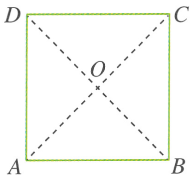
Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

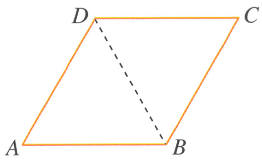
1 $ABCD$ est un carré de centre O et de côté 2.



Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ **c.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$
d. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}$ **e.** $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}$ **f.** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}$

2 $ABCD$ est un losange de côté 5 et tel que $BD = 5$.



Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$ **b.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ **c.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$
d. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ **e.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$ **f.** $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CD}$

3 On se place dans une base orthonormée. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$. **d.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1,5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

4 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On note θ l'angle $\widehat{BAC}$.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans les cas suivants.

a. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 9$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.
b. $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\theta = \pi$.
c. $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.
d. $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
e. $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

DIAPORAMA
CALCUL MENTAL
EN PLUS

Automatismes

5 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB = 2$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
Calculer les produits scalaires suivants.

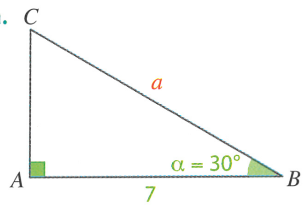
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ **b.** $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
c. $\vec{v}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})$ **d.** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

6 On se place dans une base orthonormée. Déterminer dans chaque cas la valeur de l'entier n tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

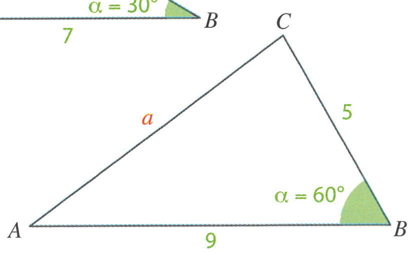
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}n\\n+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}n\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2n\end{pmatrix}$.

7 Calculer la valeur exacte de a dans chaque cas.

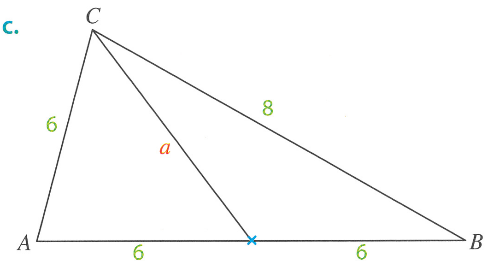
a.



b.



c.



8 A et B sont deux points distincts.
Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M vérifiant l'égalité donnée.

a. $MA = MB$ **b.** $AM = 12$
c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ **d.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

9 Donner le résultat des sommes de vecteurs suivantes sous la forme d'un seul vecteur.

a. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ **b.** $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BM}$
c. $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AB}$ **d.** $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
e. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}$ **f.** $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

10 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(-2\,;2)$, $B\,(0\,;5)$ et $C\,(4\,;-2)$.
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
b. Calculer l'aire du triangle ABC.

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur produit scalaire est nul.
2. Dans un carré $ABCD$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$ est un réel positif.
3. Si $ABCD$ est un rectangle, alors $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\| = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
4. Un triangle de côtés 5, 8, 9 a un angle de 60°.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

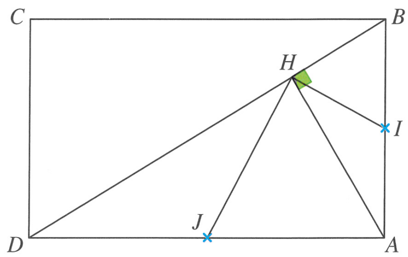
Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$.
I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AD]$.
H est le projeté orthogonal de A sur (BD).

- Émettre une conjecture sur les droites (HI) et (HJ) puis la démontrer en utilisant différentes méthodes.



Exposé

voir p. 206

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Pour mesurer l'arc de méridien de Dunkerque à Barcelone, les astronomes Delambre et Méchain ont utilisé le procédé de la triangulation et un instrument appelé cercle répétiteur, représenté ci-contre.
Faire des recherches sur la méthode de triangulation et le fonctionnement du cercle répétiteur.

VA PIANO

Exercices

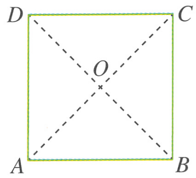
Calcul de produits scalaires

1 Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2 Dans un triangle PQR, on a $\widehat{QPR} = 120°$, $PQ = 10$ et $PR = 5$.
- Calculer $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PR}$.

3 MNP est un triangle tel que $NP = 6$. I est le milieu de $[NP]$ et H le projeté orthogonal de M sur (NP). On a $OH = 2$.
- Calculer $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{PM}$.

4 $ABCD$ est un carré de centre O et de côté a.

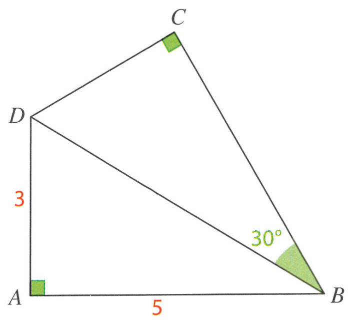


Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants.

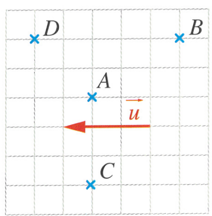
a. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$ **b.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$
d. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB}$ **e.** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ **f.** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD}$

5 À l'aide des données de la figure ci-dessous, calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$ **b.** $\overrightarrow{BD}^2$ **c.** $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD}$
d. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$ **e.** $\overrightarrow{CD}^2$ **f.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$



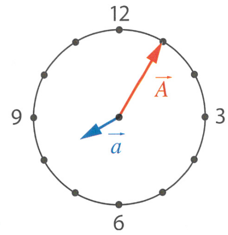
6 On considère la figure ci-dessous, dont le quadrillage est composé de carrés de côté 1.



Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$ **b.** $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}$ **c.** $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{u}$
d. $\overrightarrow{DB} \cdot \vec{u}$ **e.** $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **f.** $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB}$

7 L'horloge ci-contre affiche 8 h 05. La petite aiguille est représentée par le vecteur $\vec{a}$ et la grande par le vecteur $\vec{A}$. On suppose que $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{A}\| = 2$.



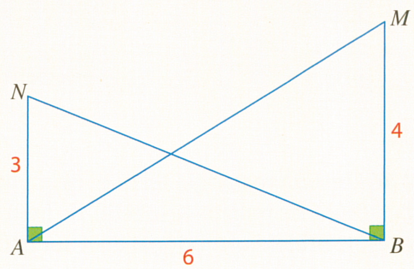
1. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{a}$.
2. Si elle affiche 3 h 25, que vaut le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{a}$?
3. Si $\vec{A} \cdot \vec{a} = -2$ et que la petite aiguille est sur le 11, quelle heure est-il ?

