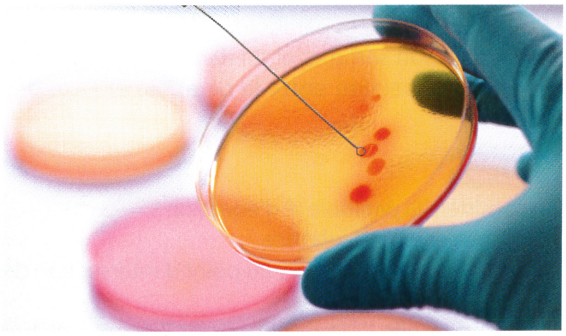
30 On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 4x - 3$.

• $\mathcal{P}$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$? Justifier.

31 **Prolifération bactérienne**

Modéliser, calculer

Un scientifique étudie la prolifération d'un certain type de bactéries. Il modélise le nombre de bactéries en millier, par une fonction N du temps exprimé en seconde définie par $N(t) = -3t^2 + 69t + 150$.



1. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il maximal ?

2. Combien y aura-t-il alors de bactéries ?

32 **Impesanteur**

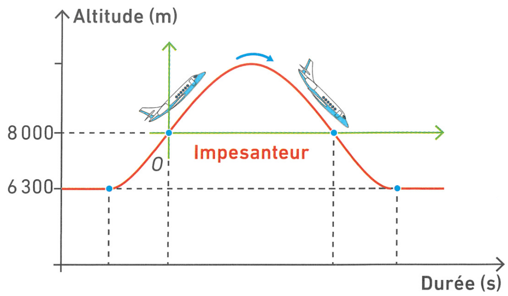
Le CNES réalise depuis 1998 des expériences scientifiques et technologiques en situation à bord de l'Airbus A300-Zéro G. L'avion effectue une série de 30 paraboles pendant lesquelles on accède à des conditions semblables à l'absence de pesanteur (appelée maintenant impesanteur plutôt qu'apesanteur) ressentie dans l'espace.

Dans la pratique, l'appareil, d'abord en vol horizontal à 6 300 m d'altitude, se cabre à 45° puis descend. Il reprend alors son vol horizontal à 6 300 m pour enchaîner une autre parabole.

On se place dans le repère d'origine O tracé en vert sur le schéma ; l'équation de la parabole d'impesanteur est :

$$y = -4{,}48t^2 + 112t,$$

où t est le temps en seconde.



1. L'avion amorce sa trajectoire en forme de parabole. Au bout de combien de secondes atteint-il le sommet de celle-ci ?

2. Quelle est la durée de l'état d'impesanteur ? Est-il possible de réaliser une expérience qui dure 20 secondes ?

Équation de cercle

33 On considère des cercles dont les équations sont données ci-dessous.

Pour chacun d'entre eux, déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$

2. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$

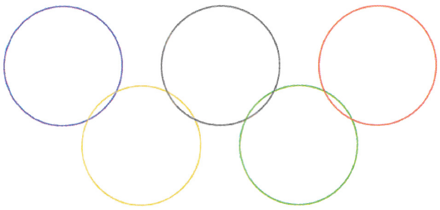
3. $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$

4. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 12$

34 Soit B le point du plan de coordonnées $(-2\,;1)$. On considère les cercles définis par les équations ci-dessous. À quel(s) cercle(s) le point B appartient-il ?
1. $(x-4)^2+(y-3)^2=3$
2. $(x+2)^2+(y-2)^2=1$
3. $x^2+(y-1)^2=4$
4. $x^2+2x+y^2-2y=-1$

35 Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation :
$$x^2-2x+y^2-4y-9=0.$$
1. Recopier et compléter les égalités suivantes.
a. $x^2-2x=(x-\ldots)^2-\ldots$
b. $y^2-4y=(y-\ldots)^2-\ldots$
2. En déduire que (E) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

36 **Les anneaux olympiques**
Andrea a dessiné les anneaux olympiques sur un logiciel de géométrie dynamique.



1. Dans la fenêtre *Algèbre* du logiciel se trouvent les informations suivantes.

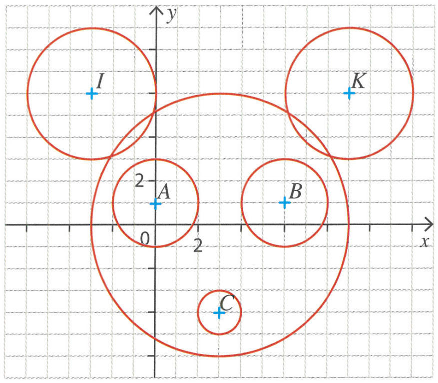
– Conique
- **C1: (x – 2)² + (y – 2)² = 2.25**
- **C2: x² + y² = 2.25**
- **C3: (x – 4)² + y² = 2.25**
- **C4: (x + 2)² + (y – 2)² = 2.25**
- **C5: (x – 6)² + (y – 2)² = 2.25**

– Point
- **A = (–2, 2)**
- B = (0, 0)
- **C = (2, 2)**
- D = (4, 0)
- **E = (6, 2)**

Associer à chaque cercle de couleur son équation et son centre.
2. Vérifier les résultats en reproduisant la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

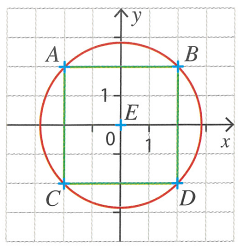
37 Dans chacun des cas suivants, donner une équation du cercle de centre $A\,(x_A\,;y_A)$ et de rayon R.
1. $x_A=1$, $y_A=2$ et $R=5$.
2. $x_A=-3$, $y_A=0$ et $R=\frac{1}{2}$.
3. $x_A=\frac{2}{3}$, $y_A=\frac{1}{4}$ et $R=\frac{4}{5}$.
4. $x_A=\sqrt{2}$, $y_A=2\sqrt{3}$ et $R=\sqrt{2}$.

