CHAPITRE

7

Ressources du chapitre disponibles ici : www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

Calcul vectoriel et produit scalaire

Tout mesurer et être d'accord

Delambre et Méchain

Fin juin 1792, les astronomes Delambre et Méchain sont chargés de mesurer l'arc de méridien de Dunkerque jusqu'à Barcelone.

Ils n'effectueront les mesures que sur un arc suffisamment long de ce quart de méridien pour que, par proportionnalité, ils puissent alors calculer la longueur du tout. Ces mesures reposent sur des calculs d'angles et de longueurs dans un triangle.

Décret du 26 mars 1791 : sur les moyens d'établir l'uniformité des poids et des mesures

L'Assemblée nationale, considérant que pour parvenir à établir l'uniformité des poids et mesures, il est nécessaire de fixer une unité de mesure naturelle et invariable, et que le seul moyen d'étendre cette uniformité aux nations étrangères, et de les engager à convenir d'un même système de mesures est de choisir une unité qui, dans sa détermination ne renferme rien d'arbitraire ni de particulier à la situation d'aucun peuple sur le globe […] décrète qu'elle adopte la grandeur du quart du méridien terrestre pour base du nouveau système de mesures.

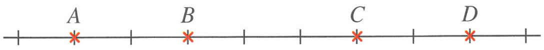
En 1789, il n'existe aucune mesure unifiée entre les pays ni même à l'intérieur du pays. L'étalonnage des poids et longueurs est alors fixé par le roi. Rechercher différentes mesures utilisées alors.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Égalités

On considère la droite graduée et les points ci-dessous.



Indiquer pour chaque égalité si elle est vraie ou fausse.

a. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

c. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$ **d.** $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

2 Coordonnées de vecteurs

Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.

Donner les coordonnées des vecteurs suivants.

a. $\vec{u}+\vec{v}$ **b.** $\vec{u}-\vec{v}$

c. $3\vec{u}+2\vec{v}$ **d.** $-2\vec{u}-\vec{v}$

3 Normes

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-3\,;2)$, $B(-2\,;2)$ et $C(4\,;1)$.

1. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

4 Colinéarité

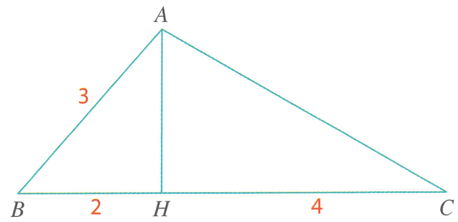
Dans une base orthonormée, on considère trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0{,}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-4\end{pmatrix}$.

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

b. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

5 Projeté orthogonal

On considère la figure suivante, où H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.



- Calculer AH et une mesure en degré puis en radian de l'angle $\widehat{HAC}$.

6 Points alignés

On considère trois points A, I et C tels que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Indiquer pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse.

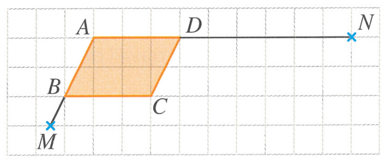
a. I, A et C sont alignés.

b. I est le milieu de $[AC]$.

c. $IA + IC = 0$ **d.** $IA = IC$

7 Opérations sur les vecteurs

On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un parallélogramme, et M et N sont les points tels que $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$.



Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **b.** $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{BC}$ **c.** $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BM}$

d. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **e.** $MB = \frac{1}{2}AB$ **f.** $DN = 2BC$

8 Sommes de vecteurs

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \dots$ **b.** $\overrightarrow{CD}+\dots=\vec{0}$

c. $\overrightarrow{A\dots}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$ **d.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MC}=\dots$

Pour construire le cours

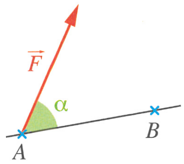
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation A — Travail d'une force

Objectif
Définir le produit scalaire.

