Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Simplifier de tête les écritures suivantes.

1. $\exp(3) \times \exp(-2)$

2. $(\exp(-2))^3$

3. $\dfrac{\exp(-5)}{\exp(3)}$

2 Déterminer mentalement les fonctions dérivées sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3\exp(x) - \dfrac{1}{2}x^2$

2. $g(x) = \dfrac{\exp(x)}{4}$

3. $h(x) = x\exp(x)$

3 Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 0$

2. $e^x = 1$

3. $e(-x) = 1$

4. $e(-x) = 0$

4 Donner la valeur exacte des nombres suivants.

1. $e^0 \times e^2$

2. $e^5 \times \dfrac{e^{-4}}{e^2}$

3. $e \times e^{-1}$

4. $e \times (2e - e^{-1})$

5. $\sqrt{e^8}$

6. $\dfrac{e}{\sqrt{e}}$

5 Comparer, sans calculatrice, les réels donnés dans chaque cas.

1. e^2 et $e^{5,5}$.

2. $e^{0,5}$ et $e^{0,1}$.

3. e^{-3} et e^{-5}.

4. $e^{-0,2}$ et $e^{-0,9}$.

6 Déterminer mentalement le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{-3x}$

2. $g(x) = -2e^{5x}$

3. $h(x) = -e^{2x} - 1$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

7 QCM

Pour chaque question, donner la seule réponse correcte.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.
L'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 est :

(a) $y = x + 1$ (b) $y = -x + 1$ (c) $y = x$

2. L'expression $-2e^x$ est :

(a) strictement négative sur $\mathbb{R}$;

(b) strictement négative sur $]-\infty\,;0[$;

(c) strictement positive sur $]-\infty\,;0[$.

3. L'expression $\dfrac{e^{2x}}{3e^x}$ s'écrit aussi :

(a) $3e^x$ (b) $-3e^{-x}$ (c) $\dfrac{e^x}{3}$

8 Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

1. $u_n = e^n$ **2.** $u_n = -2e^n$

3. $u_n = e^{-3n}$ **4.** $u_n = 5e^{4n}$

9 Sur le graphique ci-dessous, identifier les courbes de chacune des fonctions suivantes.

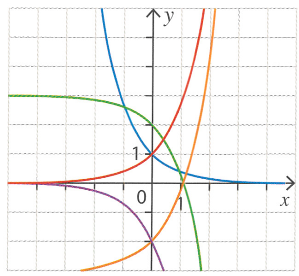
1. $f : x \mapsto e^x$

2. $g : x \mapsto e^x - 3$

3. $h : x \mapsto e^{-x}$

4. $p : x \mapsto -2e^x$

5. $q : x \mapsto 3 - e^x$



10 Déterminer le signe des expressions suivantes pour tout x réel.

1. $A(x) = -x^2 \times e^x$

2. $B(x) = -3 - e^{-4x}$

3. $C(x) = 3 \times \dfrac{e^x}{(x-1)}$

11 Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour tout réel x par $f(t) = -4e^{-3t}$.

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'inverse du nombre e^{-x+1} est égal à $\dfrac{1}{e^{x-1}}$.
2. L'opposé du nombre e^{-3} est e^{3}.
3. La suite de terme général e^{-4n} est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e^4}$.
4. La fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est paire.

Travail en groupe

45 min

**Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.**

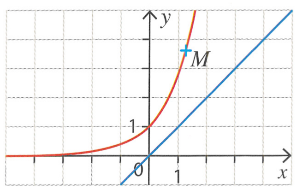
Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

1. Chercher la définition de la distance d'un point M à une droite (d).
2. Soit M un point quelconque de la courbe représentative de la fonction exponentielle.
Déterminer l'abscisse du point M telle que la distance entre M et la droite d'équation $y = x$ soit minimale.



Exposé

voir p. 174

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Quelques curiosités avec les nombres e, π et φ.
On connaît des valeurs approchées de ces trois nombres :
$e \approx 2{,}718\,281\,8$; $\pi \approx 3{,}141\,593\,6$; $\varphi \approx 1{,}618\,033\,98$ (φ est le nombre d'or).

1. Chercher la définition du nombre d'or φ.
2. Calculer $(e^e)^e - 1000\,\varphi$.
3. Calculer $\dfrac{(\pi+1)}{(\pi-\varphi)}$.
4. Calculer $\left(\pi^4 + \pi^5\right)^{\frac{1}{6}}$.
5. Trouver d'autres formules historiques qui relient ces trois nombres.

Exercices

Définition de la fonction exponentielle

1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur le domaine indiqué.
1. $f(x) = 3\exp(x) - 2x + 1$ sur $D_f = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = (2x^2 + 1)\exp(x)$ sur $D_g = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \dfrac{2+\exp(x)}{6+2x}$ sur $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.
1. $f(x) = x\mathrm{e}^x + 3x - 1$
2. $g(x) = (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}$

3 On considère la fonction f définie pour tout réel x de son ensemble de définition par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x - 1}$.
Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
1. f est définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
2. f est dérivable sur chacun des intervalles constituant son ensemble de définition :
$$f'(x) = \frac{-2}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$
3. f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés algébriques

4 On donne l'ordre de grandeur suivant :
$$\exp(1) \approx 2{,}7.$$
Donner l'ordre de grandeur de $\exp(2)$ et de $3\exp(1) + 2$.

5 On donne les ordres de grandeur suivants :
$$\exp(5) \approx 140$$
$$\text{et } \exp(-3) \approx 0{,}05.$$
En déduire les ordres de grandeur des réels $\exp(2)$, $\exp(8)$, $\exp(-2)$ et $\exp(10)$.

6 On donne les ordres de grandeur suivants :
$$\exp(4) \approx 50$$
$$\text{et } \exp(6) \approx 400.$$
En déduire les ordres de grandeur de $\exp(2)$, $\exp(10)$, $\exp(-2)$, $\exp(8)$ et $\exp(12)$.