8 VRAI OU FAUX

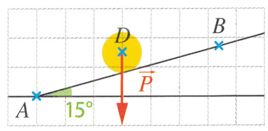
Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
1. Si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur produit scalaire est égal au produit de leurs normes.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
3. Dans un rectangle $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
4. Dans un rectangle $ABCD$, on a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2$.

9 PRISE D'INITIATIVE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

À l'aide des données de la figure ci-dessous, calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$. On peut conjecturer la valeur du résultat grâce à un logiciel de géométrie dynamique.



10 Un charpentier veut monter une poutre pour construire une charpente en haut d'une colline. Il doit tirer la poutre sur toute la distance AB et sur une pente inclinée d'un angle de 15° par rapport à l'horizontale.



$AB = 30$ mètres et la masse de la poutre est 60 kg. Durant la montée, la poutre est soumise à plusieurs forces dont son poids $\vec{P}$. On rappelle que $P = \|\vec{P}\| = mg$ où m est la masse et $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$.
On définit le travail W d'une force $\vec{F}$ sur un déplacement rectiligne d'un point A à un point B par $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, où W est exprimé en joule (J), F en newton (N) et AB en mètre (m).
- Calculer le travail du poids de la poutre sur le déplacement AB.

11 Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$ et $AC = 5$. On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. On suppose que $\widehat{A} = 45°$.

a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire le nombre réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AC}$.

2. Reprendre les questions précédentes en supposant que $\widehat{A} = 120°$.

12 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. Soient E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et F le milieu de $[CD]$.

1. Réaliser une figure.

2. a. En remarquant que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$, démontrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = -AD^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

3. Montrer que les droites (EF) et (BD) sont perpendiculaires.

Propriétés du produit scalaire

13 Sachant que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{2}{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{-1}{6}$, déterminer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$.

14 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

• Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(\vec{u} - \vec{v})^2$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

15 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraire tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$.

• Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot (-\vec{v})$.

16 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens tels que $\|\vec{u}\| = 7$ et $\|\vec{v}\| = \frac{4}{5}$.

• Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(2\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$.

17 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.

1. Calculer les expressions suivantes.

a. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

b. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

2. a. Calculer $\|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|^2$.

b. En déduire que les vecteurs $(\vec{u} + 2\vec{v})$ et $(\vec{u} - 2\vec{v})$ sont orthogonaux.

18 IJK est un triangle équilatéral de côté 3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis par $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{IK}$.

a. Réaliser une figure.

b. À quel vecteur est égal le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$? En déduire $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

c. Construire le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \vec{u} + \vec{v}$. Quelle est alors la nature du quadrilatère $IJLK$?

d. En déduire $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

19 $ABCD$ est un parallélogramme.
Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$.

20 Dans une base orthonormée $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, démontrer que les vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j}$ sont orthogonaux.

21 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $A\,(-2\,;2)$, $B\,(1\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.
Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b.** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **c.** $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$

22 Dans une base orthonormée, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

• Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

23 QCM
On se place dans une base orthonormée. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer laquelle des trois propositions a, b ou c est correcte.

a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni colinéaires ni orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$. **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-25\\15\end{pmatrix}$.

24 On se place dans une base orthonormée et on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{w}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.$$

Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b.** $\vec{u} \cdot \vec{w}$ **c.** $\vec{v} \cdot \vec{w}$

d. $2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$ **e.** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ **f.** $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$

25 On se place dans une base orthonormée. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

• Déterminer la valeur de a telle que :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **2.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = a$ **4.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

26 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ où x est un nombre réel.

En utilisant deux expressions du produit scalaire, déterminer la (ou les) valeur(s) de x dans chacun des cas suivants.

a. $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ **b.** $\widehat{BAC} = \pi$ **c.** $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

27 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;1)$, $B\left(\frac{14}{5};\frac{17}{5}\right)$ et $C(5;1)$.

1. Calculer les produits scalaires suivants.
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

28 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$I(-1;2)$ et $J(2;3)$.
• Les points $A(1\,;\,1)$, $B(-0{,}5\,;\,5)$ et $C(-2\,;\,2)$ appartiennent-ils à la médiatrice du segment $[IJ]$?

29 ALGO
Écrire un algorithme en langage naturel permettant de tester si deux vecteurs, dont les coordonnées dans une base orthonormée sont connues, sont orthogonaux.

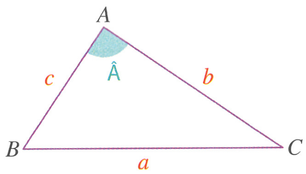
30 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$M(2;-2)$, $N(-3;1)$ et $P(1;2)$.
a. Calculer $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
b. En déduire une valeur exacte de l'angle $\widehat{PMN}$.

31 $ABCD$ est un parallélogramme tel que :
$AB = 7$, $AD = 3$ et $BD = 10$.
• Calculer la longueur AC.

Applications du produit scalaire

32 ABC est un triangle tel que :
$AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$.
• Déterminer une valeur approchée à 0,1° près des trois angles de ce triangle.

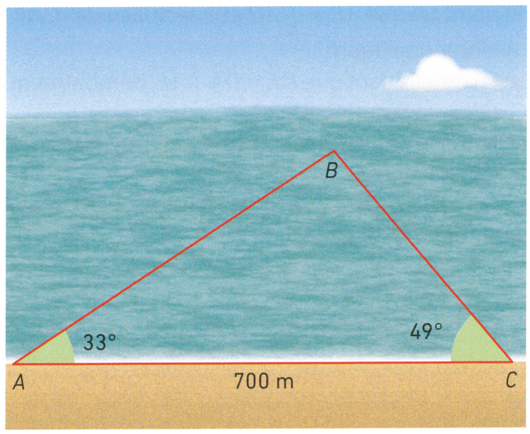
33 On considère le triangle ABC suivant.



Déterminer dans chaque cas la longueur exacte du côté manquant.
1. $b = 3$, $c = 4$ et $\widehat{A} = 60°$.
2. $a = 2\sqrt{2}$, $c = 5$ et $\widehat{B} = 45°$.
3. $b = c = 3$ et $\widehat{A} = 90°$.

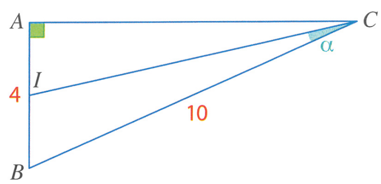
34 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :
$AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.
On note I le milieu de $[AB]$.
1. Calculer les longueurs CI et CB.
2. En déduire une valeur approchée de la mesure en degré de l'angle $\widehat{ICB}$.

35 **La bande des 300 mètres**
Raisonner, représenter
Deux maîtres-nageurs sauveteurs postés sur la plage observent un jet-ski naviguant à vive allure. Ils souhaitent savoir si le jet-ski se situe bien en dehors de la zone de baignade, soit au-delà de 300 m du rivage. Ils ont effectué les relevés suivants (les points A et C représentent les positions des maîtres-nageurs sauveteurs et le point B celle du jet-ski).



