CHAPITRE

8 Géométrie repérée

Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

Construire des cercles avec Apollonius

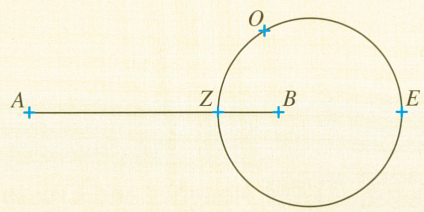
Apollonius

Apollonius est un géomètre et astronome grec du IIIe siècle avant J.-C. Né à Perga dans l'actuelle Turquie, il étudie puis enseigne à Alexandrie. Il est célèbre pour son traité sur les *Coniques*, ensemble de courbes sur lesquelles ses prédécesseurs, comme Euclide, ont déjà travaillé. Dans ce traité de huit livres, il synthétise les résultats déjà obtenus et les complète de manière remarquablement rigoureuse pour l'époque.

Dans le *Traité des contacts*, Apollonius travaille sur la construction de cercles sous diverses conditions. On y trouve des constructions de cercles passant par trois points donnés, tangents à des droites ou à d'autres cercles.

Il énonce notamment la proposition suivante :

« Le lieu des points dont la distance à un point donné *A* est un multiple de la distance à un point donné *B*, est un cercle. »



Reproduire et expliquer le schéma illustrant la proposition ci-dessus, en fixant $AB = 4$ cm et $\dfrac{AZ}{BZ} = \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AE}{BE} = 3$.

Justifier la position des points Z et E sur la droite (AB) et en déduire le rayon du cercle et la position de son centre sur la droite (AB).

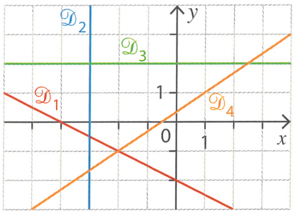
Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Vecteurs directeurs (1)

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Déterminer par lecture graphique les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites représentées ci-dessous.



2 Vecteurs directeurs (2)

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites dont une équation est donnée ci-dessous.

a. $2x - 3y + 1 = 0$

b. $x + y - 3 = 0$

c. $3y - 1 = 0$

d. $x = \sqrt{2}$

e. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

3 Colinéarité

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires dans chacun des cas suivants ?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$.

4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -32 \end{pmatrix}$.

4 Milieux

Soient $A(-3\,;2)$ et $B(5\,;4)$ deux points du plan.

1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

2. Calculer les coordonnées du point C sachant que le point B est le milieu du segment $[AC]$.

5 Produit scalaire

On se place dans un repère orthonormé.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Quelle est la paire de vecteurs orthogonaux ?

6 Identités remarquables

Développer les identités remarquables suivantes.

1. $(x+3)^2$ **2.** $(y-7)^2$

3. $(y+\frac{1}{2})^2$ **4.** $(x-\sqrt{2})^2$

7 Système

Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} -x + 5y - 4 = 0 \\ 4x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

8 Équation cartésienne

On se place dans un repère orthonormé.

Déterminer une équation cartésienne des droites suivantes.

1. La droite (AB) avec $A(-8\,;4)$ et $B(0\,;3)$.

2. La droite passant par le point $C(-2\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9 Alignement

Soient $A(-1\,;3)$, $B(4\,;2)$ et $C(0\,;1)$ trois points du plan.

- Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Pour construire le cours

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Paires orthogonales

Objectif
Conjecturer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite dont on connaît une équation cartésienne.

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les vecteurs :

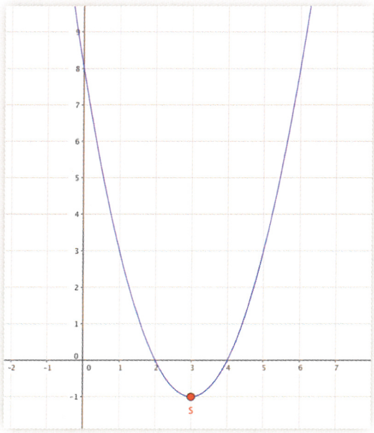
$$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{w}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix},\quad \vec{z}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{n}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}.$$

1. Représenter ces vecteurs dans un repère orthonormé, puis reconstituer les paires de vecteurs orthogonaux en justifiant par le calcul.
2. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels donnés, tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
Exprimer les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ en fonction de a et b.
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, que valent a et b ?
Exprimer alors les coordonnées du vecteur orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ trouvé à la question 1 en fonction de a et b.
4. Reprendre la question 3 en remplaçant le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ par le vecteur $\vec{z}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
5. Quelle conjecture peut-on émettre sur les coordonnées d'un vecteur orthogonal à un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$?