7 **Calculer**
Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour simplifier les expressions suivantes.
$A = \exp(2x - 3) \times \exp(4 - x)$
$B = (\exp(x - 1))^2 \times \exp(x + 2)$
$C = \dfrac{3\exp(x)}{\exp(1-2x)}$

8 Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants, où x désigne un nombre réel.
$A = \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-4x}$ $\qquad B = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{2x})}$
$C = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6}$ $\qquad D = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6}$
$E = \dfrac{\mathrm{e}^{3-2x} \times (\mathrm{e}^x)^5}{\mathrm{e}^{x-2}}$

9 Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants, où x désigne un nombre réel.
$A = (\mathrm{e}^x)^5 \times \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad B = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-5}}{\mathrm{e}^{2x-7}}$
$C = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x)^6 \times \mathrm{e}}$ $\qquad D = \dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{2\mathrm{e}^{-x-2}}$

10 Démontrer que, pour tout réel x, on a :
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

11 Démontrer que, pour tout réel x, on a :
$$\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

12 Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
1. $u_n = \exp(-n)$
2. $u_n = \exp(-n + 2) \times \exp(3n - 2)$
3. $u_n = \dfrac{\exp(1)}{\exp(3n+1)}$

13 Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
1. $u_n = \exp(-2n)$
2. $u_n = \exp(3n) \times \exp(5n)$
3. $u_n = \dfrac{\exp(-n+2) \times \exp(5n-4)}{\exp(n-2)}$
4. $u_n = \dfrac{\exp(2) \times \exp(-n+5)}{\exp(7) \times \exp(6n)}$

14 On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :
$$u_n = \mathrm{e}^{2-\frac{n}{3}}.$$
1. Calculer ses premiers termes de u_0 à u_3 puis conjecturer son sens de variation.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. La conjecture précédente est-elle validée ? Justifier.

Signe et variation

15 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5e^{-4x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x + 1)e^{3x}$.

16 Déterminer la fonction dérivée et étudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = x + e^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $I =]0 ; +\infty[$.

3. $h(x) = xe^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

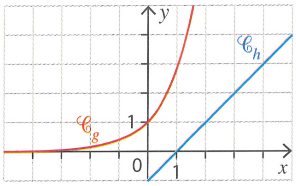
17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 - e^x.$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f admet un maximum dont on précisera la valeur.

3. On a représenté ci-dessous les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$ et $h(x) = x - 1$.



Conjecturer la position relative des courbes représentant les fonctions g et h.
Justifier cette conjecture à l'aide du résultat obtenu à la question **2**.

18 ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

1. On note f' la dérivée de f.
Calculer $f'(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. a. En utilisant un graphique, expliquer pourquoi on peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0 ; 1]$ et donner une approximation de α au centième près.

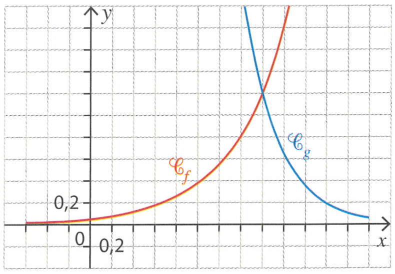
b. On considère l'algorithme suivant donné en langage naturel.

```
a ← 0
F ← a – exp(–2a)
Tant que F < 0
    a ← a + 0,01
    F ← a – exp(–2a)
Afficher a
```

Quelle est la valeur affichée par cet algorithme à la fin de son exécution ? Expliquer.

19 **Raisonner, communiquer**

On a représenté ci-dessous les fonctions f et g d'expressions respectives $f(x) = e^{2x-3}$ et $g(x) = e^{-3x+5}$.



1. Résoudre graphiquement l'équation :

$$e^{2x-3} = e^{-3x+5}.$$

2. Pour résoudre algébriquement cette équation, Myriam a écrit les étapes suivantes.

$e^{2x-3} = e^{-3x+5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x-3}}{e^{-3x+5}} = 1$ car

$\Leftrightarrow e^{2x-3-(-3x+5)} = 1$

$\Leftrightarrow e^{2x-3-(-3x+5)} = 1$

$\Leftrightarrow e^{5x-8} = 1$

$\Leftrightarrow 5x - 8 = 0$ car

$\Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{5}$

$S = \left\{\dfrac{8}{5}\right\}$

Compléter la justification amorcée aux lignes 2 et 6 et comparer la solution obtenue par Myriam et celle obtenue à la question **1**.

3. Le professeur dit à Myriam : « Tu aurais pu résoudre plus facilement les équations en utilisant une équivalence du cours. »
En suivant l'indication du professeur, résoudre l'équation de Myriam d'une autre manière qu'elle.

4. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a. $e^{4x+1} = e^{1-2x}$

b. $e^{-5x} = e^{x+3}$

5. Résoudre algébriquement ces équations.

20 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes.

1. $e^{2x} = 1$ **2.** $e^{3x} = 0$

3. $e^{3x-1} = 1$ **4.** $e^{x-1} - 1 = 0$

21 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes.

1. $e^{2x+1} = e^{3x+2}$ **2.** $e^{-x} = e^{2x+4}$

3. $e^{-4x+1} = e^{x+1}$ **4.** $e^{-x-1} - e^{2x+4} = 0$

22 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^x \geqslant 1$ **2.** $e^{x-2} < 1$
3. $e^{2x+1} \geqslant 0$ **4.** $e^{x-1} - 1 \leqslant 0$

23 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^x \geqslant e^{2x+1}$ **2.** $e^{-3x-2} < e^{-x}$
3. $e^{-2x-3} < e^{2x+4}$ **4.** $e^{-3x-1} - e^{x+5} \leqslant 0$

24 Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x \times \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}.$$

25 **Calculer**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-3x-1)e^x$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left(-\frac{1}{2}x+1\right)e^x$.

26 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-5)e^{-x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x+2)e^{2x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x - \frac{1}{2})e^{-2x}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left(-\frac{5}{2}x+4\right)e^{\frac{1}{2}x}$.

27 **Calculer**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

2. g définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{(x-1)}e^x$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2+x+3)e^{x+1}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (x^2-1)e^x$.