• Le jet-ski est-il en infraction ?

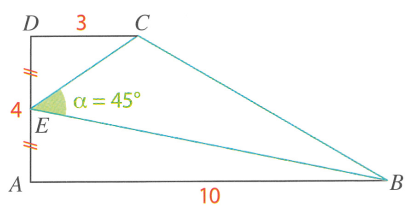
36 On considère la figure suivante.



I est le milieu du segment $[AB]$.
1. Calculer les valeurs exactes de CA et CI.
2. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle α.

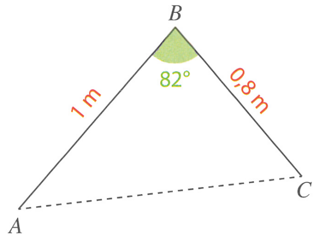
37 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AC = 6$.
• Déterminer une valeur approchée des angles de ce parallélogramme à 0,1° près.

38 On considère le trapèze ci-dessous.



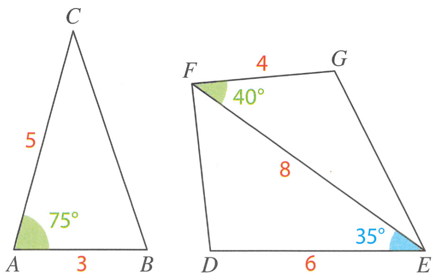
E est le milieu du segment $[AD]$.
1. Calculer les valeurs exactes de CE et BE.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de CB.

39 Une boule de pétanque lancée du point A heurte une deuxième boule placée en B et qui est alors envoyée en C en faisant un angle de 82°.



• À quelle distance du point de lancement de la première boule se trouve la deuxième après avoir été déportée ?

40 Calculer une valeur approchée du périmètre de chacune des deux figures ci-dessous.



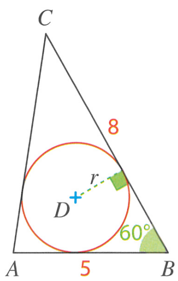
41 Soient MNP un triangle et I le milieu du côté $[NP]$.

• Démontrer que MNP est rectangle en $M \Leftrightarrow MI = \dfrac{NP}{2}$.

42 A et B sont deux points du plan.
Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation donnée.
a. $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$. **b.** $AB = 6$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$.
c. $AB = 4$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -10$.

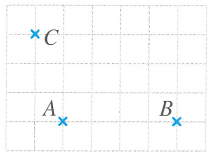
43 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A\,(5\,;-2)$ et $B\,(-1\,;3)$.
• Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$.

44 **Représenter, raisonner**
On considère la figure ci-contre où D est le centre du cercle de rayon r inscrit dans le triangle ABC.



1. Calculer le périmètre P du triangle ABC.
2. On note S l'aire du triangle ABC. Justifier que $S = \dfrac{P \times r}{2}$.
3. Calculer S (on pensera à utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle).
4. En déduire la valeur de r.

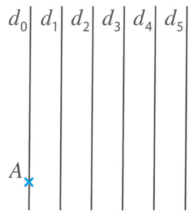
45 Sur la figure suivante, $AB = 4$.



1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b. Soit M un point du plan, démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.
c. En déduire l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -4.$$
2. a. Déterminer un point D de la droite (AB) tel que :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 12.$$
b. En déduire l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 12.$$

46 QCM
Soient k un réel positif et A et B deux points du plan tels que $AB = 5$.
Donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées.
1. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ est :
ⓐ un cercle ⓑ une droite ⓒ vide
2. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$ est :
ⓐ un cercle ⓑ une droite ⓒ vide

47 Sur la figure ci-contre, chaque droite d_k représente l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$, où k est un entier compris entre 0 et 5 et $\vec{u}$ un vecteur.
• Reproduire la figure et représenter le vecteur $\vec{u}$.

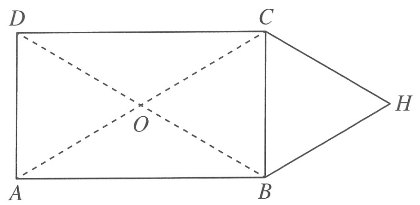


48 ALGO
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(1\,;1)$, $B\,(2\,;3)$ et M de coordonnées $(x\,;y)$ où x et y sont deux nombres réels.
Caroline a écrit l'algorithme suivant en langage naturel.

$a \leftarrow (x-1)^2 + (y-1)^2$
$b \leftarrow (x-2)^2 + (y-3)^2$
$c \leftarrow (2x-3)^2 + (2y-4)^2$
Si $a + b = c$ alors
    Afficher Vrai
Sinon
    Afficher Faux

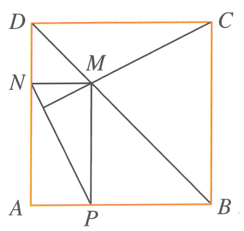
1. Qu'affichera cet algorithme dans chacun des cas suivants ?
a. $x = 1\,;y = 2$.
b. $x = 2\,;y = 1$.
2. a. Interpréter géométriquement les calculs des variables a, b et c.
b. Quelle information sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ cet algorithme permet-il d'obtenir ?

49 $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 2a$ et $BC = a$.
BCH est un triangle équilatéral extérieur au rectangle $ABCD$.



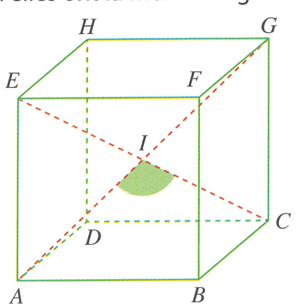
1. Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a.
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ **c.** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$
2. Exprimer AH^2 en fonction de a.

50 $ABCD$ est un carré de côté 1. On note M un point de la diagonale $[BD]$. Les points N et P sont tels que $APMN$ est un rectangle.



On souhaite démontrer que les droites (CM) et (PN) sont perpendiculaires. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
1. a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
b. Déterminer l'équation réduite de la droite (DB).
c. On note x l'abscisse du point M. Exprimer son ordonnée en fonction x.
d. En déduire les coordonnées des points N et P.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{NP}$. Conclure.

51 **Calculer**
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 5.
On note I le milieu des diagonales $[EC]$ et $[AG]$ dont on admet qu'elles ont la même longueur.

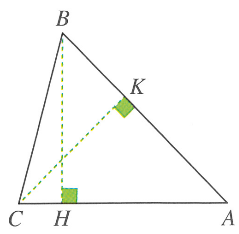


1. Quelle est la nature du quadrilatère $AEGC$?
2. On se place dans le plan du quadrilatère $AEGC$.
a. Calculer la longueur du segment $[GC]$.
b. En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$, déterminer une valeur approchée à 0,01 degré près de l'angle $\widehat{AIC}$.