Situation 2 Second degré LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer l'équation réduite de l'axe de symétrie d'une parabole.

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
On a tracé la représentation graphique de cette fonction sur un logiciel de géométrie dynamique.

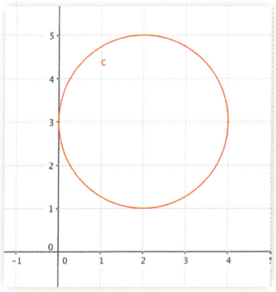


1. Lire graphiquement les coordonnées du point S.
2. Reproduire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique.
3. Tracer la droite Δ perpendiculaire à l'axe (Ox) et passant par le point S.
4. Quelle est l'équation réduite de Δ ?
5. Justifier que le point $A\,(1\,;3)$ appartient à la courbe représentative de la fonction.
Placer ce point sur la figure.
6. Construire le symétrique du point A par rapport à la droite Δ.
On peut utiliser le bouton « symétrie axiale » du logiciel.
7. Placer de même deux autres points sur la courbe et tracer leurs symétriques respectifs par rapport à Δ.
8. Que peut-on conjecturer ?

Situation 3 Équations de courbes LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

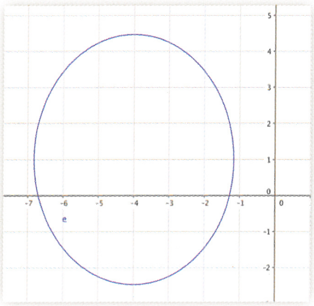
Objectif
Conjecturer l'équation cartésienne d'un cercle.

Dans un repère orthonormé du plan d'origine O, Théodore a dessiné des courbes sur un logiciel de géométrie dynamique. Il a mélangé les équations de chacune d'elles.

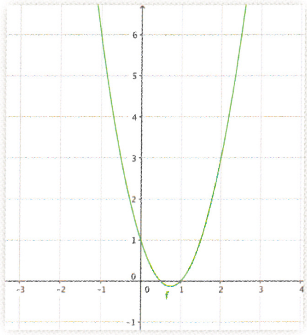


Courbe 1

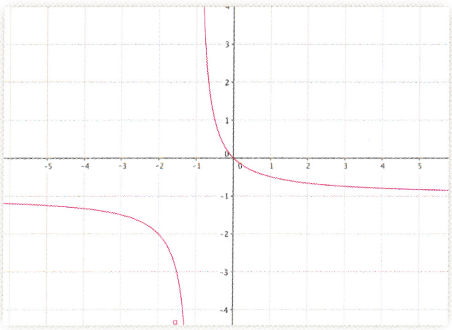
Courbe 2



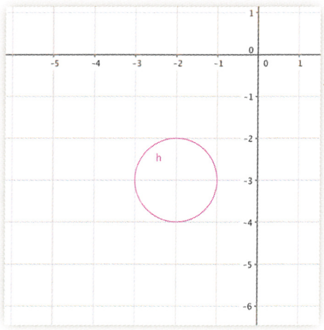
Courbe 3



Courbe 4



Courbe 5



Courbe 6

1. Associer à chacune des six équations ci-dessous une des courbes ci-dessus.

   a) $(x+2)^2+(y+3)^2=1$
   b) $(x+1)(y+1)=1$
   c) $\dfrac{(x-7)^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=4$
   d) $y=2x^2-3x+1$
   e) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
   f) $\dfrac{(x+4)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{3}=4$

2. Lesquelles sont des équations de cercle ?
   Donner les coordonnées du centre et le rayon.
3. Proposer une équation du cercle de centre O et de rayon 2.
   Vérifier à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
4. Reprendre la question précédente avec le cercle de centre A (1 ; 3) et de rayon 2.

Connaître le cours

1. Vecteur normal à une droite

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé.

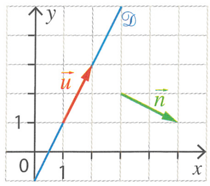
1. Définition

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan.
$\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathscr{D}$ lorsque $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemple

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.