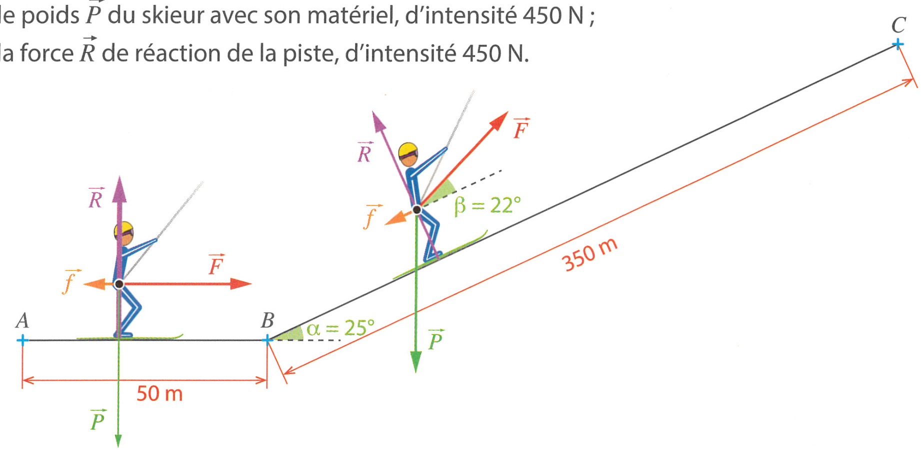
En physique, une force appliquée en un point d'un solide est représentée par un vecteur $\vec{F}$.
L'intensité de la force, notée F, est la norme du vecteur $\vec{F}$. Elle s'exprime en newton (N).
Une force est dite constante lorsque son intensité, son sens et sa direction ne varient pas au cours du temps.

L'énergie fournie par la force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement AB est appelée travail de la force, noté $W_{AB}(\vec{F})$, et exprimée en joule (J). Elle se calcule par la formule $W_{AB}(\vec{F}) = F \times AB \times \cos(\alpha)$, où α est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$.



On s'intéresse au déplacement d'un skieur sur un remonte-pente.
Il prend la perche au point A, sans vitesse initiale, se fait tracter sur 50 m de plat (jusqu'au point B) avant de monter une pente de 350 m de long (jusqu'au point C). Les forces représentées sur le graphique ci-dessous sont :

- la force $\vec{F}$ de traction exercée sur le skieur (d'intensité 280 N sur le trajet AB et 370 N sur le trajet BC) ;
- la force $\vec{f}$ représentant l'ensemble des frottements, d'intensité constante, égale à 91 N ;
- le poids $\vec{P}$ du skieur avec son matériel, d'intensité 450 N ;
- la force $\vec{R}$ de réaction de la piste, d'intensité 450 N.

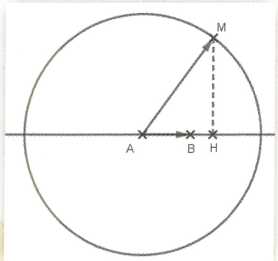


1. On s'intéresse d'abord au trajet AB.
   a. Calculer le travail de chacune des forces représentées sur le schéma.
   b. Que peut-on dire sur les valeurs du travail d'une force ?
2. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ exercée par la perche sur le skieur lors de la montée BC.

Situation B — Produit scalaire LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Obtenir le produit scalaire à partir de la projection orthogonale.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a réalisé une figure semblable à la figure ci-contre de telle sorte que le rayon du cercle soit supérieur à AB, que le point M soit mobile sur le cercle, et que H soit le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

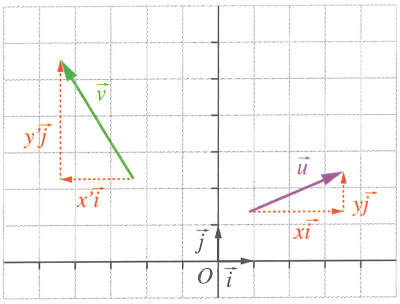


1. Réaliser cette figure sur le logiciel.
2. Faire afficher le produit scalaire p des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$: pour cela, taper dans le champ de saisie `p=u*v`, u et v étant les noms donnés aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ par le logiciel lors de leur création.
   Déplacer le point M sur le cercle. Que peut-on conjecturer sur le signe de p ?
3. Faire afficher le produit des longueurs des segments $[AB]$ et $[AH]$ et déplacer le point.
   Que constate-t-on ? Quelle conjecture peut-on faire ?

Situation C — Produit scalaire et coordonnées

Objectif
Établir la formule du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.