52 ABC est un triangle tel que $AB = 3$ et $BC = 5$, et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 1$.
a. Calculer $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BC}$.
b. Calculer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$. En déduire la longueur AC.

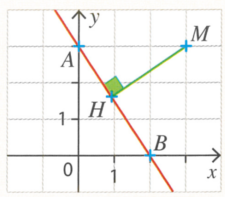
53 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\,(1\,;2)$, $B\,(-2\,;-1)$ et $C\,(4\,;1)$.
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
a. Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}$.
b. En déduire la longueur BH.

54 Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu. On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC) et K le projeté orthogonal de C sur (AB).



1. Montrer que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH \times AC.$$
2. En déduire que :
$$AH \times AC = AK \times AB.$$
3. L'égalité précédente est-elle encore vraie lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus ? Justifier.

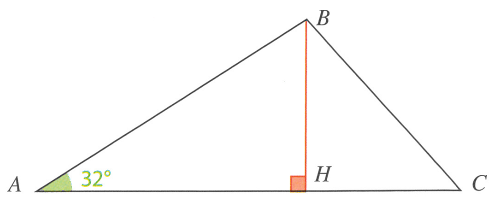
55 PRISE D'INITIATIVE
Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a placé les points $A\,(0\,;3)$, $B\,(2\,;0)$ et $M\,(3\,;3)$.



• Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

56 PRISE D'INITIATIVE
$ABCD$ est un rectangle dont la longueur est égale au double de sa largeur.
• Déterminer des valeurs approchées des angles formés par les deux diagonales de $ABCD$.

57 On veut construire deux tyroliennes à partir d'un poteau vertical $[BH]$ comme sur le schéma ci-dessous où $AC = 200$ m, $AB = 150$ m et $\widehat{A} = 32°$.

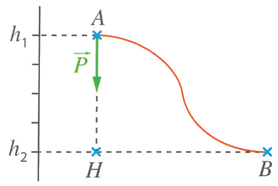


• Quelle est la longueur de la tyrolienne représentée par le segment $[BC]$? Combien mesure l'angle $\widehat{C}$?

58 **Travail du poids**

Lorsque les déplacements ne dépassent pas quelques kilomètres, le poids d'un corps peut être considéré comme une force constante. Cette force, exprimée en newton (N), est appliquée au centre de gravité du corps. Le travail du poids, exprimé en joule (J), au cours d'un déplacement AB, s'écrit $W_{AB} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$.

1. On a schématisé ci-dessous le déplacement du centre de gravité d'un corps, d'un point A à un point B.

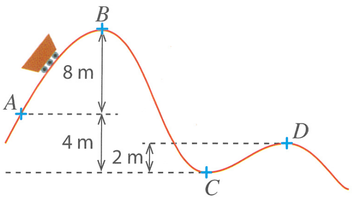


H est le projeté orthogonal du point A sur la parallèle au sol passant par B, h_1 et h_2 sont les hauteurs respectives des points A et B.

À l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$W_{AB} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

2. Application : dans une fête foraine, un wagon parcourt des « montagnes russes ».



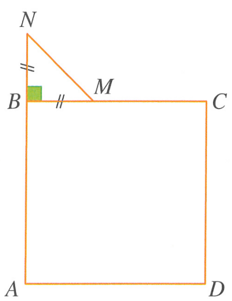
On donne $P = 4{,}2$ kN.

Calculer le travail du poids du wagon et de ses passagers au cours des trajets suivants.

a. de A vers B ; **b.** de B vers C ; **c.** de C vers D.

59 **Chercher, calculer**

$ABCD$ est un carré. M étant un point quelconque du segment $[BC]$, on construit un triangle MBN isocèle rectangle en B, extérieur au carré $ABCD$.

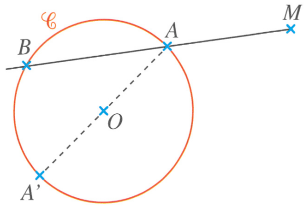


• Que peut-on dire des droites (AM) et (NC) ? Justifier.

60 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$.

• Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $5 \leqslant \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant 12$.

61 Soit C un cercle de centre O et de rayon R. Soit M un point du plan, extérieur au cercle. Une demi-droite issue de M coupe le cercle en A et B. On note A' le point du cercle diamétralement opposé au point A.



1. Que peut-on dire des droites (MB) et $(A'B)$? Justifier.

2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.

62 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 10$ et I est le milieu du segment $[AB]$.

1. Soit M un point du plan. Justifier que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 25.$$

2. En déduire :

a. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11$.

b. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant 0$.

c. l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} > 0$.

63 Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6$.
Soit I le milieu de $[AB]$.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité vectorielle donnée.

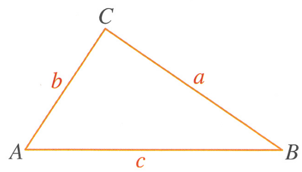
1. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3$

3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

4. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$

64 Soit un triangle ABC.



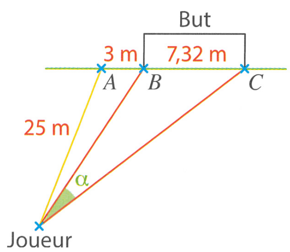
1. On note S l'aire du triangle ABC.

Montrer que $S = \frac{1}{2}\, bc\sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}\, ac\sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}\, ab\sin(\hat{C})$.

2. a. ABC est un triangle tel que $AC = 3$, $BC = 4$ et $\widehat{BAC} = 45°$. Calculer l'aire de ABC.

b. Un avant-centre de football se retrouve en face des buts dans la situation schématisée ci-dessous.

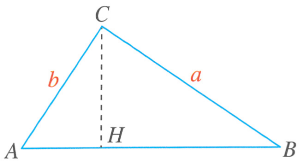
Combien mesure l'angle α ?



65 **Approfondissement**

Calculer

Soient un triangle ABC et H le projeté orthogonal de C sur (AB).



1. a. Montrer que $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})}$.

b. En déduire que $\dfrac{a}{\sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

Cette relation est appelée « **loi des sinus** ».

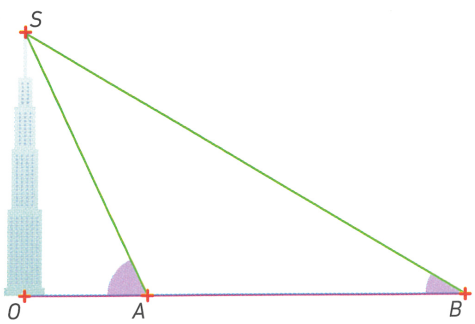
2. a. Soit ABC un triangle tel que $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 45°$ et $\widehat{CBA} = 30°$.
Calculer les longueurs AB et BC.

b. Soit ABC un triangle tel que $AC = 4$, $BC = 6$ et $\widehat{BAC} = 45°$.
Calculer AB.

c. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 6$ et $\widehat{BAC} = 50°$.
Calculer l'aire et le périmètre du triangle ABC.