En effet, $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$.
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

DÉMO en ligne

Propriétés

Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.
- Tout vecteur normal à $\mathscr{D}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

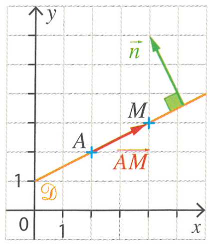
Exemple

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$.
Les vecteurs $\vec{n}$ et $-2\vec{n}$ sont colinéaires, donc le vecteur $-2\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

DÉMO en ligne

Propriété

Soient $\mathscr{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Un point M appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Exemple

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Soit le point $B(4\,;3)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (4-1) \times (-1) + (3-2) \times 3 = -3 + 3 = 0$
Le point B appartient donc à $\mathscr{D}$.

2. Équation cartésienne d'une droite

DÉMO p. 249

Propriété

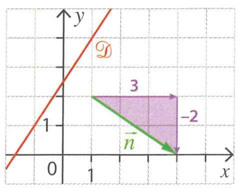
Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
Une droite $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Exemple

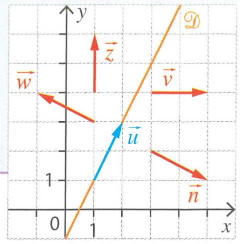
Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$.
On identifie les coefficients :

$$a = 3,\ b = -2 \text{ et } c = 5.$$

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.



Exercice résolu 1 Identifier des vecteurs normaux à une droite



On considère la droite $\mathscr{D}$ dont le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

• Quels sont, parmi les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{w}$, $\vec{v}$ et $\vec{z}$ représentés sur la figure ci-contre, les deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$?

Solution commentée

D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à $\mathscr{D}$ sont $\vec{n}$ et $\vec{w}$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2\times 1 + (-1)\times 2 = 2 - 2 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux.

On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. On a donc $\vec{w} = -\vec{n}$.

$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont donc deux vecteurs colinéaires, or $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$, donc $\vec{w}$ l'est aussi.

EXERCICE 2 p. 258

Exercice résolu 2 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée.

1 Soit $\mathscr{D}_1$ la droite passant par le point $A\,(2\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_1$.

2 Soit $\mathscr{D}_2$ la droite dont une équation cartésienne est $-x - 4y + 1 = 0$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}_2$.

Solution commentée

1 Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ donc $\mathscr{D}_1$ admet une équation cartésienne de la forme $3x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. On en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$.
On peut vérifier que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont bien orthogonaux : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 3\times(-1) + 1\times 3 = 0$.

2 L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = -1$ et $b = -4$. Donc un vecteur normal à $\mathscr{D}_2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, soit ici $\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.

EXERCICE 7 p. 258

Exercice résolu 3 Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit Δ une droite passant par le point $A\,(2\,;1)$ et dont le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

• Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Solution commentée

$$M(x\,;y) \text{ appartient à } \mathscr{D} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -1\times(x-2) + 2\times(y-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -x + 2y = 0$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de Δ est $-x + 2y = 0$.

EXERCICE 9 p. 258

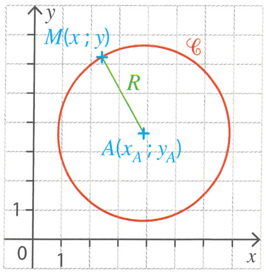
Connaître le cours

2. Équation cartésienne d'un cercle et d'une parabole

1. Équation cartésienne d'un cercle

Propriété et définition

Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ un point du plan et R un réel strictement positif.
L'ensemble des points $M\,(x;y)$ du plan vérifiant l'égalité
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon R.
Cette égalité est une **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$.



Exemple

On considère l'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=4$.
Cette équation est équivalente à $(x-3)^2+(y-(-1))^2=4$.
C'est celle du cercle de centre $A\,(3\,;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{4}\;=2$ unités de longueur.

Remarque

Dans le cas où un cercle $\mathscr{C}$ est défini par la donnée d'un de ses diamètres $[AB]$, on peut trouver une équation cartésienne de $\mathscr{C}$:

- en utilisant l'équivalence $M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$;
- ou en déterminant les coordonnées du centre I et la valeur du rayon qui est égal à la longueur AI.