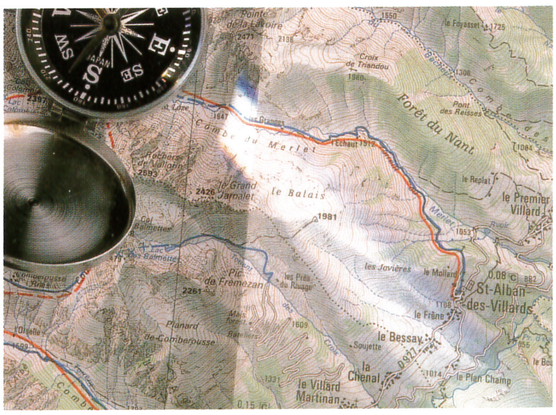
1. **a.** Que peut-on dire de $\|\vec{i}\|$? de $\|\vec{j}\|$?
   b. Que peut-on dire de $\vec{i} \cdot \vec{j}$?
2. **a.** Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   b. Exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   c. En déduire une expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction des coordonnées de ces deux vecteurs.
3. On donne les points $A\ (2\ ;5)$, $B\ (6\ ;3)$, $C\ (3\ ;-3)$ et $D\ (5\ ;1)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$.
   Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Situation D — Lignes de niveau

Objectif
Introduire la notion de ligne de niveau.

On peut trouver des « lignes de niveau » sur les cartes topographiques, par exemple : les géographes les utilisent pour représenter les points d'une zone qui ont la même altitude.

Dans l'activité qui suit, les longueurs sont exprimées en centimètre.
A et B sont deux points distincts tels que $AB = 4$.



1. **a.** Tous les points M tels que $AM = 5$ sont sur une même ligne. Laquelle ?
   b. Soit k un nombre réel. Décrire les lignes de niveau représentant les points M tels que $AM = k$ selon les valeurs de k.
2. Représenter tous les points du plan tels que $AM^2 - BM^2 = 0$.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux sont sur une même ligne. Laquelle ?

Connaître le cours

1. Produit scalaire

1. Définition du produit scalaire

Définition

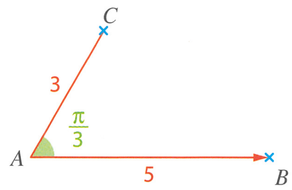
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$**, est le nombre réel défini par :

- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$;
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemples

Soient A, B et C trois points distincts tels que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15}{2}$.



2. Vecteurs colinéaires et carré scalaire

DÉMO en ligne

Propriété

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ($\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$).

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

3. Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

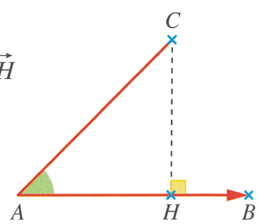
DÉMO en ligne

Propriété

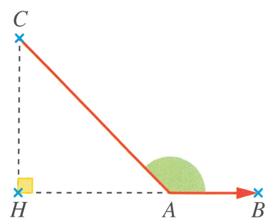
Soient trois points A, B et C (A et B distincts).
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Remarque

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
Si $\widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$, alors
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.



Si $\widehat{BAC} > \frac{\pi}{2}$,
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.



Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

DÉMO en ligne

Propriété

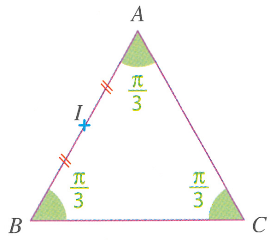
Soient trois points A, B et C distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice résolu 1 Calculer des produits scalaires

ABC est un triangle équilatéral de côté 2.
I est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$
2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

Solution commentée



1. $BC = BA = 2$, et comme ABC est équilatéral, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$,
donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$
$= 2\times 2\times \cos\frac{\pi}{3} = 2\times 2\times\frac{1}{2}$
$= 2$

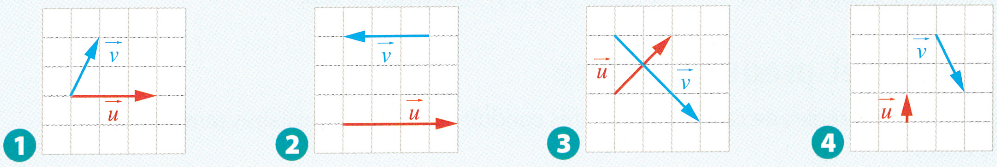
2. $AC = 2$, $AI = \frac{1}{2}AB = 1$, et $\widehat{IAC} = \frac{\pi}{3}$,
donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AC} = AI\times AC\times\cos\left(\widehat{IAC}\right)$
$= 1\times 2\times\cos\frac{\pi}{3} = 1\times 2\times\frac{1}{2}$
$= 1$

3. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
$= -CB\times CA\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$
$= -2\times 2\times\cos\frac{\pi}{3} = -2\times 2\times\frac{1}{2}$
$= -2$

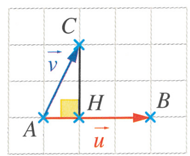
EXERCICE 4 p. 226

Exercice résolu 2 Choisir une expression adaptée pour calculer un produit scalaire

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$, l'unité de longueur étant le côté d'un carreau.