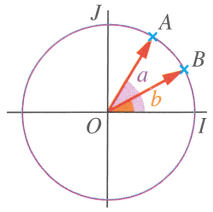
66 **Approfondissement**

Pour vérifier la hauteur de la tour Burj Khalifa à Dubaï, on a réalisé deux mesures d'angles à 1 km de distance ($AB = 1$ km). On a trouvé $\widehat{SAO} = 64{,}22°$ et $\widehat{SBO} = 30{,}6°$.



• Déterminer une valeur approchée de la hauteur de la tour (on pourra utiliser la loi des sinus établie à l'exercice précédent).

67 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle de centre O et de rayon 1.
A et B sont deux points de ce cercle.



1. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction des angles a et b.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ à l'aide des coordonnées obtenues à la question **1**.

3. Exprimer l'angle $\widehat{BOA}$ en fonction de a et b, puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ en utilisant la définition du produit scalaire.

4. Déduire des questions **2** et **3** une expression de $\cos(a - b)$, puis de $\cos(a + b)$.

5. À partir des valeurs exactes des cosinus et sinus des angles $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

68 Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 6$, I le milieu de $[AB]$ et M un point du plan.

1. a. Justifier que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

b. En déduire que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Cette égalité est appelée deuxième relation du théorème de la médiane.

2. a. Démontrer l'équivalence $MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow MI^2 = 1$.

b. En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.

69 Soient A et B deux points distincts et M un point du plan. À l'aide de la deuxième relation du théorème de la médiane établie dans l'exercice précédent, déterminer la position du point M telle que $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

70 PRISE D'INITIATIVE

Chercher, raisonner

Soient ABC un triangle isocèle en C et M un point de la droite (AB).

• Existe-t-il une position du point M telle que $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimale ? Si oui, laquelle ?
On peut conjecturer la réponse à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

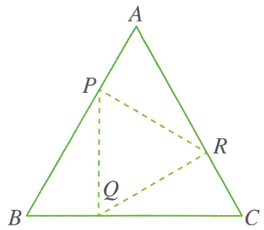
71 Soit ABC un triangle rectangle en B. On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. Soit M un point du plan. À l'aide de la relation de Chasles, justifier que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

2. En déduire que le cercle circonscrit au triangle ABI est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

72 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
On donne les points P, Q et R tels que :

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.



1. Exprimer, en fonction de a, AP^2, AR^2, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}$ et PR^2.
2. En déduire la nature du triangle PQR.

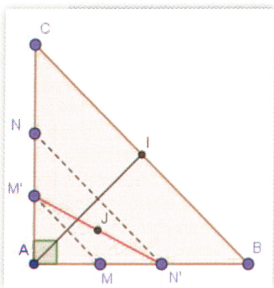
73 ABC est un triangle isocèle rectangle tel que $AB = AC = 6$ cm. On note I le milieu de $[AB]$.
1. Montrer que, pour tout point M du plan, on a :
$$MA^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC} = MI^2 - 9.$$
2. En déduire l'ensemble des points M tels que :
$$MA^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC} = 12.$$

74 **Démonstration**
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
1. Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Indication : on pourra rapporter le plan à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

2. En utilisant la formule précédente avec deux vecteurs judicieusement choisis, démontrer que :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2).$$
3. Soient A, B et C trois points.
Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

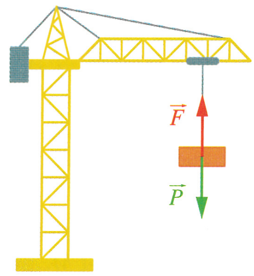
75 ABC est un triangle isocèle et rectangle en A, I est le milieu de $[BC]$. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. On note M' et N' les symétriques respectifs de M et de N par rapport à (AI) et J le milieu de $[M'N']$.



1. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux droites (AJ) et (MN) ?
2. Démontrer cette conjecture.

76 ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
On appelle I le milieu de $[BC]$.
1. Justifier que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$.
2. En déduire la longueur de la médiane $[AI]$.

77 **Puissance d'une force**
Lorsqu'on déplace un objet sur un trajet rectiligne de A vers B avec une force constante $\vec{F}$, exprimée en newton (N), le travail de $\vec{F}$, exprimé en joule (J), est donné par $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ et la puissance P de $\vec{F}$, exprimée en watt (W), est donnée par la formule $P = \frac{W}{t}$, où t désigne le temps du trajet exprimé en seconde.
Une grue de chantier déplace à vitesse constante un conteneur de masse $m = 5t$, d'une hauteur de 13 m, en une durée de 24 s.



Le mouvement étant rectiligne uniforme, on a $\vec{F} = -\vec{P}$ (où $P = mg$ avec $g = 9{,}81$ N·kg^{-1}).
• Calculer la puissance de la force $\vec{F}$ développée par la grue pour soulever le conteneur.

78 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
$ABCD$ est un carré. M est un point du segment $[AC]$ distinct de A et de C. La perpendiculaire à (AD) passant par M coupe (AD) en P. La perpendiculaire à (DC) passant par M coupe (DC) en Q.
• Que peut-on dire des droites (BQ) et (CP) ? Justifier.
On peut conjecturer la réponse à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

79 ALGO
Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et un point $M(x_M, y_M)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$. On appelle d la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.
1. Démontrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. a. Écrire un algorithme en langage naturel permettant d'obtenir l'équation de la droite d connaissant celle de $\mathcal{D}$ et les coordonnées du point M.
b. Que renvoie l'algorithme avec :
$$\mathcal{D} : -3x + 2y + 5 = 0 \text{ et } M(7\,;-2)\ ?$$

80 ALGO
Dans chacun des cas suivants, dire s'il est possible d'écrire un algorithme réalisant l'opération indiquée. Si oui, proposer un tel algorithme ; si non, expliquer pourquoi c'est impossible.
1. Renvoyer la longueur d'une médiane d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés.
2. Renvoyer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans un triangle ABC en fonction des longueurs AB et BC et de l'angle $\widehat{B}$.

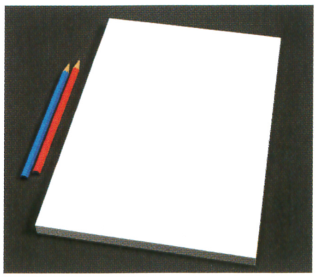
81 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.
Soit A un point de la parabole d'abscisse $a > 0$. On note B le point d'intersection entre la parabole $\mathcal{P}$ et la perpendiculaire à (OA) passant par O.
1. Réaliser la figure en prenant trois valeurs différentes pour a.
Conjecturer que, quelle que soit la valeur de a, la droite (AB) passe par un point fixe I dont on donnera les coordonnées.
2. Démontrer la conjecture de la question **1**.