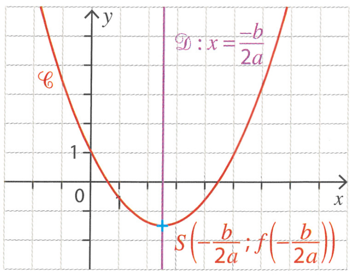
2. Équation cartésienne d'une parabole

Définition et propriété

DÉMO p. 248

Soient a, b et c trois réels donnés tels que $a\neq 0$.
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie, pour tout réel x, par $f(x)=ax^2+bx+c$.
La courbe représentative de la fonction f, qui a pour équation $y=ax^2+bx+c$, est une **parabole**.
Cette courbe admet :

- pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$;
- pour sommet le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

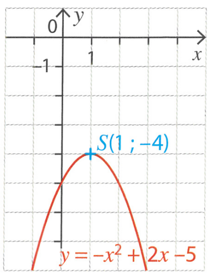


Exemple

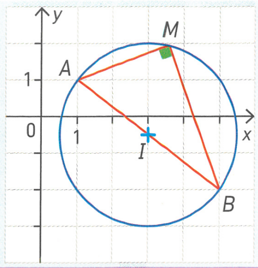
On considère l'équation $y=-x^2+2x-5$.
Cette équation est celle d'une parabole.
Par identification des coefficients, on obtient $a=-1$, $b=2$ et $c=-5$.
D'après la propriété, cette parabole admet un axe de symétrie dont une équation est $x=-\dfrac{b}{2a}$, soit $x=-\dfrac{2}{2\times(-1)}$, soit $x=1$.
Son sommet S a :

- pour abscisse $x_S=-\dfrac{b}{2a}=1$;
- pour ordonnée $y_S=-1^2+2\times1-5=-1+2-5=-4$.

Donc S a pour coordonnées $(1\,;-4)$.



Exercice résolu 1 Déterminer une équation de cercle



Soient les points $A\,(1\,;1)$ et $B\,(5\,;-2)$.

- Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
- Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

Solution commentée

1$^{\text{re}}$ méthode : Soit un point $M\,(x\,;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$$M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-x)(5-x)+(1-y)(-2-y)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+y=-3$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=-3$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

On en déduit que le cercle a pour centre le point $I\left(3;-\frac{1}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{25}{4}}$, soit $\frac{5}{2}$.

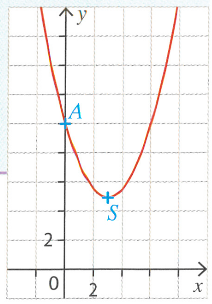
2$^{\text{e}}$ méthode : Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le point I de coordonnées $\left(\frac{1+5}{2};\frac{1-2}{2}\right)$, donc $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$.

Le carré du rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à $AI^2=(3-1)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{25}{4}$. Son rayon vaut $\sqrt{\frac{25}{4}}$, soit $\frac{5}{2}$.

Donc $\mathscr{C}$ admet pour équation $(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$.

EXERCICE 36 p. 261

Exercice résolu 2 Déterminer l'équation d'une parabole



On considère une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $(3\,;5)$ et qui passe par le point $A\,(0\,;10)$.

- Déterminer une équation de cette parabole.

Solution commentée

On cherche l'équation de la parabole sous la forme $y=ax^2+bx+c$,
où a, b et c sont trois réels donnés tels que $a\neq 0$.
L'abscisse du sommet S vaut $-\frac{b}{2a}=3$.
On en déduit que $-b=3\times 2a$, soit $b=-6a$.
De plus, l'ordonnée du point S est 5, on en déduit donc que $5=a\times 3^2+b\times 3+c$,
ce qui équivaut à $9a+3b+c=5$.
Par ailleurs la parabole passe par le point de coordonnées $(0;10)$, donc $c=10$.
On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases}c=10\\b=-6a\\9a+3b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=10\\b=-6a\\9a+3b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=10\\b=-6a\\9a+3\times(-6a)=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=10\\b=-6a\\-9a=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=10\\b=-6\times\frac{5}{9}=\frac{-10}{3}.\\a=\frac{5}{9}\end{cases}$$

Donc une équation de la parabole est $y=\frac{5}{9}x^2-\frac{10}{3}x+10$.

EXERCICE 29 p. 260

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.
On se place dans un repère orthonormé du plan.

> Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
> La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Démonstration

- On va montrer que, pour tout point A appartenant à $\mathscr{P}$ et distinct de son sommet, il existe un point B distinct de A appartenant à $\mathscr{P}$ et ayant la même ordonnée que A.