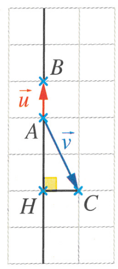
Solution commentée



1. Soient les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 3$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = -12$.

3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.



4. Soient les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB\times AH = -2$.

EXERCICE 6 p. 226

Connaître le cours

2. Propriétés du produit scalaire

1. Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

DÉMO en ligne

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Remarques

- Comme le produit scalaire est symétrique, on a aussi $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite. On dit qu'il est **bilinéaire**.

Exemples

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{v}\cdot(-\vec{v})=-\vec{v}^2=-\|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}\cdot(2\vec{u}+5\vec{v})=2\vec{u}^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}=2\|\vec{u}\|^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}$

2. Produit scalaire dans une base orthonormée

DÉMO en ligne

Propriétés

Dans une base orthonormée, soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
- $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$

Exemples

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times1+(-1)\times3=-1$
- $\|\vec{u}\|^2=2^2+(-1)^2=5$, d'où $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$

3. Norme et produit scalaire

L'application des règles de calcul précédentes conduit aux produits scalaires remarquables ci-dessous.

Propriétés

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

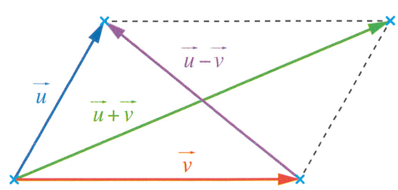
On en déduit ainsi d'autres expressions du produit scalaire à l'aide des normes.

DÉMO p. 233

Propriétés

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

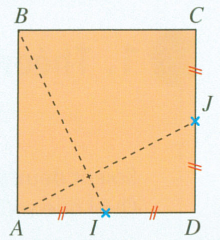
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$



Exercice résolu 1 Calculer un produit scalaire en décomposant des vecteurs

$ABCD$ est un carré de côté a, I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[CD]$.

1. En remarquant que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ et que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$, calculer $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI}$.
2. Que peut-on en conclure ?



Solution commentée

1. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI})$

$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI}$

$= 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BA} + 0$, car $(AD) \perp (BA)$ et $(DJ) \perp (AI)$.

$= AD \times AI - DJ \times BA$, car $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de sens contraire.

$= a \times \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \times a = 0$

2. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux et que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

EXERCICE 12 p. 227

Exercice résolu 2 Calculer un produit scalaire avec des coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ainsi que les points $A\,(2\,;3)$, $B\,(-5\,;4)$, $C\,(-1\,;-3)$ et $D\,(-1\,;1)$.

- Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Solution commentée

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + (-1) \times 5 = -6 - 5 = -11$

On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1-(-1) \\ 1-(-3) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -7 \times 0 + 1 \times 4 = 4$.

EXERCICE 21 p. 227

Exercice résolu 3 Calculer un produit scalaire dans un triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

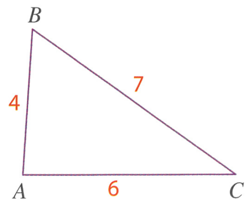
Solution commentée

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 7^2) = \frac{3}{2}$



EXERCICE 19 p. 227

3. Applications du produit scalaire

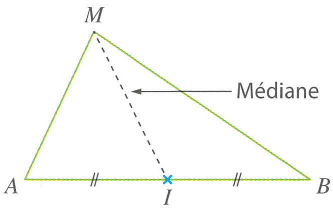
1. Théorème de la médiane

Théorème

DÉMO p. 216

Soient deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$.
Quel que soit le point M du plan, on a :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$



Exemples

On considère un triangle MAB tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1{,}5$ et $AB = 4$.
La longueur de la médiane MI est alors obtenue à l'aide du théorème de la médiane :

$$MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = -1{,}5 + \frac{4^2}{4} = \frac{5}{2}$$

Et ainsi, $MI = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

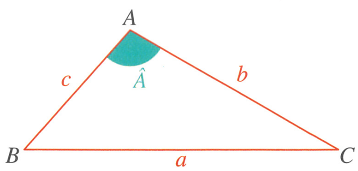
2. Formule d'Al-Kashi

Propriété

DÉMO p. 216

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}).$$



Remarque

On a de même $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

Exemple

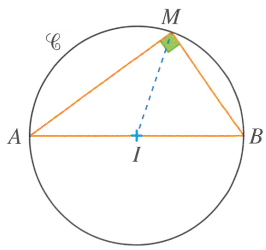
On donne un triangle avec $a = 9$, $b = 7$ et $c = 4$.
La relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$ donne $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{-2}{7}$.
La calculatrice permet alors d'obtenir, grâce à la touche $\cos^{-1}$ ou Arccos, une valeur approchée de l'angle, soit $\widehat{A} \approx 107°$.