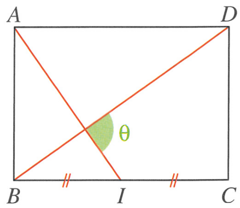
82 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $A\,(2\,;-1)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.
1. On veut réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
a. Placer le point A et créer le vecteur $\vec{u}$.
b. Créer trois points M_1, M_2 et M_3 puis les vecteurs $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AM_3}$.
c. Calculer, avec le logiciel, les produits scalaires $\overrightarrow{AM_1}\cdot\vec{u}$, $\overrightarrow{AM_2}\cdot\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_3}\cdot\vec{u}$.
d. En déplaçant les points M_1, M_2 et M_3, conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 16$.
2. On veut démontrer cette conjecture. On considère un point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$. Déterminer la valeur de k telle que C appartienne à la ligne de niveau cherchée.
3. Montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{u} = 0$. En déduire la ligne de niveau cherchée.

83 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A\,(-3\,;-1)$ et $B\,(1\,;1)$. On cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 10$ (cet ensemble est appelé ligne de niveau 10).
1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire trois points M_1, M_2 et M_3 appartenant à cette ligne de niveau.
2. En développant l'expression $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$, montrer que la ligne de niveau cherchée est équivalente à la ligne de niveau $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 5$, où I est le milieu de $[AB]$.
3. Démontrer, en utilisant l'exercice précédent, que cette ligne de niveau est une droite dont on donnera les caractéristiques.

84 **Approfondissement**
Soient ABC un triangle et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
On note G le point défini par l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
1. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. Établir des égalités similaires avec les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$.
3. Que peut-on en déduire pour les médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ du triangle ABC ?

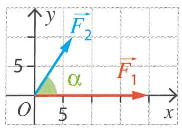
85 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Format A4**
Raisonner
Une feuille de format A4 a pour dimensions 21 cm en largeur et 29,7 cm en longueur. On appelle A, B, C et D les sommets de la feuille et on note I le milieu de $[BC]$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.





1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique. Conjecturer la mesure de l'angle θ en degré.
2. On pose $L = AD = BC$ et $l = AB = CD$.
a. En remarquant que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, déterminer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD}$ en fonction de l et L.
b. En déduire que $\theta = 90° \Leftrightarrow \frac{L}{l} = \sqrt{2}$.
Le nombre $\frac{L}{l}$ s'appelle le format de la feuille de papier.
3. Expliquer pourquoi le logiciel affiche la mesure 90° pour l'angle θ mais ne met pourtant pas le symbole d'angle droit.

86 **Représenter**
En mécanique, une force est représentée par un vecteur. Lorsqu'une force s'applique sur un solide, la norme du vecteur force est proportionnelle à l'intensité de la force (exprimée en newton, N). On considère un solide S sur lequel deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ s'appliquent en un point O, origine d'un repère orthonormé comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que $F_1 = 20$ N et $F_2 = 13$ N.
1. On appelle résultante des deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ le vecteur somme de ces deux forces $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.
a. Reproduire le graphique, en choisissant une unité adaptée, et représenter la résultante des deux forces.
b. En mesurant sur le graphique, donner une approximation de l'intensité de la résultante.
2. En utilisant le graphique, déterminer la valeur exacte du produit scalaire $\vec{F_1}\cdot\vec{F_2}$.
3. Calculer R^2 en utilisant le carré scalaire de $\vec{R}$.
4. Combien mesure l'angle α ?
5. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

87 Soient A, B, C et D quatre points du plan.

1. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$, montrer que :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2. Dans un triangle ABC, on note H l'intersection des hauteurs issues de A et de B.
En utilisant la relation précédente, démontrer que le point H appartient à la hauteur issue de C, c'est-à-dire que les trois hauteurs sont concourantes en H.
H est appelé l'**orthocentre** du triangle ABC.

88 **Approfondissement**

On considère un triangle ABC et on note G le point d'intersection de ses médianes, appelé centre de gravité du triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre défini dans l'exercice précédent.

1. Tracer un triangle ABC puis les points O, G et H. Que peut-on conjecturer ?

2. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

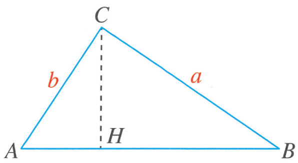
a. En remarquant que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$, justifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

b. En déduire que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de A.

c. Montrer de la même façon que M appartient à la hauteur du triangle ABC issue de B et en déduire que M est confondu avec H.

3. Montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et conclure.

89 Soit un triangle ABC d'aire S.



1. Exprimer $\cos(\hat{A})$ en fonction de a, b et c.

2. En déduire que $\sin^2(\hat{A}) = \dfrac{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2}$.

3. On note p le demi-périmètre du triangle ABC :

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Montrer que :

$$\sin(\hat{A}) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

4. En utilisant la loi des sinus (voir exercice 65), en déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Cette formule est appelée formule de Héron, du nom du mathématicien grec Héron d'Alexandrie, Ier siècle après J.-C.

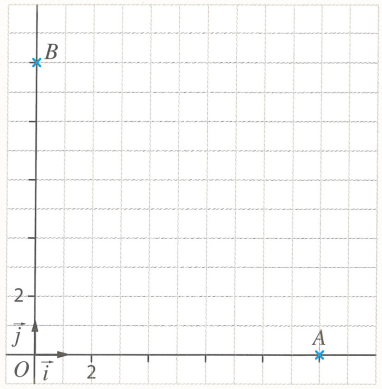
5. ALGO **a.** Écrire un algorithme qui calcule l'aire d'un triangle connaissant les longueurs a, b et c de ses côtés lorsque c'est possible et sinon, affiche « a, b et c ne sont pas les côtés d'un triangle ».

b. Qu'affichera cet algorithme dans le cas d'un triangle équilatéral de côté 4, puis dans celui d'un triangle dont les côtés sont 3, 4 et 5 ?

90 PRISE D'INITIATIVE **Épave de bateau**

Chercher, représenter

On considère la carte suivante munie d'un repère orthonormé, où une unité graphique correspond à 1 km.



Pour localiser une épave, un bateau équipé d'un sonar a relevé que celle-ci se situait à 8 km du point O, à 5 km du point A et à plus de 15 km du point B.

- Déterminer les coordonnées du point E correspondant à l'emplacement de l'épave.

On peut d'abord faire une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

91 Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à d. On note H le projeté orthogonal de A sur d et M un point quelconque de d.