Soient deux points $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ appartenant à $\mathscr{P}$.
On a donc $y_A = ax_A{}^2 + bx_A + c$ et $y_B = ax_B{}^2 + bx_B + c$.

$$\begin{aligned} y_A = y_B &\Leftrightarrow ax_A{}^2 + bx_A + c = ax_B{}^2 + bx_B + c \\ &\Leftrightarrow a(x_A{}^2 - x_B{}^2) + b(x_A - x_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_A - x_B)[a(x_A + x_B) + b] = 0 \qquad (1) \\ &\Leftrightarrow (x_A - x_B) = 0 \text{ ou } a(x_A + x_B) + b = 0 \quad (2) \\ &\Leftrightarrow x_A = x_B \text{ ou } x_A + x_B = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Donc, si un point $A\,(x_A\,;y_A)$ distinct du sommet de la parabole appartient à $\mathscr{P}$, le point $B\left(-\frac{b}{a} - x_A\,;y_A\right)$ appartient à $\mathscr{P}$, est distinct de A et a la même ordonnée que A.
La courbe admet donc bien deux points distincts d'ordonnée y_A.

- On va déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.

Les points A et B ont même ordonnée donc $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2y_A}{2} = y_A$.
De plus, d'après ce qui précède, $x_A + x_B = -\frac{b}{a}$, donc $\frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$, et donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$.
On en déduit donc que $I\left(-\frac{b}{2a}\,;y_A\right)$.

- Soit Δ la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$. Les points A et B ont même ordonnée, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j} = (x_B - x_A) \times 0 + 0 \times 1 = 0$.

Les vecteurs sont donc orthogonaux, donc la droite Δ est orthogonale au segment $[AB]$.
De plus, le point I, milieu de $[AB]$, appartient à Δ. Donc Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.
B est donc le symétrique de A par rapport à Δ.

- Si A est le point de la courbe d'abscisse $-\frac{b}{2a}$, alors A appartient à Δ, c'est le sommet de la parabole.

Donc A est invariant par symétrie par rapport à Δ. On a alors $x_A = x_B$.
Tout point de la parabole admet ainsi un symétrique par rapport à Δ, ce qui signifie que Δ est axe de symétrie de la parabole.

---

1. Quelle égalité traduit le fait que A appartient à la parabole ? Même question pour le point B.
2. Quelle propriété permet de passer de l'égalité (1) à l'égalité (2) ?
3. Quelle égalité relie les abscisses des deux points A et B ?
4. Quelles sont les principales étapes qui permettent de prouver que le symétrique du point A par rapport à la droite Δ est le point B ?
5. Dans quel cas a-t-on $x_A = x_B$?

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
> Une droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Considérer $A\,(x_A\,;\,y_A)$ un point de $\mathcal{D}$.

Donner une proposition sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ équivalente à la proposition :
« Le point $M(x\,;\,y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. »
- Traduire cette équivalence avec les coordonnées des vecteurs.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit $A\,(x_A\,;\,y_A)$ un point du plan. Soit R un réel strictement positif.
> L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant l'égalité $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle de centre A et de rayon R.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Considérer la proposition : « $M(x\,;\,y)$ est un point du cercle de centre A et de rayon R ».

À quelle égalité de longueur cette proposition est-elle équivalente ?
- Traduire cette égalité avec les coordonnées des points.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

Démontrer les deux propriétés ci-dessous en raisonnant par équivalences.

- $\mathcal{D}_1$ est **parallèle** à $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

- $\mathcal{D}_1$ est **perpendiculaire** à $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

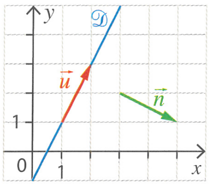
> **Raisonner par équivalences**
> Pour démontrer une équivalence, on peut, dans certains cas, partir d'une des propositions et arriver à la seconde en utilisant des propositions équivalentes. C'est ce qu'on appelle raisonner par équivalences.

Apprendre par le texte & la vidéo

5 VIDÉOS DE COURS

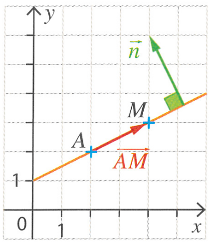
Vecteur normal à une droite

On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$.
$\vec{n}$ est **un vecteur normal** à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.