38 On considère la figure suivante réalisée sur un logiciel de géométrie dynamique.
• À l'aide des informations lues sur cette figure, déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles tracés. Les abscisses et ordonnées des centres des cercles, les rayons sont des nombres entiers.



39 Dans chacun des cas suivants, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
1. $A\,(-3\,;7)$ et $B\,(0\,;0)$.
2. $A\,(1\,;5)$ et $B\,(-3\,;-1)$.
3. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

40 On considère la figure suivante réalisée sur un logiciel de géométrie dynamique.
• Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au carré $ABCD$.



41 **Raisonner, représenter**
1. Déterminer une équation du cercle de centre $A\,(1\,;-3)$ et passant par l'origine du repère.
2. Déterminer une équation du cercle de centre $A\,(-2\,;1)$ et passant $B\,(0\,;-3)$.

42 VRAI OU FAUX
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
Soit a un réel.
On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :
$$(x+a)^2+(y-a)^2=4.$$
1. Si $a=0$, alors $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au plus une fois.
2. Si $a=1$, alors $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au moins une fois.
3. Si $a=-3$, alors $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au plus une fois.
4. Si $a\leqslant 2$, alors $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au moins une fois.

Exercices

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

43 Soient les droites d et d' d'équations respectives :

$$x+3y-1=0 \quad \text{et} \quad y=-\frac{1}{3}x+1.$$

Montrer que d et d' sont parallèles de trois façons :
a. avec des vecteurs directeurs ;
b. avec des vecteurs normaux ;
c. avec des équations réduites de droites.

44 On considère les points $B(3\,;2)$ et $C(-2\,;8)$.
Soit Δ la droite d'équation:

$$x-y+3=0.$$

• Δ est-elle la médiatrice du segment $[BC]$? Justifier.

45 Soient $D(0\,;4)$ et $D'(-3\,;2)$ deux points du plan.
Soit Δ la droite d'équation :

$$2x-y=0.$$

• Le point D' est-il le symétrique de D par rapport à la droite Δ ? Justifier.

46 **Raisonner, représenter**
Déterminer une équation du cercle :
a. de centre $C(4\,;2)$ et tangent à l'axe des ordonnées ;
b. de centre $D(-1\,;1)$ et tangent à l'axe des abscisses.

47 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Représenter, calculer
On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :
$x^2+2x+y^2-2y-7=0.$
1. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $x=1$ en deux points A et B.
Calculer les coordonnées de ces deux points.
2. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y=2$ en deux points C et D.
Calculer les coordonnées de ces deux points.
3. Sur un logiciel de géométrie dynamique, tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points A, B, C et D. Vérifier les résultats obtenus aux questions **1** et **2**.

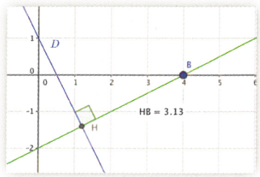
48 ALGO
Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur du plan.
On nomme Δ la droite qui passe par A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.
• Écrire une fonction `surdelta` qui prend en arguments les coordonnées de A, celles de $\vec{n}$ ainsi que celles d'un point M et qui renvoie True si le point M appartient à Δ, False dans le cas contraire.

49 **Calculer**
Les équations ci-dessous sont celles de cercles. Pour chacun d'eux, déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.
1. $x^2-6x+9+y^2=25$
2. $x^2+2x+y^2-2y+2=16$
3. $x^2-10x+y^2+20y+125=121$
4. $x^2+4x+y^2-8y=-16$

50 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur Δ dans chacun des cas suivants.
1. $\Delta : x=1$ et $A(3\,;1)$.
2. $\Delta : y=-2$ et $A(3\,;4)$.
3. $\Delta : x+y-2=0$ et $A(-1\,;2)$.
4. $\Delta : 3x-5y+2=0$ et $A(1\,;1)$.

51 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Soient Δ la droite d'équation $-3x+y-1=0$ et $A(-2\,;4)$.
1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur Δ.
2. Vérifier le résultat avec un logiciel de géométrie dynamique.

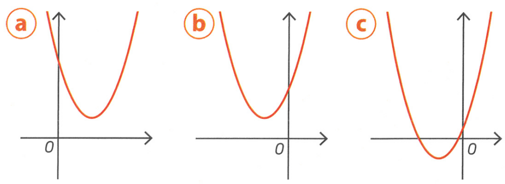
52 **Chercher, communiquer**
On souhaite déterminer la distance du point $B(4\,;0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+y-1=0$.
1. Pour conjecturer cette distance, Kylian a réalisé les tracés suivants sur un logiciel de géométrie dynamique.



a. Détailler les étapes du protocole de construction de Kylian.
b. La valeur affichée est-elle bien celle de la distance cherchée ?
2. En suivant le protocole de construction établi précédemment, retrouver la valeur exacte de cette distance par le calcul.