1. Justifier que $AM^2 \geqslant AH^2$. En déduire que la distance AH est la plus petite des distances de A aux points de d.
AH est appelée la **distance du point A à la droite d.**

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
On note $(x_A\,;y_A)$ les coordonnées de A, $(x_H\,;y_H)$ les coordonnées de H et $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de d.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

b. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ de deux façons différentes, démontrer que $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3. ALGO PYTHON Écrire le script d'une fonction Python dont les arguments sont les coordonnées respectives de trois points A, B et C et qui renvoie la hauteur du triangle ABC issue de A.

92 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ cm et $AD = 3$ cm. E est un point du segment $[AB]$ et on appelle F le point d'intersection des droites (ED) et (AC).

1. Dans cette question, on suppose que $AE = 4$ cm.
Calculer les longueurs EC et ED.
En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{DEC}$.

2. a. Justifier que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED} = \|\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AE}\|$.

b. En déduire où placer le point E pour que les droites (AC) et (DE) soient perpendiculaires.

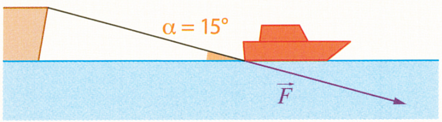
3. PRISE D'INITIATIVE On note x la longueur en centimètre du segment $[AE]$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = x^2 - 5x + 9$.

b. En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$ est minimal.
Que peut-on alors dire de l'angle $\widehat{DEC}$?

93 **Remorquage d'un cargo**

Un remorqueur tracte un cargo comme sur la figure ci-dessous sur un parcours rectiligne $[AB]$ de 1 500 m avec une force constante $\vec{F}$ et à la vitesse de 5 km·h^{-1}.



Le travail W de la force $\vec{F}$ sur le trajet $[AB]$, exprimé en joule (J), est $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. On suppose que $F = 5 \times 10^6$ J.
La puissance de la force de traction $\vec{F}$ exprimée en watt (W) est donnée par $P = \frac{W}{t}$, où t désigne le temps du trajet exprimé en seconde.

- Calculer la puissance de la force $\vec{F}$ lors de ce trajet.

94 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\,(2\,;3)$, $B\,(5\,;0)$ et $M\,(x\,;y)$, où x et y sont deux nombres réels. k est un nombre réel.

1. Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction de x et y.

2. En déduire l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k.$$

3. Tracer ces ensembles pour $k = -1$, $k = 1$ et $k = 3$.

95 QCM

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $A\,(2\,;5)$, $B\,(11\,;1)$ et $C\,(6\,;-4)$.
Donner la seule réponse exacte parmi les trois proposées, sans justifier.

1. Le triangle ABC est :
a) rectangle et non isocèle ;
b) rectangle et isocèle ;
c) isocèle et non rectangle.

2. $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ vaut :
a) $\frac{72}{97}$ b) $\frac{36}{97}$ c) $\frac{65}{97}$

3. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ est :
a) un cercle ; b) une droite ; c) ni l'un ni l'autre.

4. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 5$ est :
a) un cercle ; b) une droite ; c) ni l'un ni l'autre.

96 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A\,(-2\,;1)$, $B\,(1\,;2)$ et $C\,(1\,;-1)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. On appelle (E) l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 7.$$

a. Vérifier que $A \in (E)$.

b. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Exprimer $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ en fonction de x et y.

c. On a programmé l'algorithme suivant sur un logiciel.

```
i ← 0
Pour x allant de –10 à 10 :
  Pour y allant de –10 à 10 :
    Si x² + y² – 2x – y – 1 = 7 :
      i ← i + 1
```

À la fin de son exécution, la variable i contient la valeur 4.
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

d. En utilisant le théorème de la médiane, déterminer et représenter l'ensemble (E), puis retrouver graphiquement le résultat de la question précédente.

97 Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $MA = 2MB$.

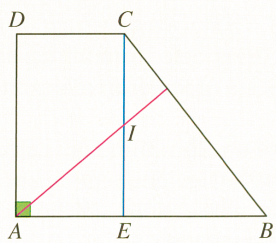
1. a. Vérifier que les points K et L, respectivement définis par :
$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB},$$
appartiennent à (E).

b. Démontrer que :
$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \vec{0}.$$

2. a. Justifier que :
$$MA = 2MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0.$$

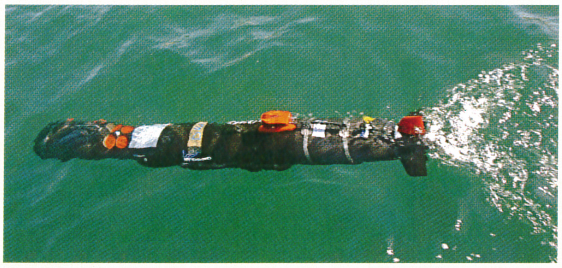
b. En utilisant les points K et L, simplifier la relation précédente et conclure.

98 Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 7$, $AD = 5$ et $DC = 3$.
E est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 3$; I est le milieu du segment $[EC]$.

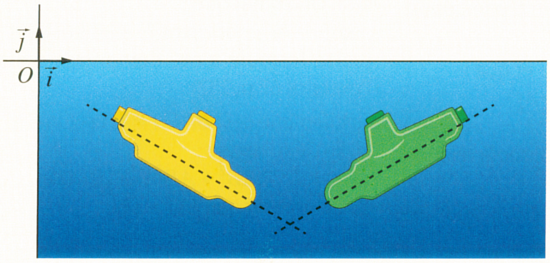


- Les droites (AI) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?
Si non, quelle valeur donner à la longueur du segment $[AB]$ pour que ce soit le cas ?

99 **Trajectoires de sous-marins**



On considère deux sous-marins se déplaçant en ligne droite, chacun à vitesse constante. À chaque instant t, exprimé en minute, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité est le mètre. La droite $(O\,;\vec{i})$ représente le niveau de la mer.



1. On admet que, pour tout $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées $(140-60t\,;-170-130t)$.

a. Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

b. Calculer la distance parcourue par le premier sous-marin en une minute. En déduire sa vitesse exprimée en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{S_1(0)\,S_1(1)}\cdot\vec{i}$.
En déduire l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le niveau de la mer.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

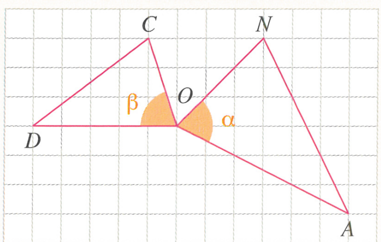
2. Au début de l'observation, le second sous-marin se trouve au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\,;-68)$ et atteint au bout de trois minutes le point de coordonnées $(-202\,;-248)$.
À quel instant t, exprimé en minute, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

3. Au bout de dix minutes, quelle distance séparera les deux sous-marins ?

D'après Bac, Liban, mai 2018

100 PRISE D'INITIATIVE

Dans la figure ci-dessous, les angles α et β sont-ils égaux ?