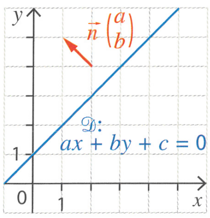
Appartenance d'un point à une droite

On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.
Un point M appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



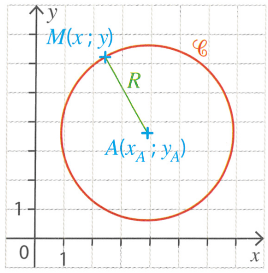
Équation cartésienne d'une droite

On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
Une droite $\mathscr{D}$ a une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$.



Équation cartésienne d'un cercle

Soient $A\,(x_A\,;\,y_A)$ un point du plan et R un réel strictement positif.
L'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ du plan vérifiant l'égalité $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon R.
Cette égalité est une **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$.

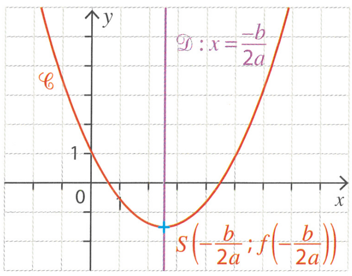


Équation d'une parabole

Soient a, b et c trois réels tels que a n'est pas nul.
Soit f une fonction polynôme de degré deux définie pour tout réel x par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Sa courbe représentative est une **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
- La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- La parabole admet un sommet S d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.



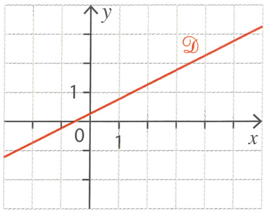
Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 6 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé du plan.

1 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1.



2. $\mathscr{D}$ passe par le point $A\,(5\,;1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est :

$$5x - 4y + 6 = 0.$$

4. L'équation réduite de $\mathscr{D}$ est :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

2 Soient les points $A\,(0\,;-2)$, $B\,(3\,;-1)$ et $C\,(2\,;1)$.

• Déterminer une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

3 Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

1. Donner les coordonnées de son centre et son rayon.

2. Prouver que le point $A\,(4\,;2)$ appartient à ce cercle.

3. Calculer les coordonnées du point du cercle diamétralement opposé à A.

4 On considère la parabole d'équation :

$$y = 8x^2 + 6x + 1.$$

1. Déterminer les coordonnées du point de la parabole d'abscisse 2.

2. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

3. La parabole coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, quelles sont les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection ?

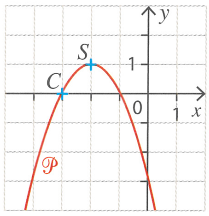
5 Déterminer une équation de l'axe de symétrie de chacune des paraboles dont une équation est donnée ci-dessous.

1. $y = 5x^2 + 8x - 4$

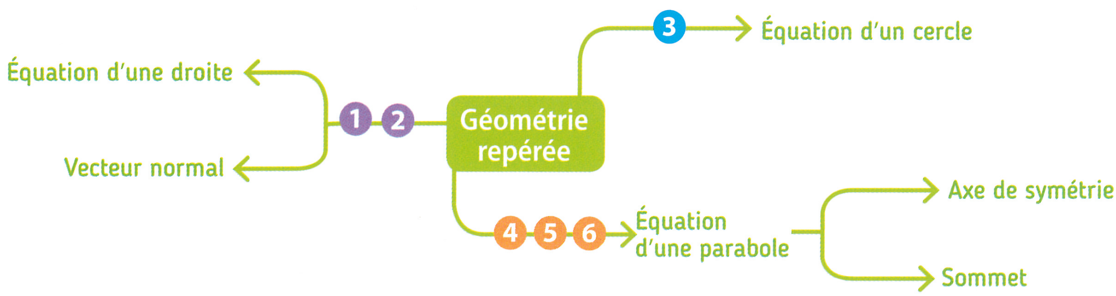
2. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$

3. $y = -2(x+3)^2 - 8$

6 Déterminer une équation de la parabole de sommet $S\,(-2\,;1)$ qui passe par le point $C\,(-3\,;0)$.



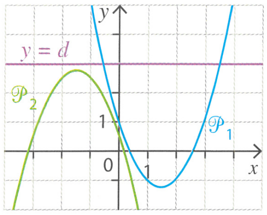
CORRIGÉS DES EXERCICES



TP 1 Intersections

Objectif
Étudier une parabole.