53 On considère les points $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;-1)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. On considère le point $C(3\,;2)$.
C appartient-il à la droite (AB) ?
3. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à (AB).
4. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). HC est la distance de C à la droite (AB).
Expliquer pourquoi il existe un réel $k\neq 0$ tel que $\overrightarrow{CH}=k\vec{n}$.
5. Calculer $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n}$ de deux manières différentes et en déduire la distance CH du point C à la droite (AB).

54 **Raisonner, communiquer**
Parmi les trois paraboles ci-dessous, laquelle a pour équation $y=x^2+4x+5$?



55 On considère le système d'équations à deux inconnues suivant.

$$\begin{cases} 5x+\dfrac{2}{3}y-1=0 \\ -\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{5}y+4=0 \end{cases}$$

On nomme $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $5x+\dfrac{2}{3}y-1=0$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{5}y+4=0$.

1. Déterminer un vecteur normal de chacune de ces deux droites.
2. En déduire leur position relative et discuter du nombre possible de solutions du système précédent.
3. Quel est l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système ?

56 **1.** Déterminer le nombre de solutions du système d'équations à deux inconnues suivant.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

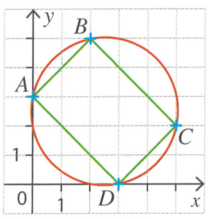
2. Quel est l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système ?

57 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soient $A(0\,;0)$, $B\,(5\,;6)$ et $C\,(-1\,;5)$ trois points du plan.
1. Justifier qu'une équation cartésienne de la hauteur issue de C est $5x+6y-25=0$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre (c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs) du triangle ABC.
4. Vérifier ces résultats en réalisant une figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

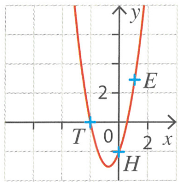
58 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $A(0\,;3)$, $B(2\,;5)$ et $C\,(5\,;2)$.
1. Calculer les coordonnées du point D.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.
3. Vérifier ces résultats en reproduisant la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.



59 Soit a un réel fixé. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y+1=0$, le point B de coordonnées $(3\,;0)$ et le point A de coordonnées $(a\,;a)$.
1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$.
2. Les coordonnées de H dépendent-elles de a ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a le triangle ABH est-il isocèle en H ?

60 On considère la parabole tracée ci-dessous, qui passe par les points T, H et E dont les coordonnées sont respectivement $(-2\,;0)$, $(0\,;-2)$ et $(1\,;3)$.



1. Déterminer une équation cartésienne de cette parabole.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses qui a une abscisse positive :
a. en résolvant une équation du second degré ;
b. en calculant les coordonnées du symétrique de T par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.

61 Déterminer une équation cartésienne de la parabole passant par le point $A(1\,;2)$ et de sommet $S(0\,;4)$.

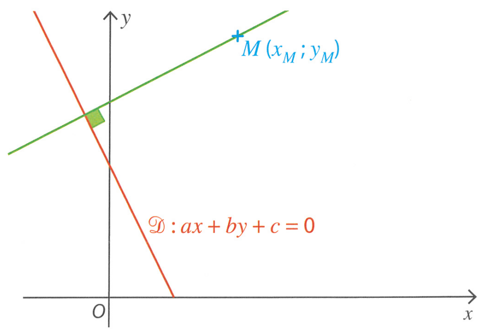
62 Déterminer une équation cartésienne de la parabole passant par le point $B\,(0\,;4)$ et de sommet $(1{,}5\,;6{,}25)$.

63 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soient A et B les points du plan dont les coordonnées respectives sont $(1\,;-1)$ et $(2\,;3)$.
Soit d la droite d'équation $y=3$.
1. Réaliser une figure sur un logiciel de géométrie dynamique.
2. Tracer le cercle Γ passant par les points A et B, dont le centre C se trouve sur la droite d.
3. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
4. En déduire les coordonnées du point C puis une équation du cercle Γ.
5. Vérifiez les résultats obtenus sur le logiciel de géométrie dynamique.

64 ALGO

On considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ et un point $M\,(x_M\,;y_M)$.
• Écrire un algorithme en language naturel qui donne une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M.



MODERATO

Exercices

65 **Modélisation d'une planche d'équilibre**
Modéliser, calculer
Joseph veut fabriquer une planche d'équilibre.

Il a modélisé cet objet de la façon suivante : le cylindre est représenté par un cercle de centre $A(1\,;3)$ et de rayon 5. La planche est un segment tangent au cercle en $B(4\,;7)$.
1. Déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon 5.
2. Vérifier que le point B appartient à ce cercle.
3. Déterminer l'équation de la tangente au cercle au point B.
4. En déduire les coordonnées du point d'intersection entre la planche et le sol.

66 ALGO PYTHON
1. Recopier et compléter le programme ci-dessous qui définit la fonction qui renvoie la distance entre le point A et le point B dont les coordonnées $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$ sont passées en arguments.