3. Caractérisation du cercle

Propriété

Soient A, B et M trois points du plan.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

DÉMO p. 217



Remarque

Cela revient à dire que l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice résolu 1 Déterminer une ligne de niveau

A et B sont deux points distincts tels que $AB = 6$ cm.

Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 40$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution commentée

Soit I le milieu de $[AB]$. D'après le théorème de la médiane, on a :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 40 \Leftrightarrow MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 40 \Leftrightarrow MI^2 = 40 + \dfrac{6^2}{4} = 49 \Leftrightarrow MI = 7.$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 40$ est donc le cercle de centre I et de rayon 7.

EXERCICE 42 p. 229

Exercice résolu 2 Calculer des longueurs et des angles dans un triangle

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 12$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

1. Calculer BC et en déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{BCA}$.
2. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Solution commentée

1. D'après la formule d'Al-Kashi, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$= 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos(60°) = 108.$
On a donc $BC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.
On utilise de nouveau la formule d'Al-Kashi :
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{BCA})$
donc $6^2 = 12^2 + 108 - 2 \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \cos(\widehat{BCA})$
donc $\cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{-216}{-144\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
donc $\widehat{BCA} = 30°$.

2. La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à 180°, on en déduit :
$\widehat{ABC} = 180° - 60° - 30° = 90°$.
On peut en conclure que le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 33 p. 228

Exercice résolu 3 Utiliser la caractérisation d'un cercle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 5$. Montrer que le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

Solution commentée

$AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ et $BC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Donc le triangle ABC est rectangle en A.
On a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

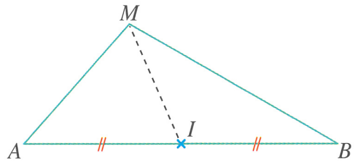
EXERCICE 71 p. 232

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété de la médiane. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soient deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$.
Quel que soit le point M du plan, on a :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$



Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}, \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\
&= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

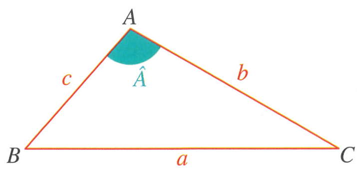
1. Expliquer la première ligne.
2. Quelle propriété du produit scalaire a-t-on utilisée pour obtenir $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$?
3. Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$?
4. Justifier la dernière égalité.

Rédiger une démonstration

1. On souhaite démontrer le théorème d'Al-Kashi.

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}).$$

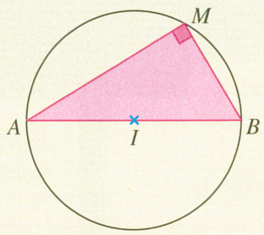


En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Justifier l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- En déduire le développement de $\overrightarrow{BC}^2$.
- Écrire le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ à l'aide de la formule du cosinus.
- En déduire l'égalité demandée.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soient A, B et M trois points du plan.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.



En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- On appelle I le milieu de $[AB]$.

Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

1 Soient A et B deux points tels que $AB = 6$. I est le milieu de $[AB]$ et M est un point distinct de I.
On considère les deux affirmations suivantes :
Affirmation 1 : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$
Affirmation 2 : le triangle AIM est rectangle en I.

- Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$.

1. a. Vérifier que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
b. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.
c. En déduire que AIM est rectangle en I.
2. On suppose que le triangle AIM est rectangle en I.
a. Quel est le projeté orthogonal du point M sur (AB)?
b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$.
3. En déduire que les affirmations 1 et 2 sont équivalentes.

L'équivalence
Pour démontrer que deux affirmations A et B sont équivalentes, on peut démontrer que A implique B, puis démontrer que B implique A

2 Soient A et B deux points distincts et M un point quelconque du plan.

- Justifier que les affirmations suivantes sont fausses.

Affirmation 1 : Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, alors le triangle ABM est rectangle en A.
Affirmation 2 : Si $MA = MB$, alors M est le milieu du segment $[AB]$.
Affirmation 3 : Si M appartient à la droite (AB), alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \times AB$.

Utiliser un contre-exemple
Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, on peut utiliser un contre-exemple.