Soient a, b, c et d quatre réels fixés, tels que a est non nul. Dans un repère orthonormé du plan, on considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = d$ et une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.



1 Zoé a écrit la fonction ci-dessous.

```
1 def sommet(a,b,c):
2     if a!=0:
3         return -(b**2-4*a*c)/(4*a)
4     return False
```

a. Que réalise la fonction à la ligne 2 ?
Pourquoi ?
b. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction qui renvoie False.
c. Que renvoie sommet(3, 4, 1) ?
d. Quelle est la formule utilisée à la ligne 3 ?
e. Dans le cas où a est non nul, que renvoie cette fonction pour la parabole ?
f. Déterminer des valeurs pour les réels a, b et c de sorte que l'appel de la fonction renvoie la valeur 0. Quelle est, dans ce cas, la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses ?

2 Andrea a écrit une seconde fonction qui utilise la fonction précédente.

```
8  def Intersection(a,b,c,d):
9      if a>0 :
10         if sommet(a,b,c)>d:
11             return 0
12         elif sommet(a,b,c)==d:
13             return 1
14         return 2
15     elif a<0 :
16         if sommet(a,b,c)<d:
17             return 0
18         elif sommet(a,b,c)==d:
19             return 1
20         return 2
21     else :
22         return False
```

a. Quelles sont les valeurs possibles renvoyées par cette fonction ?
b. Dans quel cas la fonction renvoie-t-elle False ?
c. Que renvoie Intersection(1, 2, 3, 0) ?
d. Que renvoie Intersection(-2, 0, 1, -1) ?
e. Déterminer une valeur de d pour laquelle l'appel Intersection(-2, 0, 1, d) renvoie la valeur 2.
f. Illustrer par un dessin à main levée les lignes 9, 10 et 11 du code ci-dessus.
g. Que réalise cette fonction ?
h. Proposer un appel de la fonction qui renvoie la valeur 1 dans le cas où $a < 0$.

TP 2 Droites perpendiculaires

Objectif
Déterminer une équation cartésienne de droite.

On considère une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Exprimer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}$ en fonction de celles de $\vec{u}$.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par un point $A\,(x_A\,;y_A)$.
Cette droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels donnés tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
Écrire une fonction DroitePerpendiculaire en langage Python, qui prend en arguments les variables α, β, x_A et y_A et renvoie les valeurs des coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de Δ.
Cette fonction teste en particulier que les coefficients a et b ne sont pas simultanément nuls et renvoie False si c'est le cas.
3. On se place dans le cas où $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ et $A\,(-1\,;4)$ et on souhaite déterminer une équation cartésienne de Δ.
Comment doit-on utiliser la fonction DroitePerpendiculaire ?
4. Reprendre la question 3 dans le cas où $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $5x - 2y + 1 = 0$ et A est le point situé sur l'axe des abscisses qui a pour abscisse 3.

TP 3 Une cible

Objectif
Utiliser une équation cartésienne de cercle.

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le carré $ABCD$ tel que $A\,(0\,;0)$, $B\,(10\,;0)$, $C\,(10\,;10)$ et $D\,(0\,;10)$.
Au centre de ce carré, on a modélisé une cible par un cercle de centre I et de rayon 2 unités de longueur.

1. Écrire une instruction qui génère aléatoirement deux nombres compris entre 0 et 10. Le premier nombre sera stocké dans une variable x, le second dans une variable y.
2. Écrire une fonction cible qui génère les valeurs de x et y et teste si le point de coordonnées (x ; y) est dans le cercle. La fonction renvoie True si c'est le cas et False dans le cas contraire.
3. **a.** Écrire une fonction frequence qui prend en argument un nombre entier n et qui renvoie la fréquence à laquelle le joueur atteint la cible pour n exécutions de la fonction cible.
b. Tester cette fonction pour de grandes valeurs de n.
La valeur de la fréquence semble-t-elle se stabiliser autour d'une valeur particulière ?