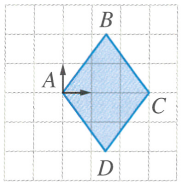
```
from math import sqrt
def distance(xA,yA,xB,yB):
    return ...
```

2. Recopier et compléter le programme ci-dessous qui définit la fonction SurCercle qui renvoie True si le point A appartient au cercle de centre O et de rayon R, False dans le cas contraire.
Cette fonction appelle la fonction distance définie à la question ci-dessus.

```
def SurCercle(xA,yA,x0,y0,R):
    if distance (...,...,...,...) == ... :
        return True
    return ...
```

3. Que renvoie l'instruction SurCercle(1, 2, 0, 0, 3) ?
4. Trouver un couple de valeurs $(x_A\,;y_A)$ tel que l'instruction SurCercle(xA, yA, 0, 0, 3) renvoie True.

67 On considère un losange $ABCD$. On munit le plan d'un repère centré en A comme l'indique la figure ci-dessous.



On note c l'abscisse du point C et b l'ordonnée du point B.
1. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure en fonction de b et c.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (AC) et les coordonnées d'un vecteur directeur de (BD).
3. Quelle propriété peut-on alors démontrer ?

68 **Chercher, calculer**
On considère une droite d d'équation :
$$2x - y - \frac{1}{2} = 0.$$
On veut déterminer une équation de la droite symétrique de l'axe (Ox) par rapport à d.
1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de d et de l'axe (Ox).
2. Soit B le point de l'axe (Ox) d'abscisse 1.
Quelle est l'ordonnée de B ?
3. Déterminer les coordonnées du point B', symétrique de B par rapport à d.
4. Déduire des questions précédentes l'équation de la droite Δ symétrique de l'axe (Ox) par rapport à la droite d.

69 ALGO
L'objectif de cet exercice est d'écrire un programme en langage Python qui teste si un point $M(x\,;y)$ est équidistant d'un point $A(x_A\,;y_A)$ et de l'axe des abscisses.
1. Étude d'un cas particulier :
a. On pose $A(2\,;4)$ et $M(3\,;5)$. Faire une figure à main levée en plaçant les axes du repère et les points A, M.
b. Calculer la distance AM.
c. Calculer la distance du point M à l'axe des abscisses.
d. Justifier que le point M n'est pas équidistant du point A et de l'axe des abscisses.
e. Déterminer les coordonnées d'un point B tel que M est équidistant de A et de l'axe des abscisses.
2. Écrire une fonction DistancePoints qui prend en arguments les coordonnées du point A, celles du point M et renvoie la valeur de la distance AM.
3. Écrire une fonction DistanceAxe qui prend en arguments les coordonnées du point M et renvoie sa distance à l'axe des abscisses.
4. Écrire une fonction Equidistant qui prend en arguments les coordonnées du point A, celles du point M et renvoie True si le point M est équidistant du point A et de l'axe des abscisses, et False dans le cas contraire.

70 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par le point $A\,(1\,;\,2)$ et tangent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y = 7$.

71 PRISE D'INITIATIVE

Soit $A\,(3\,;\,2)$ un point.

1. Tracer un cercle dont deux des tangentes sont perpendiculaires en A.

2. Y a-t-il unicité de ce cercle ?

72 **Chercher, raisonner, communiquer**

Soient $A\,(-1\,;\,2)$, $B\,(1\,;\,-4)$ et $C\,(3\,;\,0)$ trois points du plan.

1. Justifier que ces trois points ne sont pas alignés.

2. Tracer dans un repère du plan, un cercle passant par les trois points A, B et C. Détailler le protocole de construction.

73 Soient $A\,(0\,;\,5)$, $B\,(-1\,;\,-2)$ et $C\,(8\,;\,1)$ trois points du plan.

On veut déterminer une équation cartésienne du cercle passant par les trois points ci-dessus.

1. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.

2. Calculer les coordonnées du point J milieu du segment $[BC]$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 médiatrice du segment $[AB]$.

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 médiatrice du segment $[BC]$.

5. a. Justifier que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

b. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection O.

c. Que représente O pour le cercle ? Justifier.

6. En déduire le rayon du cercle puis son équation cartésienne.

74 ALGO PYTHON

Chercher, raisonner

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = -2x^2 + 3x - 4$.

1. Écrire en langage Python une fonction `SurParabole` qui prend en arguments les coordonnées d'un point D et renvoie `True` si ce point est sur la parabole et `False` sinon.

2. Écrire en langage Python, une fonction `Symétrique` qui prend en arguments les coordonnées d'un point D, vérifie si ce point appartient bien à la parabole $\mathscr{P}$ et si c'est le cas, renvoie les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.

75 ALGO

Représenter, calculer

Soit A un point du plan et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R.

• Écrire un algorithme en langage naturel qui renvoie la distance entre le point A et le point de $\mathscr{C}$ le plus proche de A, en fonction des coordonnées du point A, celles du centre O du cercle ainsi que la valeur du rayon R.

76 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter, calculer, communiquer

Soient $F\,(-2\,;\,2)$ un point, $\mathscr{C}$ le cercle de centre F et de rayon 2,5 unités de longueur et $\mathscr{D}$ la droite d'équation :

$$x + 2y = 0.$$

On veut déterminer les équations des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ parallèles à $\mathscr{D}$ si elles existent.