28 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie, pour tout réel x non nul, par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

2. g définie, pour tout réel $x \neq -1$, par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{e^x+1}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \frac{3x+1}{e^x}$.

Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

29 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t} + 1$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{2t+3}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-t+4}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(t) = e^{\frac{1}{2}t}$.

30 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+4)e^{-x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x-2)e^{-2x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x - \frac{3}{2})e^{-3x}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (-5x+4)e^{\frac{1}{3}x+2}$.

31 ALGO

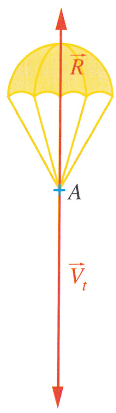
Raisonner

On injecte 4 mg d'un médicament dans le sang d'un patient, à l'instant $t = 0$. On note $Q(t)$ la quantité en mg de médicament présente dans le sang du patient à l'instant t exprimé en heure.
La vitesse d'élimination du médicament étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang, on admet que la fonction Q vérifie la relation :

$$(E) : Q'(t) = -0{,}248\,Q(t).$$

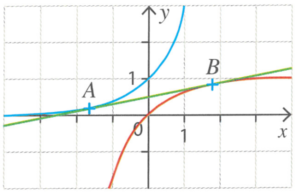
1. Montrer que la fonction $Q(t) = 4e^{-0{,}248t}$ vérifie la relation (E) ainsi que la condition initiale $Q(0) = 4$.
2. Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de deux heures.
3. Montrer que la quantité de médicament décroît au cours du temps.
4. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction Q.
5. On considère que le médicament est éliminé quand sa quantité dans le sang est inférieure à 0,01 mg.
À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps (arrondi au dixième d'heure) ce médicament est éliminé.
6. Écrire une fonction en Python qui permet de retrouver le résultat de la question **5**.

32 Lorsqu'un parachutiste effectue un saut, sa vitesse de chute $V(t)$, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, est une fonction du temps t, exprimé en seconde (s). $V(t)$ est la norme du vecteur vitesse $\vec{V_t}$.
La résistance de l'air est un vecteur noté $\vec{R}$ tel que $\vec{R} = -k\vec{V_t}$ où k est un réel strictement positif.
On admet que la vitesse $V(t)$ est donnée par la relation $V(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$, où k est la constante de résistance de l'air (en $kg \cdot s^{-1}$), m est la masse du parachutiste (en kg), $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ et C est une constante (en $m \cdot s^{-1}$) dépendant des conditions initiales.



1. Exprimer $V(t)$ en fonction de t et de C pour un parachutiste dont la masse est 80 kg et tel que $k = 25\ kg \cdot s^{-1}$.
2. Déterminer la constante C sachant que la vitesse initiale du parachutiste était nulle.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction V.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction V à la calculatrice.

33 On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.
On a tracé dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.



Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes dont on admettra l'existence.
On note D l'une de ces deux tangentes communes. Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
2. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
3. En déduire que $b = -a$.

34 CALCULATRICE **Offre et demande**

Cet exercice a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné dans un contexte de concurrence parfaite.

Partie A : Étude de la fonction Demande

On estime que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x disponible sur le marché est modélisé par la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par $d(x) = \dfrac{50}{x^2+x+1}$.

Ce prix unitaire est exprimé en euro et la quantité x en million d'objets.
On note d' la fonction dérivée de d.

1. Calculer $d'(x)$.
2. En déduire les variations de d sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction Offre

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x exprimée en million d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale.
On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3e^{0{,}26x}$.

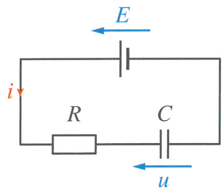
1. Déterminer les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Sur la calculatrice, représenter graphiquement les fonctions f et d de la partie A.

Partie C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle q_0 la quantité associée à p_0.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée, d'une part du prix d'équilibre p_0, et d'autre part de la quantité q_0 correspondante, à 10^{-2} près.

35 **Représenter**

On étudie la charge d'un condensateur et, pour cela, on dispose du circuit électrique ci-dessous composé de :
• une source de tension continue E de 10 V (volt) ;
• un conducteur ohmique de résistance $R = 10^5\ \Omega$ (ohm) ;
• un condensateur de capacité C de 10^{-6} F (farad).



Si le condensateur est totalement déchargé à l'instant initial $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est donnée en fonction du temps t exprimé en s (seconde) par l'expression :
$$u(t) = E - Ee^{\frac{-t}{RC}}.$$
On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(t)$ soit égal à 95 % de E.

1. Représenter graphiquement la tension aux bornes du condensateur sur l'intervalle $[0\,;2]$.
2. Déterminer graphiquement le temps de charge T.

36 ALGO PYTHON

On considère la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = e^{-2n}$.

1. Montrer que $u_n = f(n)$ avec une fonction f à expliciter.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On a écrit les termes de cette suite dans un tableur.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,13533528
4	2	0,01831564
5	3	0,00247875
6	4	0,00033546

a. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
b. On a écrit la fonction suivante en Python.

```python
from math import exp
def seuil():
    suite=1
    n=0
    while suite>10**-8:
        n=n+1
        suite=exp(-2*n)
    return n
```

Expliquer ce que renvoie cette fonction.
c. En utilisant Python, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(u_n) \leqslant 10^{-8}$.