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- L'instruction conditionnelle Si « *condition* » Alors « instruction » Sinon « instruction » s'écrit de la manière suivante.

```
if condition:
    instructions
```

```
if condition:
    instructions
else:
    instructions
```

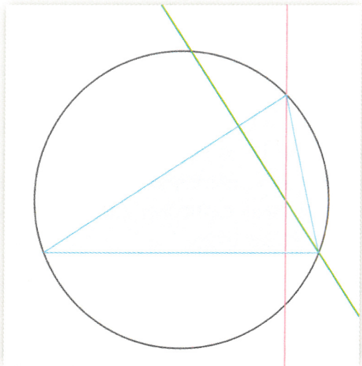
```
if condition1:
    instructions
elif condition2:
    instructions
else:
    instructions
```

- Pour calculer une puissance x^n, saisir x**n.
- Pour générer un nombre aléatoire, saisir l'instruction :
from math import random
La fonction random() génère un nombre compris entre 0 et 1.
- Pour utiliser la fonction racine carrée, saisir l'instruction :
from math import sqrt
- Pour calculer $\sqrt{x}$, saisir sqrt(x).

TP 4 Orthocentre et symétrie LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Étudier une configuration du plan avec un cercle.

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On veut déterminer la position de l'orthocentre d'un triangle inscrit dans un cercle donné.
On travaille sur un logiciel de géométrie dynamique.



1. **a.** Tracer le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x+1)^2+(y-1)^2=10$.
   b. Placer les points A et B du cercle dont l'ordonnée vaut 0 (A est le point d'abscisse négative).
   c. Placer les points C et D du cercle dont l'abscisse vaut 0 (C est le point d'ordonnée positive).
   d. Tracer le triangle ABC.
   e. Tracer le point H, orthocentre du triangle ABC.
   f. Tracer le symétrique du point D par rapport à la droite (AB).
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?
3. On souhaite à présent démontrer cette conjecture.
   a. Calculer les coordonnées des points A et B.
   b. Calculer les coordonnées des points C et D.
   c. Quelles sont, parmi les couples $(0\,;2)$, $(2\,;0)$ et $(2\,;2)$, les coordonées du point H ? Justifier.
   d. Conclure.

TP 5 Avec un paramètre LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Discuter de la nature d'un ensemble de points.

Soit m un réel compris entre -5 et 5.
On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité :

$$x^2-x+y^2+2y=m.$$

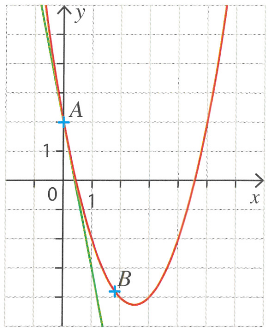
On veut discuter, selon les valeurs du réel m, de la nature de l'ensemble E.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, créer un curseur m dont les valeurs sont comprises entre -5 et 5.
2. Tracer l'ensemble E.
3. Conjecturer la nature de cet ensemble, selon les valeurs de m.
4. Démontrer cette conjecture.

TP 6 Tangentes à une parabole LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Déterminer des tangentes à une parabole.

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On considère la parabole d'équation $y = x^2 - 5x + 2$.
On nomme $\mathcal{T}$ la tangente à la parabole au point A d'abscisse 0.
On veut déterminer, s'il existe, un point de la parabole où la tangente est perpendiculaire à $\mathcal{T}$.



1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer la parabole et placer le point A.
b. Tracer la tangente à la parabole au point A.
c. Créer un curseur a.
d. Créer un point B d'abscisse a situé sur la parabole.
e. Tracer la tangente en B à la parabole.
f. Afficher sur l'écran l'angle formé par les deux tangentes.

2. Déplacer le curseur.
Existe-t-il un point de la parabole tel que les deux tangentes tracées à la question 1 soient perpendiculaires ?

3. On souhaite à présent démontrer cette conjecture.
a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la parabole.
b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à cette tangente.
c. En déduire la valeur du nombre dérivé au point B.
d. En déduire les coordonnées du point B.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour tracer un cercle, on peut au choix :
  – entrer l'équation dans l'onglet

    Saisie : (x + 2)² + (y − 1)² = 8

  – utiliser **Cercle (centre-point)** Centre, point du cercle[créés ou non]
- Pour créer un curseur, utiliser :

  a = 2

  Curseur Cliquer dans Graphique pour positionner le curseur
- Pour tracer une tangente à une courbe, utiliser :

  Tangentes Point[créé ou non] puis cercle ou conique ou fonction[créés]
- Pour afficher la mesure d'un angle, utiliser :

  Angle Point, Sommet, Point[créés ou non], ou deux lignes