101 On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

On note A le point de coordonnées $(6\,;0)$, O l'origine du repère. Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0\,;10]$, on note M le point de la courbe d'abscisse x.

1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}$ en fonction de x.

2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle OMA est rectangle en M.

3. Écrire en Python une fonction angle dont l'argument est l'abscisse x de M et qui renvoie l'angle $\widehat{OMA}$ en degré.

4. On donne le script Python suivant d'une fonction M.

```
def M(pas):
    x=pas
    M=angle(x)
    while x<=10:
        A=angle(x)
        if A>M:
            M=A
        x=x+pas
    return M
```

a. Que renvoie cette fonction si l'on écrit dans la console l'instruction M(0.1) ?

b. Que calcule cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

102 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Soit d la droite d'équation cartésienne :

$$2x-y-3=0.$$

On note A le point de coordonnées $(a\,;a^2)$, où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas à la droite d.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et perpendiculaire à d.
Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$.

a. Justifier que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de la droite d.

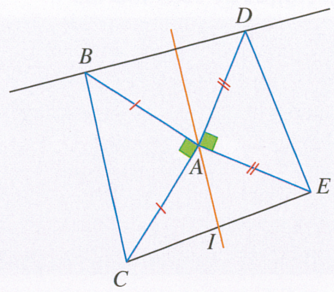
b. En déduire qu'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{v}$.

c. Exprimer la distance AM en fonction de t.
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite d.
La distance AH est appelée distance du point H à la droite d.
Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(a\,;a^2)$ à la droite d est minimale ? Justifier la réponse.

D'après Bac, Métropole, 2017

103 Milieu

Soient ABC et ADE deux triangles rectangles et isocèles en A.
On appelle I le milieu de $[CE]$.



Questions Va piano

1. a. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
b. Que peut-on conjecturer pour les droites (AI) et (BD) ?
2. a. Justifier que :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})$$

et $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$.
b. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD}$ et démontrer la conjecture émise à la question **1 b.**

Questions Moderato

1. a. Exprimer l'angle $\widehat{BAD}$ en fonction de l'angle $\widehat{CAE}$.
b. Soit B' le symétrique de B par rapport à A.
Vérifier que $\widehat{DAB'}=\widehat{CAE}$ et que :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

c. En déduire que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ puis que $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ (utiliser la relation de Chasles appropriée).
d. Que peut-on en conclure pour les droites (DC) et (BE) ?
2. Démontrer que $DC=BE$.

Questions Allegro

1. Justifier que :

$$DG^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

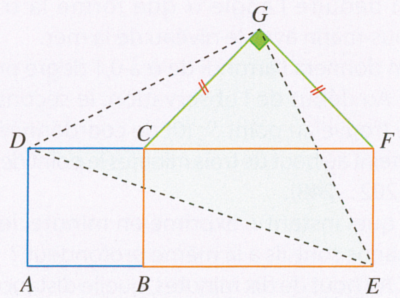
2. a. On admet que :
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
(cette formule a été démontrée dans l'exercice 67 p. 232).
Justifier que $\cos(\widehat{BAD})=-\cos(\widehat{CAE})$.
b. En déduire que :

$$CE^2=AB^2+AD^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

3. Démontrer que $BC=2AI$.

104 Figures

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré, $BEFC$ un rectangle et CFG un triangle rectangle isocèle en G.
On pose $AB=a$ et $BE=b$, où a et b sont des nombres réels positifs.



Questions Va piano

On suppose que $b=2a$.
1. Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, écrire les coordonnées des points A, B, C, D et E.
2. On appelle H le projeté orthogonal de G sur (CF).
Calculer les coordonnées de H.
3. Justifier que CHG est un triangle rectangle isocèle en H.
En déduire les coordonnées de G.
4. Calculer $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GD}$.
Que peut-on en conclure ?

Questions Moderato

1. a. Exprimer la longueur GC en fonction de b.
b. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{GF}$ en fonction de a et b.
2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :

$$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{GF}.$$

3. En déduire la nature du triangle GDC.

Questions Allegro

1. Comment choisir les nombres a et b pour que les droites (BF) et (GE) soient perpendiculaires ?
2. Avec les valeurs des nombres a et b précédentes, calculer l'aire totale de la figure coloriée en fonction de a.

No problem!

1 Magnitude

a and b are two vectors.
We denote $|a|$ the length (or magnitude) of vector a and θ the angle between a and b.
Fill in the gap of the definition below.

To … the dot product of … vectors, we … the … of vector a by the length of vector b then multiply by the … of the angle between … and … .
The dot product gives a … as an answer.

2 Coordinates

1. Vector a has magnitude 3, vector b has magnitude 4 and the angle between a and b is $\frac{\pi}{3}$.
What is the value of $a \cdot b$?

2. $a\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ and $b\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$ are two vectors in a rectangular coordinate.
Use the dot product to find the size of the angle between a and b.

3. Which of the following pairs of vectors are perpendicular?

$a\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $b\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $c\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ $d\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

3 Algorithm

We are given three points in a rectangular coordinate: $A(a\,;b)$, $H(c\,;d)$ and $T(e\,;f)$.
The algorithm below is written in "Python language":

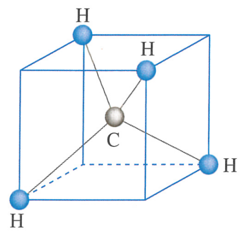
```
def surprise(a,b,c,d,e,f):
   if (a-c)*(a-e)+(b-d)*(b-f)==0:
        print('yes')
   else:
        print('no')
```

1. What will be the result of this algorithm if we enter the formula: surprise(0,2,4,–2,–1,1)?
2. Thanks to the previous result what can you say about HAT triangle?
3. Find three points that give "no" as an answer.
4. Explain the second line of the algorithm. What is the goal of this algorithm?

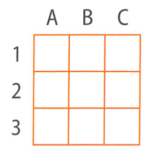
4 Methane molecule

A methane molecule composed with one carbon atom and four hydrogen ones, has a shape of a regular tetrahedron as shown below.

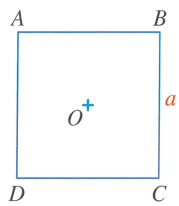
- Determine the angle between each chemical bond.



Pair Work Noughts and Crosses



Step 1: Choose a square.
Step 2: Solve the problem linked to that square.
Step 3: If your answer is correct, write your symbol (a nought or a cross) in the square.
The aim of the game is to get a winning line of three noughts or three crosses in either a horizontal, vertical or diagonal row.
To play this game, you need to use a square $ABCD$ with center O and with sides equal to a.
You will have to give some dot products in terms of a and to explain your result to your classmate.



A1. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}$ **A2.** $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$ **A3.** $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BD}$ **B1.** $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BC}$ **B2.** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}$
B3. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ **C1.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}$ **C2.** $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BO}$ **C3.** $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}$