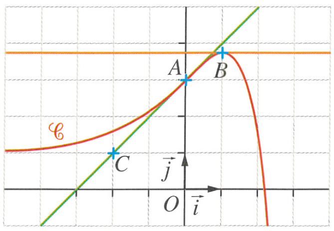
37 **Calculer**
En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes.
1. $e^{2x} \times e^{-3x} = 1$
2. $(e^{6x})^{-6} = 0$
3. $e^{2x-1} \times e^{2x+3} = 1$
4. $(e^{2x-1})^{-2} - 1 = 0$

38 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes.
1. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{4x+4}} = e^{-x+2}$
2. $e^{-x} = e^{2x+4} \times e^{-x}$
3. $\dfrac{e^{-x-1} \times e^{3x+5}}{e^{2}} = e^{x+1}$
4. $e^{-1} \times e^{-x-1} - e^{-x+4} = 0$

39 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes.
1. $\dfrac{e^{x}}{e^{4x}} \geqslant 1$ **2.** $\dfrac{e^{x-2}}{e^{3x-6}} < 1$
3. $\dfrac{e^{2x+1}}{(e^{x})^{3}} \geqslant 0$ **4.** $\dfrac{e^{-x-2}}{e^{3x} \times e^{3}} - 1 \leqslant 0$

40 Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
1. $u_n = 2e^{-n}$
2. $u_n = -5e^{-n+2}$
3. $u_n = \dfrac{3e^{1}}{e^{3n+1}}$

41 **Chercher, communiquer**
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite (AC) est tangente à $\mathscr{C}$ en $A(0\,;3)$.
$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en B.

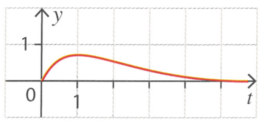


1. Déterminer graphiquement les valeurs respectives de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
2. On admet que f est définie, pour tout x réel, par :
$$f(x) = (ax + b)e^{x} + c.$$
a. Démontrer que, pour tout x réel, on a :
$$f'(x) = (ax + a + b)e^{x}.$$
b. Justifier que les réels a, b et c vérifient les égalités suivantes.
$b + c = 3$ $a + b = 1$ $2a + b = 0$
c. En déduire les valeurs de a, b et c.

42 CALCULATRICE
On considère les équations suivantes.
$e^{2x^2} = e^{-3x-1}$ (E1)
$\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{-4x+2}$ (E2)
$e^{2x+1} \times e^{x-3} = e^{2x+3}$ (E3)
$e^{x^2} = e^{x-3}$ (E4)
1. Conjecturer à la calculatrice le nombre de solutions de chacune de ces équations et leurs valeurs approchées lorsqu'elles existent.
2. Résoudre algébriquement ces équations.

43 **Taux d'alcoolémie**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution du taux d'alcool dans le sang d'un individu après ingestion d'une boisson alcoolisée. Ce taux est donné en $g \cdot L^{-1}$.
Une étude sur un jeune homme de 64 kg ayant ingéré une dose de 33 g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans son sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$ par :
$$f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}.$$
La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est fournie ci-dessous.

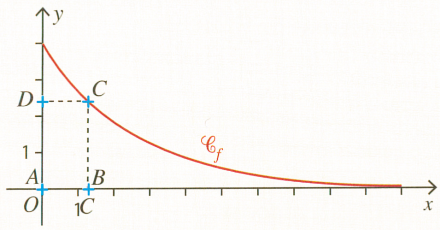


1. Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de $0{,}25\ g \cdot L^{-1}$.
2. Un taux d'alcool dans le sang inférieur à $0{,}001\ g \cdot L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
À partir de combien de temps le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est-il négligeable ? On peut utiliser une calculatrice.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$, on a :
$$f'(t) = (2{,}05 - 2t)e^{-t}.$$
4. Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0{,}025\,;+\infty[$ et en déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang de ce jeune homme.

44 PRISE D'INITIATIVE

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skate-board. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0{,}4x}.$$



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé d'origine O, la courbe $\mathscr{C}_f$ modélisant la rampe de skate-board et le rectangle $ABCD$ représentant le panneau publicitaire. Le point A est situé en O origine du repère, les points B et D appartiennent respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées, le point C appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Montrer que si $AB = 2$ m, alors le panneau publicitaire a une aire d'environ 3,6 m^2.

2. Parmi tous les panneaux possibles répondant aux contraintes de l'énoncé, déterminer, au cm près, les dimensions de celui qui possède l'aire la plus grande possible.

45 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

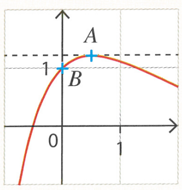
1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2. Que peut-on conjecturer sur les valeurs de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

3. Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier strictement positif n tel que $f(n) < 10^{-5}$.

46 PRISE D'INITIATIVE

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On connaît la courbe représentative de la fonction f représentée ci-dessous.



Les points A et B appartiennent à la courbe représentative de f. $B\,(0\,;1)$ et A est le point de la courbe de f en lequel la tangente est horizontale. On a, de plus, $x_A = \dfrac{1}{2}$.

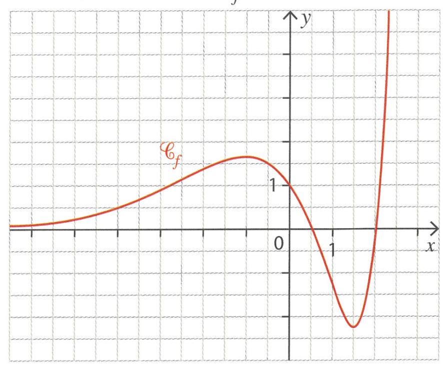
• Déterminer les valeurs de a et b.

47 CALCULATRICE ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)\mathrm{e}^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M (expliquer la démarche).

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0.

4. Compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle permette d'approcher, au dixième près, l'abscisse du point P intersection de la tangente $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{C}_f$.

```python
from math import exp
def intersect():
    x=0
    y=1
    z=1
    while y>=z:
        x=...
        y=-1.5*x+1
        z=...
    return ...
```

48 QCM

1. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1 est :

ⓐ $y = \mathrm{e}^x$
ⓑ $y = \mathrm{e}x$
ⓒ $y = x - \mathrm{e}$

2. La dérivée de la fonction f, définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, a pour expression :

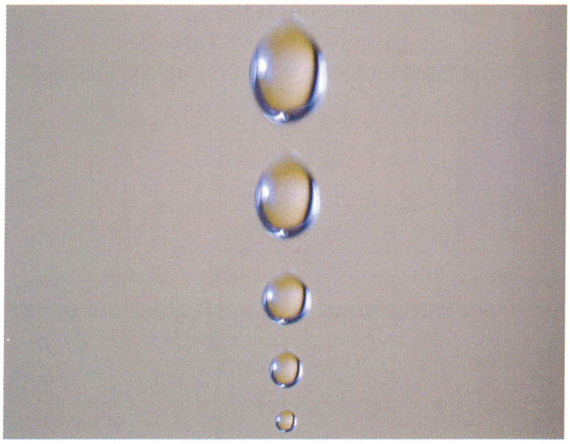
ⓐ $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$
ⓑ $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
ⓒ $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$

3. L'expression $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2$ est égale à :

ⓐ $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2$
ⓑ $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$
ⓒ $2 + 2\mathrm{e}^{2x}$

MODERATO
Exercices

49 CALCULATRICE **Chute d'une goutte d'eau**



On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale.
La vitesse de la goutte durant sa chute peut être modélisée par la suite (v_n) avec :

$$v_n = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}n}\right),$$

où :
- n désigne le temps écoulé en seconde depuis que la goutte a quitté le nuage ;
- m désigne la masse de la goutte en mg ;
- k est la constante de frottement de l'air.

On donne $k = 3{,}9$ et $m = 6$ mg.

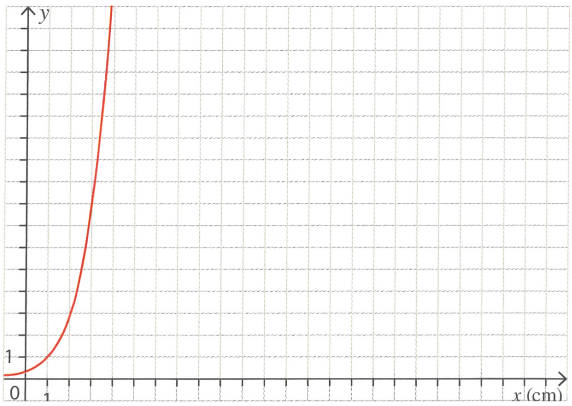
1. Déterminer la vitesse de la goutte 10 s après sa chute.

2. On note (T_n) la suite donnant la variation de la vitesse chaque seconde :

$$T_n = v_{n+1} - v_n.$$

Montrer que (T_n) est une suite géométrique décroissante, puis déterminer à la calculatrice au bout de combien de temps cette variation est négligeable (inférieure à 0,001 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

50 On veut représenter la fonction exponentielle dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
On dispose d'une feuille de papier de 25 cm de large.



- Déterminer la hauteur de la page afin de pouvoir voir la représentation graphique de la fonction exponentielle sur l'intervalle [0 ; 25].

51 **Placement de capital**

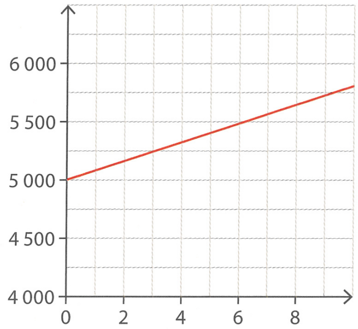
On place, à l'instant $t = 0$, une somme d'argent $C_0 = 5\,000$ € à un taux annuel de p %.
Le capital $C(t)$ acquis à l'instant t est donné par $C(t) = 5\,000e^{pt}$, où t est exprimé en année.

1. Calculer le capital obtenu au bout de six mois à un taux de $p = 1{,}5$ %. Arrondir au centime d'euro.

2. Calculer l'expression de la fonction dérivée de C et en déduire son sens de variation.

3. On donne la courbe de la fonction C ci-dessous, tracée sur l'intervalle [0 ; 11].

4. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps le capital obtenu sera de 5 750 €.
La courbe représentative de la fonction C est-elle une droite ? Justifier la réponse.



5. Résoudre graphiquement l'inéquation $C(t) \geqslant 5\,250$ et interpréter le résultat.

52 CALCULATRICE **Évolution d'une population**

On a relevé le nombre d'habitants d'un pays (exprimé en million) entre les années 1949 et 2019.

Année	1949	1959	1969	1979
Nombre d'habitants en million	350	394,62	444,94	501,67

Année	1989	1999	2009	2019
Nombre d'habitants en million	565,63	637,74	719,05	810,73

On modélise l'évolution de cette population par une fonction f de la forme :

$$f(t) = ke^{\lambda(t-1949)},$$

où k et λ sont deux réels.

1. En utilisant la valeur de la population en 1949, déterminer la valeur de k.

2. Vérifier que $\lambda = 0{,}032$.

3. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

4. Si l'évolution de la population continue avec ce modèle, déterminer avec la calculatrice l'année à partir de laquelle la population dépassera un milliard d'habitants.

53 **Calculer**

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$ et $g(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x-3}}$.

1. Représenter les deux fonctions dans un même repère et résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > f(x)$.

2. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre algébriquement cette inéquation.

54 CALCULATRICE **Frais de fonctionnement**

Modéliser

Les frais de fonctionnement hors charges de personnel d'une société ont évolué depuis 2010 selon le tableau ci-dessous.

Année	2010	2012	2014	2016	2018
Frais en dizaine de milliers d'euros	1,97	3,49	3,8	3,65	3,5

On cherche une fonction qui rende compte approximativement de cette évolution de façon à anticiper sur les années à venir.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{\frac{-x}{3}} + 3$ est acceptable avec x le rang de l'année depuis 2010, soit $x = 0$ en 2010, $x = 1$ en 2011, etc.

2. Étudier les variations de la fonction f et interpréter le résultat obtenu.

3. Le gérant prétend qu'à ce rythme l'entreprise retrouvera bientôt son niveau de frais de fonctionnement de 2010. Que peut-on en penser ?

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$. Quel phénomène peut-on observer ? Peut-on le justifier ? Comment cela se traduit-il pour les frais de fonctionnement de l'entreprise ?

5. À la calculatrice, déterminer à partir de quelle année les frais de fonctionnement repasseront sous la barre des 32 000 €.