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, placer le point F, tracer le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

b. Tracer les potentielles tangentes Δ et Δ' au cercle $\mathscr{C}$ et parallèles à $\mathscr{D}$.

c. Détailler le protocole de construction.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

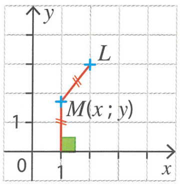
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite d perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par F.

c. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d.

d. En déduire les équations cartésiennes de Δ et Δ'.

e. Vérifier la conformité des résultats avec l'affichage obtenu sur le logiciel de géométrie dynamique.

77 Approfondissement



On considère un point $L\,(2\,;\,3)$ du plan.

On veut déterminer l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ équidistants du point L et de l'axe (Ox).

1. Exprimer la distance LM en fonction de x et y.

2. Exprimer la distance du point M à l'axe (Ox) en fonction de y.

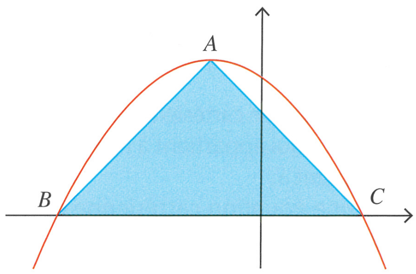
3. En déduire que M est équidistant de L et de l'axe (Ox) si et seulement si $y^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$ et $y > 0$.

4. Simplifier l'expression obtenue et déterminer la nature de l'ensemble ainsi décrit par le point M.

78 On considère la parabole d'équation :

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-2)\,.$$

On note A son sommet, B et C ses points d'intersection avec l'axe des abscisses, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Combien vaut l'aire de ce triangle ?

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

79 PRISE D'INITIATIVE

Soit m un nombre réel.
On considère la parabole d'équation $y = mx^2 - 2x + 4$ et la droite d'équation $y = 2m$.
• Discuter, suivant les valeurs de m, du nombre de points d'intersection entre la droite et la parabole.

80 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Lieu géométrique**

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A\,(0\,;1)$. Une droite $\mathscr{D}_m$ de coefficient directeur m passe par le point A et coupe la parabole $\mathscr{P}$ en deux points que l'on nomme B et C. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer la parabole et placer le point $A\,(0\,;1)$. Définir un curseur m et tracer la droite $\mathscr{D}_m$. Utiliser le mode *Trace* et conjecturer à quel ensemble le point I semble appartenir lorsque les points B et C varient.
2. a. Montrer que les abscisses des points B et C vérifient l'équation $x^2 - mx - 1=0$.
b. Combien de solutions cette équation admet-elle ?
3. Exprimer les coordonnées du point I en fonction des solutions de l'équation précédente. En déduire que les coordonnées du point I vérifient l'équation $y = 2x^2 + 1$.
4. Réciproquement, justifier que, lorsque m décrit l'ensemble des réels, le point I décrit toute la courbe d'équation $y = 2x^2 + 1$.
5. Conclure sur la conjecture émise à la question 1.

81 ALGO PYTHON

1. On considère deux cercles du plan. Discuter, suivant la position de ces deux cercles, leur nombre de points d'intersection. Illustrer par des dessins.
2. Écrire une fonction en langage Python qui renvoie le nombre de points d'intersection entre deux cercles donnés. Cette fonction prend en arguments les coordonnées des centres des deux cercles ainsi que les rayons de chacun d'eux.

82 **Représenter, chercher, raisonner**

Soient $A\,(-1\,;2)$ et $B\,(5\,;4)$ deux points. On s'intéresse à l'ensemble des cercles passant par A et B.

1. Dans un repère du plan, placer A et B puis tracer un cercle passant par A et B.
2. Quel est l'ensemble L des centres des cercles passant par A et B ?
3. Donner une équation cartésienne de cet ensemble L.
4. Soit S un point qui appartient à l'ensemble L. Soit s l'abscisse du point S.
Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre S passant par A et B.
5. Tracer alors trois cercles différents passant par A et B. Pour chacun de ces cercles, donner les coordonnées du centre et le rayon.

83 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter, chercher

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points :

$$A\,(3\,;2),\ B\,(-1\,;-2) \text{ et } C\,(-2\,;2).$$

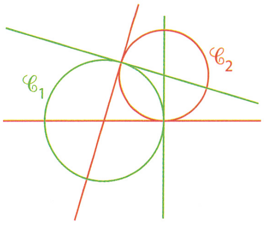
1. a. LOGICIEL Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
b. Tracer sur cette figure les trois médianes du triangle ABC. On note G leur point d'intersection (appelé centre de gravité du triangle ABC).
c. Tracer sur cette figure les trois hauteurs du triangle ABC. On note H leur point d'intersection (appelé orthocentre du triangle ABC).
d. Tracer sur cette figure les trois médiatrices du triangle ABC. On note I leur point d'intersection (I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC).
e. Que peut-on conjecturer sur la position des points G, H et I ?
On vérifiera sur le logiciel les résultats des questions suivantes au fur et à mesure.
2. a. Déterminer les équations des trois médianes du triangle ABC puis les coordonnées de G.
b. Déterminer les équations des trois hauteurs du triangle ABC puis les coordonnées de H.
c. Déterminer les équations des trois médiatrices du triangle ABC puis les coordonnées de I. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
d. Démontrer la conjecture établie à la question 1 e.
3. On note :
• J, K et L les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$;
• M, N et O les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C ;
• P, Q et R les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.
a. Placer ces points sur la figure et conjecturer qu'ils appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b. Calculer les coordonnées de ces points et démontrer la conjecture énoncée à la question précédente.
La droite à laquelle les points G, H et I précédemment cités appartiennent est appelée **droite d'Euler**.
Leonhard Euler est un mathématicien et physicien suisse, né en 1707 à Bâle et décédé en 1783 à Saint-Pétersbourg. Il était membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin et est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

84 On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $-3x + 2y - 1 = 0$ et la droite Δ d'équation $y = 3x - 1$.
• Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}'$ symétrique de la droite $\mathscr{D}$ par rapport à la droite Δ.