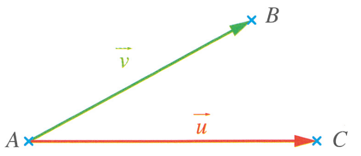
Apprendre par le texte & la vidéo

7 VIDÉOS DE COURS

Définition du produit scalaire

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

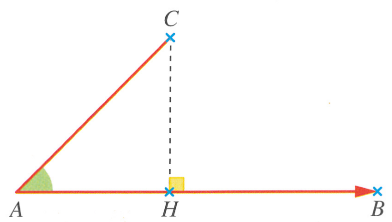


Bilinéarité et symétrie

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un nombre réel.

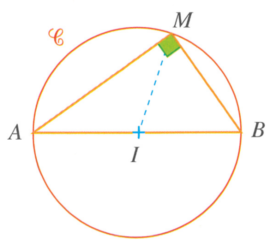
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Orthogonalité



- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Caractérisation du cercle



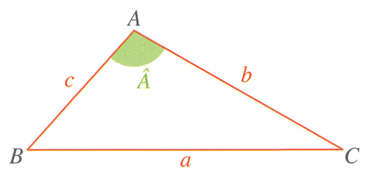
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Théorème de la médiane

I est le milieu du segment $[AB]$.
Quel que soit le point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Formule d'Al-Kashi



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

Produit scalaire dans une base orthonormée

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

Produit scalaire et normes

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

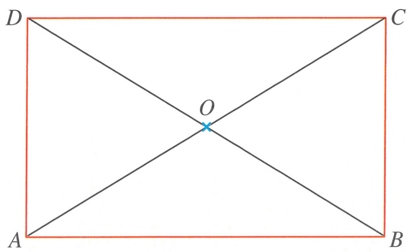
Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 8 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2 Dans chacun des cas suivants, donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.
a. $AB = 3$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$.
b. $AB = 5$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

3 $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 5$ et $BC = 3$.



• En utilisant les projetés orthogonaux, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB}$.

4 Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et les points $A(-1\,;3)$, $B(-5\,;9)$, $C(1\,;1)$ et $D(10\,;7)$.
a. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ puis $\|\vec{u}\|^2$.
b. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

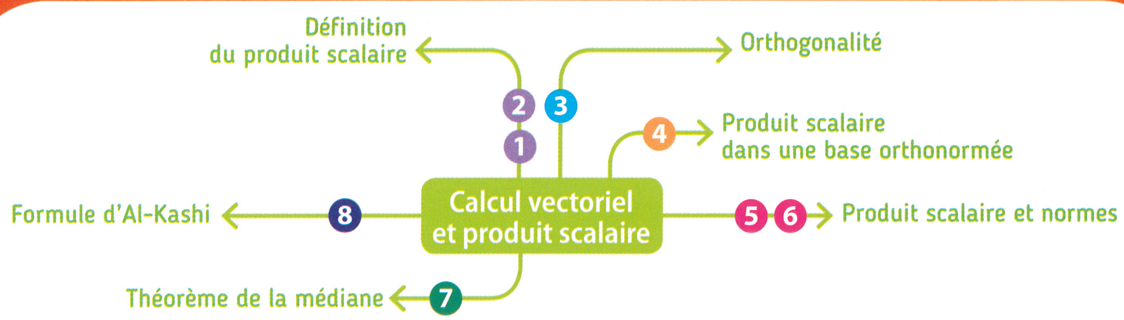
5 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 9$.
Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.
a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire.
b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.
c. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$
d. $\vec{w}$ est un vecteur tel que $\vec{w} \cdot \vec{v} = 5$ et les vecteurs $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

6 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AD = 4$ et $AC = 8$.
a. Calculer $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$.
En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
b. Calculer $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2$.
En déduire BD.

7 Soient A et B deux points tels que $AB = 12$ et I le milieu de $[AB]$. M est un point du plan.
a. Justifier que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 36$.
b. En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 64$.

8 a. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 45°$.
Calculer AC.
b. DEF est un triangle tel que $DE = 10$, $EF = 5$ et $DF = 8$.
Calculer l'angle $\widehat{DEF}$.

CORRIGÉS DES EXERCICES

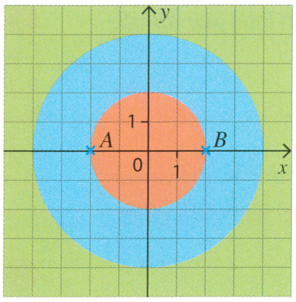


TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Une cible

Objectif
Simuler une expérience aléatoire.

Dans un repère orthonormé de centre O, on considère la cible de forme carrée et de centre O représentée ci-dessous et les points $A\,(-2\,;0)$ et $B\,(2\,;0)$.