55 QCM

1. Pour tout réel x, le nombre $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ est égal à :

ⓐ 1 ⓑ $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}}$ ⓒ $(1-\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{x}$

2. La fonction f est définie pour tout réel t par :

$$f(t) = (2t+4)\mathrm{e}^{-2t}.$$

La dérivée de la fonction f a pour expression :

ⓐ $f'(t) = -4\mathrm{e}^{-2t}$ ⓑ $f'(t) = (-4t-6)\mathrm{e}^{-2t}$

ⓒ $f'(t) = (-4t+6)\mathrm{e}^{-2t}$

3. La courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x\mathrm{e}^{x}$ admet une tangente au point d'abscisse 1 d'équation réduite :

ⓐ $y = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}$ ⓑ $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$ ⓒ $y = 2x - \mathrm{e}$

4. L'équation $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$ a pour ensemble de solutions :

ⓐ $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ ⓑ $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ ⓒ $S = \{0\}$

5. L'inéquation $\mathrm{e}^{-2x+4} \leqslant 1$ a pour ensemble de solutions :

ⓐ $[2 ; +\infty[$ ⓑ $]2 ; +\infty[$ ⓒ $]-\infty ; 2]$

56 CALCULATRICE **Température d'une pièce**

Modéliser

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20° C. Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce de 22 h à 7 h le lendemain matin.

On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11° C. On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heure, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en ° C.

La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$.

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 9]$.

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$ par :

$$f(t) = 9\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 11.$$

2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.

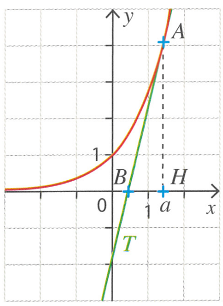
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.

4. Représenter graphiquement la fonction f puis déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température sera inférieure à 15° C.

57 On considère la courbe représentative de la fonction exponentielle définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x}$. On note cette courbe $\mathscr{C}_f$.

Soit a un réel. On considère le point A appartenant à $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, B l'intersection de $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.



1. Montrer que l'équation réduite de $\mathscr{T}$ est :

$$y = \mathrm{e}^{a}x + \mathrm{e}^{a}(1-a).$$

2. Déterminer l'abscisse du point B.

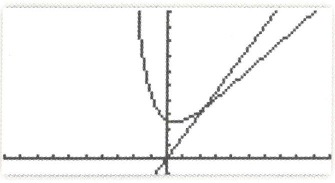
3. Montrer que la distance BH est indépendante de a. Quelle est sa valeur ?

Exercices

58 On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 5] par :

$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}.$$

On a représenté ci-dessous, sur la calculatrice :
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.



1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 5] $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$.
Résoudre dans l'intervalle [0 ; 5] l'inéquation $f'(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur l'intervalle [0 ; 5].

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

a. Donner par lecture graphique un encadrement de α à 0,5 près.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

3. Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.
La fonction f, définie plus haut, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaine de cartes et $f(x)$ en centaine d'euros.
Déduire des questions précédentes le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

4. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €. La recette perçue pour la vente de x centaine(s) de cartes vaut donc $1,5x$ centaine d'euros.
Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaine d'euros, par la vente de x centaine(s) de cartes est donné par :

$$B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}.$$

5. Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 5].

6. Montrer que, sur l'intervalle [0 ; 5], l'équation :

$$B(x) = 0$$

admet une solution unique, puis donner un encadrement au centième de cette solution.
En déduire quel doit être le nombre minimal de cartes commandées pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice.

59 CALCULATRICE

Soit g, A et f les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - xe^x + 1,$$

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

$$\text{et } f(x) = \frac{4}{e^x + 1}.$$

Partie 1

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième près du réel α, solution de l'équation $g(x) = 0$ puis dresser le tableau de signes de la fonction g.

3. Montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie 2

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Partie 3

PRISE D'INITIATIVE

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point M d'abscisse α.

60 Un protocole de traitement d'une maladie comporte la mise en place d'une perfusion de longue durée.
Grâce à cette dernière, la concentration du médicament dans le sang du patient (en micromole par litre) au fil du temps (en heure) est modélisée par la suite (C_n) de terme général :

$$C_n = \frac{d}{a}\left(1 - e^{\frac{na}{80}}\right).$$

- d est le débit de la perfusion en micromole par heure.
- a est la clairance en litre par heure.

1. La clairance d'un patient est de 7 L·h^{-1} et on règle le débit de la perfusion à 84 mM·h^{-1}.

a. Déterminer la concentration du médicament dans le sang au bout de 5 h.

b. Observer l'évolution de cette concentration sur une durée de 48 h. Que peut-on observer ?
Ce phénomène est appelé « phénomène de plateau ».

2. PRISE D'INITIATIVE

Chez un autre patient, beaucoup plus âgé, la clairance est de 3 L·h^{-1}. Comment régler le débit de la perfusion pour obtenir un plateau efficace de 15 mM·L^{-1} ?

61 **Arche de Saint-Louis**

Modéliser, raisonner

Partie A

La fonction cosinus hyperbolique, notée cosh, est définie par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Déterminer la dérivée de cette fonction. On la notera sinh.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

3. Montrer que la fonction cosh est paire et que la fonction sinh est impaire.

Partie B

En 1947, le Jefferson National Expension Memorial lança un grand concours d'architectes dont le but était la construction d'un monument à Saint-Louis (Missouri, USA) symbolisant la porte de l'ouest et représentatif du XX^e siècle. Sur les 172 projets présentés, c'est la grande arche présentée par Eero Saarinen qui fut sélectionnée. La construction de l'arche s'acheva en 1965. Elle fait 190 m de haut et autant de large à sa base.

1. On admet que l'équation de l'arche de Saint-Louis dans le repère orthonormé d'origine le centre du segment joignant les deux pieds de l'arche est de la forme :

$$f(x) = a \times \cosh\left(\frac{x}{38}\right) + b.$$

a. Vérifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

b. Déterminer les valeurs approchées au centième des réels a et b.

2. LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE CALCULATRICE

Un pilote de voltige aérienne veut tenter de passer sous l'arche avec le Solar Impulse (avion expérimental propulsé à l'énergie solaire de 63,40 m d'envergure). On cherche à déterminer l'altitude maximale à laquelle il peut passer sous l'arche.

Proposer une simulation, sur un logiciel de géométrie, de cette situation puis une modélisation algébrique permettant de retrouver à la calculatrice la solution conjecturée sur le logiciel.

62 ALGO PYTHON **Cuisson de céramique**

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000°C. Sitôt les céramiques cuites, le four est éteint et il faut attendre qu'il ait atteint une température de 70° C pour sortir les céramiques du four sans risque qu'elles ne se fissurent.

Si on note t le temps écoulé (en heure) depuis que le four est éteint, alors sa température en degré celsius peut être modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(t) = a e^{\frac{-t}{5}} + b,$$

où a et b sont deux réels.

1. On admet que $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$. Déterminer les valeurs des réels a et b.

2. Pour la suite, on pose $f(t) = 980 e^{\frac{-t}{5}} + 20$.

Étudier les variations de la fonction f. Le résultat paraît-il cohérent ?

3. Lola a créé sous Python la fonction ci-dessous.

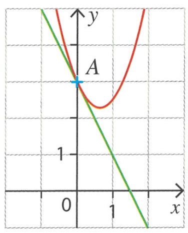
```
from math import exp
def solvexp(k,b):
    t=0
    y=exp(k*t)
    while y>b:
        t=t+1
        y=exp(k*t)
    return t
```

a. Décrire le rôle de cette fonction.

b. Expliquer pourquoi cette fonction ne peut être utilisée que pour $k < 0$ et $0 < b < 1$.

c. Saisir cette fonction sur un éditeur Python puis l'utiliser pour déterminer au bout de combien de temps le four pourra être ouvert. Justifier la méthode.

63 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$, où a et b sont deux réels.



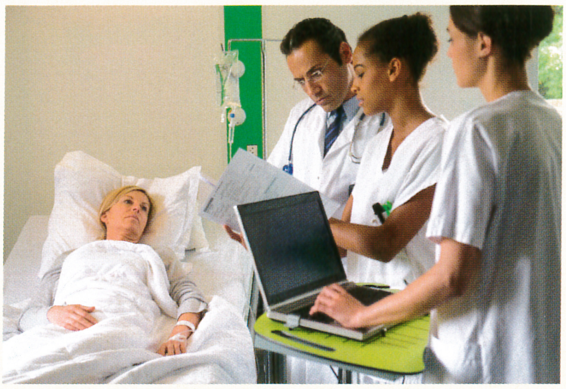
1. Lire graphiquement la valeur de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

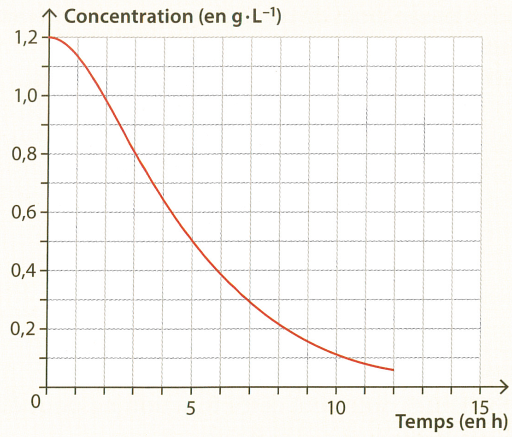
3. Déterminer les valeurs de a et de b.

VERS L'épreuve écrite

64 **Élimination d'un médicament**
Chercher



Un groupe de chercheurs étudie l'élimination d'un médicament dans le sang.
Pour cela, les chercheurs injectent ce médicament par intraveineuse à un patient volontaire puis mesurent, pendant 24 h, la concentration de médicament dans le sang du patient (en gramme par litre).
À l'instant initial, c'est-à-dire sitôt après l'injection, cette concentration est de 1,2 gramme par litre ($g \cdot L^{-1}$).
Puis, pour les 12 premières heures, la concentration est modélisée par la courbe ci-dessous.



Partie A : Lecture graphique

1. Quelle semble être, en $g \cdot L^{-1}$, la concentration du produit dans le sang du patient au bout de 2 h ? Répondre par lecture graphique.

2. Pour que la personne ait le droit de conduire, il faut que la concentration de médicament soit inférieure à 0,4 gramme par litre.
À partir de combien de temps après l'instant initial la personne peut-elle prendre le volant ? Justifier graphiquement la réponse.

Partie B : Modélisation

On admet que l'on peut modéliser cette situation par une fonction f.
Si t désigne le temps en heure, la concentration en gramme par litre $f(t)$ à l'instant t est donnée par :

$$f(t) = (0{,}5t + b)e^{-0{,}4t}$$

pour tout $t \in [0 ; 24]$.

1. En utilisant la concentration dans le sang à l'instant initial, vérifier que $f(t) = (0{,}5t + 1{,}2)e^{-0{,}4t}$.

2. Déterminer la concentration au bout de 5 h en utilisant ce modèle (donner la valeur exacte et une valeur arrondie au dixième).

3. On appelle f' la fonction dérivée de f.
Calculer $f'(t)$.

4. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; 24]$ et interpréter le résultat obtenu.

5. CALCULATRICE En utilisant ce modèle, et à l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'heures après l'instant initial la concentration devient inférieure à 0,06 gramme par litre.

Partie C

PRISE D'INITIATIVE

On admet que la fonction dérivée de f donne, en valeur absolue, la vitesse d'élimination du médicament par l'organisme. Les chercheurs ont démontré que cette vitesse d'élimination commence à décroître 2 h 36 min après l'injection. Justifier cette affirmation.