85 Soient $A\,(-5\,;6)$, $B\,(11\,;2)$ et $C\,(-3\,;-1)$ trois points du plan.
• Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par ces trois points.

86 On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives :

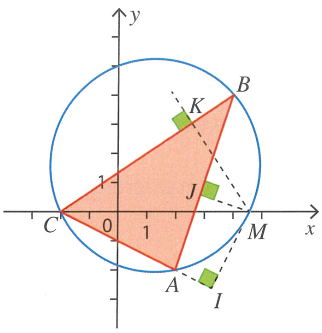
$$x^2 + y^2 = 16$$
$$\text{et } x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0.$$



1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.
3. Justifier la position relative des tangentes à chacun des deux cercles en ces deux points.

87 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soient $A\,(2\,;-2)$, $B\,(4\,;4)$ et $C\,(-2\,;0)$ trois points du plan.
1. a. Sur un logiciel de géométrie dynamique, placer les trois points et tracer le cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
b. Soit M le point du cercle Γ d'ordonnée 0 et distinct du point C. Tracer les points I, J et K projetés orthogonaux de M sur (AC), (AB) et (CB).



c. Émettre une conjecture sur la position relative des points I, J et K.
2. L'objectif de cette question est de démontrer la conjecture émise à la question précédente.
a. Déterminer une équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
b. En déduire l'abscisse du point M, qui appartient au cercle Γ, a une ordonnée nulle et est distinct du point C.
c. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
d. Conclure.
La droite, à laquelle les points I, J et K précédemment cités appartiennent, est appelée **droite de Simson**, du nom du mathématicien écossais Robert Simson.

Robert Simson est un mathématicien écossais né en octobre 1687 et décédé en octobre 1768. Il s'est rendu célèbre pour ses contributions en géométrie.

88 ALGO PYTHON

Raisonner, communiquer
Écrire une fonction en langage Python qui prend en arguments les coordonnées x_C et y_C du centre et la valeur R du rayon d'un cercle, ainsi qu'un réel m. Cette fonction renvoie le nombre de points d'intersection du cercle et de la droite d'équation $y = m$.

89 Tracer les ensembles de points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les inégalités ou systèmes d'inégalités et égalités suivants.
1. $(x-3)^2 + (y+2)^2 \leqslant 16$
2. $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-5)^2 \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 \leqslant 64 \\ y = x^2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 \leqslant 25 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

90 L'objectif de cet exercice est de déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A(1\,;-1)$, $B(-1\,;9)$ et $C(3\,;5)$.
1. $y = ax^2 + bx + c$ est une équation de $\mathscr{P}$, avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. Établir que les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=9 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases} \quad (*)$$

2. Quelle opération a-t-on effectuée sur les lignes 1 et 2 du précédent système pour obtenir le système équivalent suivant ?

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 2a+2c=8 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases} \quad (**)$$

3. Multiplier par 3 la ligne 1 du système (**).
4. Quelle opération a-t-on effectuée sur les lignes 1 et 3 du système (**) pour obtenir le système équivalent suivant ?

$$\begin{cases} 3a+3b+3c=-3 \\ 2a+2c=8 \\ -6a+2c=-8 \end{cases} \quad (***)$$

5. Calculer les valeurs de a et c.
6. En déduire celle de b.
7. Conclure en donnant une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

91 On considère les points $I\,(1\,;2)$ et $J\,(3\,;0)$.
• Démontrer que l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MJ} + 3\overrightarrow{MI}$ sont orthogonaux est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

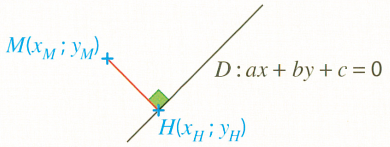
VERS
L'épreuve écrite

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

92 La première partie de cet exercice permet d'établir une formule donnant la distance d'un point à une droite dont une équation cartésienne est connue. La seconde partie met en application cette formule. Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie 1

On considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et un point $M(x_M ; y_M)$.



1. Donner les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

2. Soit $H(x_H ; y_H)$ le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n}$ en fonction des normes des deux vecteurs.

3. Justifier que $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = ax_M + by_M + c$.

4. Déduire des questions **2** et **3** que la distance, notée d, du point M à la droite $\mathscr{D}$ est :

$$d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\|\vec{n}\|}.$$

Partie 2

1. Déterminer la distance du point $M(1 ; 2)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x - y + 8 = 0$.

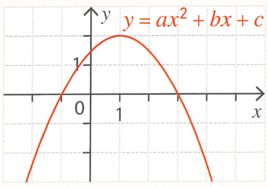
2. Déterminer le rayon du cercle de centre $A(-4 ; 4)$ tangent à la droite Δ d'équation $2x - 3y = 0$.