Cette cible comporte trois zones : une rouge, une bleue et une verte.
On tire sur la cible et on note M le point d'impact.

1. Soit M un point de coordonnées $(x\,;y)$. Écrire une fonction `produit` d'arguments `x` et `y` qui renvoie la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

2. On considère la fonction ci-dessous.

```python
import matplotlib.pyplot as pl
def impact1(x,y):
    pl.axis([-5,5,-5,5])
    pl.grid()
    if produit(x,y)<=0:
        pl.plot(x,y,'red',marker=".")
    elif produit(x,y)<=12:
        pl.plot(x,y,'blue',marker=".")
    else:
        pl.plot(x,y,'green',marker=".")
    pl.show()
```

a. Quels résultats obtient-on si l'on écrit dans la console les instructions `impact1(0,0)`, `impact1(3,2)` et `impact1(-4,4)` ?

b. Expliquer les différentes étapes de cet algorithme.

3. Soit n un entier naturel non nul. On tire n fois sur la cible de façon aléatoire et on suppose que tous les tirs touchent la cible carrée.

a. Quelle instruction permettrait d'obtenir les coordonnées d'un point choisi aléatoirement sur la cible ?

b. Écrire le script d'une fonction qui représente n points d'impact en couleur (rouge pour ceux qui ont touché la zone rouge, bleu pour la zone bleue et vert pour les autres).

c. Exécuter cette fonction pour $n = 10\,000$.
Commenter.

4. Modifier cette fonction pour qu'elle affiche les nombres de points d'impact rouges, bleus et verts.

TP 2 Déterminer un ensemble de points

Objectif
Tracer une ligne de niveau.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A\,(-1\,;1)$, $B\,(0\,;2)$ et $M\,(x\,;y)$, où x et y sont deux nombres réels.
On cherche à déterminer l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $MA^2+MB^2=18$.
Un tel ensemble de points s'appelle une ligne de niveau.

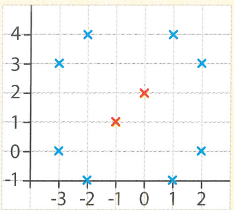
1 On cherche à conjecturer cette ligne de niveau grâce à un algorithme.

a. Écrire le script d'une fonction somme dont les arguments x et y sont les coordonnées d'un point M et qui renvoie MA^2+MB^2.

b. Pierre a écrit le script de la fonction crible suivant.

```python
from math import isclose
import matplotlib.pyplot as pl
def crible():
    pl.axis("equal")
    pl.grid()
    pl.plot(-1,1,'red',marker=".")
    pl.plot(0,2,'red',marker=".")
    x,y=-5,-5
    while x<=5:
        while y<=5:
            if  isclose(somme(x,y),18,rel_tol=0.01)==True:
                pl.plot(x,y,'blue',marker=".")
            y=y+1
        y=-5
        x=x+1
    pl.show()
```

Expliquer le fonctionnement de cette fonction et l'affichage ci-dessous que Pierre a obtenu en tapant dans la console crible( ).



c. Modifier la fonction précédente en une fonction crible1 qui affiche davantage de points de la ligne de niveau.

d. À l'aide de la fonction crible1, conjecturer la nature et les éléments caractéristiques de cette ligne de niveau.

2 On note I le milieu du segment $[AB]$.

a. En remarquant que $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$, montrer que $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

b. En déduire la démonstration de la conjecture effectuée à la question 1d.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Dans la bibliothèque math :
  isclose(x,y,rel_tol=z) renvoie True si x est une valeur approchée de y avec une précision égale à z.
- Dans la bibliothèque matplotlib.pyplot :
  • axis([xmin,xmax,ymin,ymax]) affiche une fenêtre avec un repère gradué de xmin à xmax en abscisse et de ymin à ymax en ordonnée.
  • axis('equal') affiche un repère orthonormé.
  • grid( ) affiche un quadrillage.
  • pl.plot(x,y,'color',marker=".") affiche le point de coordonnées $(x\,;y)$ en couleur ('red' pour rouge, 'blue' pour bleu…) et avec une marque (marker) en forme de point (".").

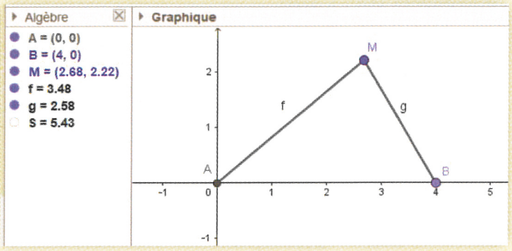
TP Outils numériques

TP 3 Lignes de niveau LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Conjecturer des lignes de niveau.