3. a. Justifier que les droites d'équations $5x - 2y + 3 = 0$ et $-2x + y + 1 = 0$ sont sécantes.

b. Déterminer les coordonnées d'un point équidistant de ces deux droites, autre que leur point d'intersection.

93 **Raisonner, communiquer**

On considère la parabole ci-dessous dont une équation est $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
À l'aide des informations portées sur le graphique, déterminer les valeurs des coefficients a, b et c.



94 **Raisonner, communiquer**

On considère l'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0.$$

1. Justifier que cette équation est celle d'un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$.
Discuter suivant les valeurs du réel a le nombre de points d'intersection entre la droite $\mathscr{D}$ et le cercle $\mathscr{C}$.

95 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-1 ; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

2. Déterminer les coordonnées des points D et E d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

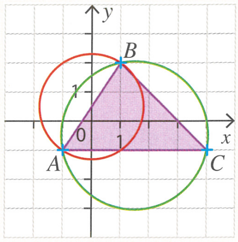
3. Déterminer une équation cartésienne des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points D et E.

4. Calculer les coordonnées du point F, intersection de ces deux tangentes.

5. Démontrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.

96 **Chercher, calculer**

On considère les points $A(-1 ; -1)$, $B(1 ; 2)$ et $C(4 ; -1)$.



1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
On note D son centre.

2. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit au triangle ABC.
On note E son centre.

3. Démontrer que le centre E de $\mathscr{C}'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4. Montrer de plusieurs manières que (DE) est perpendiculaire à (AB).

97 QCM

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points :

$A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$, $C(-1 ; 0)$ et $D(0 ; -1)$.

Choisir la bonne réponse pour chacune des questions posées. Justifier.

1. L'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + x + y = 0$$

est :

a) le cercle de diamètre $[CD]$;
b) le cercle de diamètre $[BD]$;
c) la droite (CD) ;
d) la médiatrice du segment $[AB]$.

2. L'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

$$x^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

est :

a) la médiatrice du segment $[BC]$;
b) le milieu du segment $[BC]$;
c) le cercle de centre O et de rayon 1 ;
d) la médiatrice du segment $[AD]$.

98 QCM

Donner la seule réponse exacte parmi les trois propositions, sans justifier.

1. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 2y - 4 = 0$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $-4x + 6y + 1 = 0$:

a) sont parallèles ;
b) sont perpendiculaires ;
c) ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

2. La droite d'équation $y = 3x + 1$ a pour vecteur normal :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$;
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$;
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

3. Le point $A\,(1\,;0)$ appartient au cercle d'équation :

a) $x^2 + y^2 - 3x + y + 3 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 3x - y + 5 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$.

4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$:

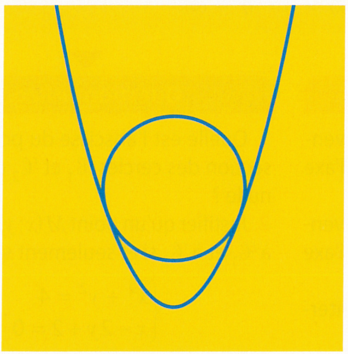
a) sont orthogonaux ;
b) sont colinéaires ;
c) ne sont ni orthogonaux ni colinéaires.

5. Les points $A\,(3\,;0)$ et $B\,(0\,;2)$ appartiennent au cercle d'équation :

a) $x^2 + y^2 - 3x + y - 1 = 0$;
b) $(x - 3)^2 = (y - 2)^2$;
c) $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$.

99 **Logo design**

Une société de communication a créé le logo ci-dessous.



Ce logo peut être modélisé par la parabole d'équation $y = x^2$ et le cercle de centre $O\,(0\,;2)$. Le cercle est tangent à la parabole en deux points.

1. Quel est le rayon du cercle ?

2. Quelles sont alors les coordonnées des points d'intersection entre la parabole et le cercle ?

3. Que dire des tangentes au cercle et à la parabole en ces points ?

100 On considère la parabole $\mathcal{P}$ dont la droite d'équation $x = \frac{9}{4}$ est axe de symétrie. Cette parabole passe par le point $T\,(3\,;0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point V, qui est l'autre point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.

2. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

3. Soit m un réel fixé. Discuter selon les valeurs de m du nombre de points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite d'équation $y = m$.

101 On considère deux points A et B de coordonnées respectives $(1\,;1)$ et $(3\,;-2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit C le point de coordonnées $(x\,;y)$, où x et y sont deux réels quelconques.

a. Traduire en termes de coordonnées l'égalité $AB = AC$.

b. De quel ensemble obtient-on l'équation ?

c. Résoudre le système suivant : $\begin{cases}2x - 3y - \frac{11}{2} = 0\\(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25\end{cases}$

d. Que dire du triangle ABC lorsque le couple de coordonnées du point C est solution du système précédent ?

102 On considère une droite Δ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, qui passe par le point $A(1\,;2)$.

Soit Γ le cercle de centre A et de rayon 3.

Soient B un point quelconque de Γ et B' son symétrique par rapport à Δ.

1. Réaliser une figure.

2. Démontrer sans calcul que B' appartient à Γ.

3. Soient $(x\,;y)$ les coordonnées du point B.

a. Calculer les coordonnées du point B'.

b. Vérifier par le calcul que B' appartient à Γ.

103 **Raisonner, chercher, calculer**

On veut déterminer les coordonnées d'éventuels points d'intersection entre une parabole et un cercle donnés.

1. Déterminer, si ces points existent, les coordonnées des points d'intersection entre la parabole d'équation $y = x^2 - 2$ et le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

2. Déterminer l'équation d'un cercle qui n'a aucun point d'intersection avec la parabole d'équation $y = x^2 - 2$.

3. On considère la parabole d'équation $y = x^2 + 3$ et le cercle d'équation $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

a. Justifier que la recherche des coordonnées des éventuels points d'intersection entre ces deux figures équivaut à résoudre le système S : $\begin{cases}y = x^2 + 3\\x^4 + 5x^2 + 3 = 0\end{cases}$

b. On effectue le changement d'inconnue suivant en posant $X = x^2$.

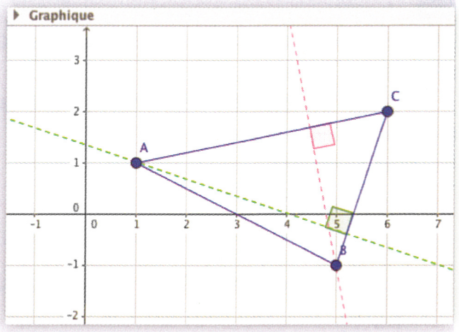
Réécrire le système précédent avec la nouvelle inconnue X puis résoudre ce système.

c. En déduire la résolution du système S.

DIFFÉRENCIATION
Exercices
AP

104 Points particuliers dans un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère un triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(1\,;1)$, $(5\,;-1)$ et $(6\,;2)$. Sur un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé le triangle ABC et ses hauteurs issues de A et de B.



Questions Va piano

1. Dans le menu Algèbre du logiciel, on peut lire :

- d: x + 3y = 4
- e: -5x - y = -24

2. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Tracer ces deux droites sur un logiciel de géométrie dynamique et déterminer graphiquement les coordonnées de l'orthocentre du triangle.
3. Retrouver ce résultat par le calcul.

Questions Moderato

1. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle.
4. Vérifier par le calcul que H appartient bien à la troisième hauteur du triangle.

Questions Allegro

1. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle.
2. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle.
3. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle.
4. Quelle conjecture peut-on émettre sur la position relative de ces trois points ? Démontrer cette conjecture.

105 Deux cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $x^2+y^2=4$ et $(x+2)^2+(y-4)^2=16$.

Questions Va piano

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.
2. Prouver que le point $A\,(-2\,;0)$ appartient à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$.
3. a. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ puis placer le point A.
b. Selon le logiciel, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont-ils sécants en un autre point ? Si oui, quelles sont ses coordonnées ?
c. Vérifier par le calcul que ces coordonnées sont bien celles d'un point de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.

Questions Moderato

1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{C}_1$ et l'axe des abscisses.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses.
3. Que peut-on en conclure pour l'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$?
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1.

Questions Allegro

1. Quelle est l'abscisse du point d'intersection des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'ordonnée nulle ?
2. Justifier qu'un point $M\,(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-2y+2=0 \end{cases}.$$

3. Résoudre ce système et conclure quant aux coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

No problem!

1 The slope-intercept

In a rectangular coordinate, we are given two lines whose following standard equations are :

$$3x - y - 4 = 0 \text{ and } 2x - 6y = 0.$$

1. Are those two lines perpendicular?
2. Transform each equation to express y in terms of x. This equation is called the slope-intercept equation. Explain why.
3. What can you notice about the gradient/slope of each line?
4. In general:
Let us consider two lines given by each of the equations below.

$$y = mx + p \text{ and } y = m'x + p'$$

Prove that those lines are perpendicular if and only if $m \times m' = -1$.

2 Equation of a circle

Let us consider two points $A\,(5\,;\,2)$ and $B\,(-1\,;\,3)$ in a rectangular coordinate.
1. Work out length AB and the coordinates of the midpoint M of segment $[AB]$.
2. Find an equation of the circle with diameter segment $[AB]$.
3. We are interested in the centers of circles passing through points A and B.
Show that those centers are all on a same line and give an equation of that line.
4. One of those circles has a center with an abscissa equal to zero.
Give the equation of this circle.

3 Algorithm test

We are given a line with the following equation $4x + 5y - 3 = 0$ and the algorithm below written in "Python language":

```
def test(x,y):
    return 4*x+5*y-3==0
```

1. What is the result of this algorithm if we enter the formula test(0,1)?
2. What is the result of this algorithm if we enter the formula test(-3,3)?
3. What is the objective of this algorithm?
4. Write a similar algorithm that will test whether a point belongs to the circle center $A(1\,;\,1)$ radius 2.

Pair Work Make your imagination work!

Using the grid below, you have to create a least three triplets in which you will include some information from column A, B and C. Explain and compare your choices with your classmate.

A: circles	B: lines	C: intersection
$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 7$	$x + y + 4 = 0$	zero point
$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$	line (AB)	one point
center $A\,(1\,;\,5)$ and radius equal to 2	$x = -\frac{1}{2}$	two points
center $O\,(0\,;\,0)$ passing through $B\,(2\,;\,-1)$	x-axis	two points, and the line passes through the center of the circle