On considère le segment $[AB]$ tel que $AB = 4$. Pour tout réel k, on cherche à déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

1 **a.** Réaliser la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et, en déplaçant un point libre M, déterminer plusieurs points appartenant à la ligne de niveau 8, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 8$.
Que peut-on dire de ces points ?



b. Tracer la ligne de niveau 8 que l'on peut conjecturer.

c. Contrôler cette conjecture en liant le point M à cette ligne.

2 Soit I le milieu de $[AB]$.

a. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$.

b. En déduire que $MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$.

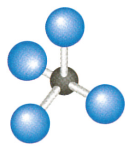
c. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB). Montrer que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow H$ est le milieu de $[IB]$.

d. En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 8$.

TP 4 Le méthane CH_4 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Déterminer une approximation d'un angle.

Les noyaux des quatre atomes d'hydrogène de la molécule de méthane CH_4 sont les sommets d'un tétraèdre régulier, et le noyau de l'atome de carbone joue le rôle du centre du tétraèdre.



1 À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter un tétraèdre $ABCD$ (choisir *Affichage 3D* pour obtenir une représentation dans l'espace).

2 On admet que le centre G du tétraèdre est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.
Placer le point G sur la figure.

3 Afficher une mesure approchée de l'angle formé par les liaisons chimiques C–H.

4 On admet que le centre G d'un tétraèdre $ABCD$ vérifie la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

a. Dans le triangle AGB, on note θ l'angle $\widehat{AGB}$, calculer $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$ en fonction de GA et θ.

b. En écrivant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$, montrer que $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{3}$ et retrouver la valeur approchée de θ affichée par le logiciel.

TP 5 Droite d'Euler LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Approfondissement

Objectif
Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A\,(3\,;2)$, $B\,(-1\,;-2)$ et $C\,(-2\,;2)$ ainsi que les points A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[BA]$.

1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie puis placer les points :
   - G, intersection des médianes (AA') et (BB') (ce point est appelé centre de gravité du triangle) ;
   - H, intersection de deux hauteurs du triangle ABC (ce point est appelé orthocentre du triangle) ;
   - I, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

   Quelle conjecture peut-on faire sur la position des points H, G et I ?
2. On veut démontrer cette conjecture.

   a. Déterminer les coordonnées du point G.

   b. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'une part, et $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ d'autre part ?

   En déduire les coordonnées du point H.

   c. Que peut-on dire des droites (IA') et (BC) d'une part, et (IB') et (AC) d'autre part ?

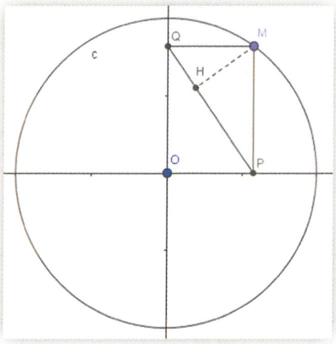
   En déduire les coordonnées du point I.

   d. Démontrer la conjecture établie à la question **1**.

TP 6 Ensemble de points

Objectif
Conjecturer un ensemble de points à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on trace le cercle de centre O et de rayon 1. On place un point M mobile sur ce cercle.
Soient P et Q les projetés orthogonaux du point M sur les axes du repère. On note H le projeté orthogonal du point M sur le segment $[PQ]$.



1. **a.** Construire la figure ci-dessus à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   b. Activer la trace du point H et déplacer le point M sur le cercle. À l'aide de la fenêtre *Algèbre*, conjecturer une relation entre les coordonnées de M et celles de H (on peut calculer le cube des coordonnées du point M).
2. **a.** Justifier que $QP = 1$.

   b. On note $(a\,;b)$ les coordonnées du point M. Montrer que $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM} = b^2$.

   c. En déduire que $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH} = b^2$ puis que $\overrightarrow{PH} = b^2 \times \overrightarrow{PQ}$.

   d. Démontrer la conjecture faite à la question **1**.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie dynamique

- Pour obtenir une figure en trois dimensions

  Affichage Graphique 3D
- Pour faire pivoter une figure 3D

  Tourner la vue Graphique 3D
- Pour créer le milieu d'un segment

  Milieu ou centre
- Pour afficher la mesure d'un angle

  Angle
- Pour faire afficher dans la fenêtre *Algèbre*, la somme S des longueurs f et g de deux segments, taper dans la ligne de saisie : S = f + g