65 ALGO PYTHON **Population en milieu clos**
Modéliser, chercher, calculer

On étudie le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On modélise cette situation par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ qui, à chaque instant t (exprimé en heure), associe le nombre d'individus, en millier, présents dans l'enceinte à cet instant.
On admet que pour tout réel t positif, $f(t) = 1\,200 - 1\,000e^{-0{,}04t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée sur une calculatrice ou un logiciel, déterminer :
a. le nombre d'individus, en millier, présents dans l'enceinte au bout de 40 h.
b. au bout de combien d'heures le nombre d'individus, en millier, initialement présents dans l'enceinte, aura été multiplié par 4.

3. On appelle vitesse d'évolution du nombre d'individus à l'instant t, exprimée en nombre d'individus en millier par heure, le nombre $f'(t)$.
Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} près de la vitesse d'évolution du nombre d'individus, en millier par heure, à l'instant $t = 50$ heures.

4. On donne les fonctions suivantes écrites en langage Python.

```python
from math import exp
def f(t):
    return 1200-1000*exp(-0.04*t)

def individus():
    individus=[f(t) for t in range(150,161)]
    return individus
```

Qu'affiche la fonction individus lorsqu'on l'écrit dans la console ?

66 Coût unitaire et rentabilité

Calculer

Partie A

On considère la fonction f définie sur [0,5 ; 8] par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x+3}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 8].

1. Démontrer que, pour tout x réel de [0,5 ; 8], on a :

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle [0,5 ; 8] et en déduire les variations de f.

3. On considère l'équation $f(x) = 3$.

Déterminer par le calcul son unique solution x_0 dans l'intervalle [0,5 ; 8]. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite en totalité.

Le coût moyen unitaire de production peut être modélisé par la fonction f de la **partie A** : pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture (coût moyen de production pour un hectolitre de peinture), exprimé en centaine d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilisera ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la **partie A**.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euro, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.

2. Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 €. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

4. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 €.

On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.

Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

67 ALGO PYTHON Puissance d'un son

Communiquer

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.

La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en seconde.

On modélise la puissance du son émis, exprimée en watt, t seconde(s) après le pincement de la corde, par la fonction f définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$f(t) = 100e^{-0,12t}.$$

1. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

2. Interpréter les variations de f dans le contexte de l'exercice.

3. Quelle sera la puissance du son quatre secondes après avoir pincé la corde ? Arrondir au dixième près.

4. Écrire une fonction en Python, nommée f, qui renvoie la valeur de la puissance du son pour un instant t donné.

5. On considère la fonction seuil ci-dessous.

```python
def seuil():
    t=0
    puissance=100
    while puissance>=80:
        t=t+0.1
        puissance=f(t)
    return t
```

a. Que renvoie cette fonction seuil ?

b. En utilisant Python ou la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de t (arrondie au dixième près) telle que la puissance du son soit inférieure à 80 watts.

68 VRAI OU FAUX

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

1. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -xe^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. e^{-x} est un nombre négatif.

3. Pour tout entier naturel n, la suite de terme général $(\frac{1}{2}e^{3n})$ est géométrique.

4. $e^{-3} > 1$.

DIFFÉRENCIATION
Exercices

AP

69 Équations, inéquations et intersection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

Questions Va piano

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = e^{-x}(1-x).$$
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = 1$ et déterminer la valeur de ce maximum.
3. On s'intéresse aux équations de la forme $f(x) = m$, pour m réel.
Résoudre cette équation pour $m = 0$.
4. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice, déterminer une valeur approchée des solutions des équations suivantes.
a. $f(x) = -1$
b. $f(x) = 0{,}2$
c. $f(x) = 0{,}5$

Questions Moderato

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
3. Soit m un réel quelconque. L'équation $f(x) = m$ admet-elle des solutions pour tout réel m ? Justifier.
4. a. Montrer que :
$$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0.$$
b. En déduire que, si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ possède au plus une solution.
5. Conclure sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction des valeurs de m.

Questions Allegro

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
2. On considère la droite d d'équation $y = x$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre d et $\mathscr{C}_f$ et en donner les coordonnées exactes.
3. On considère un réel a et la droite d_a d'équation $y = ax$.
Montrer que si $a < 0$, $\mathscr{C}_f$ et d_a n'ont qu'un seul point d'intersection dont on précisera les coordonnées exactes.
4. On suppose que $a > 0$.
a. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et d_a ont deux points d'intersection.
b. CALCULATRICE En utilisant une calculatrice, déterminer une valeur approchée des coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et d_a.

70 Culture bactérienne

On considère une culture bactérienne dans laquelle le nombre de bactéries (en million) se modélise par la fonction f définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par $f(t) = \dfrac{150}{1+90e^{-0{,}6t}}$, où t désigne le temps en heure.

Questions Va piano

1. Quel est le nombre de bactéries à l'instant initial $t = 0$?
2. Quel est le nombre de bactéries à l'instant $t = 3$? Arrondir à l'unité près.
3. CALCULATRICE Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice.
Quelle conjecture peut-on faire quant à l'évolution à long terme de cette culture bactérienne ?

Questions Moderato

1. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :
$$f'(t) = \frac{8\,100e^{-0{,}6t}}{\left(1+90e^{-0{,}6t}\right)^2}.$$
2. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $[0\,;+\infty[$.
3. CALCULATRICE En utilisant une calculatrice ou un tableur, déterminer une valeur approchée du nombre d'heures et de minutes qu'il faut pour que la population bactérienne dépasse les 8 millions d'individus.

Questions Allegro

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Écrire une fonction en Python, nommée `population`, qui renvoie l'instant (exprimé en heure) où le nombre de bactéries dépassera un certain nombre N donné en argument de la fonction.
3. La fonction f' s'appelle la vitesse de développement de la population bactérienne. À l'aide d'une calculatrice, montrer que la vitesse de développement de la population bactérienne admet un maximum. Quel est alors le nombre de bactéries à cet instant ?

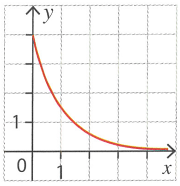
No problem!

1 Matching

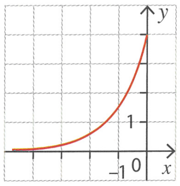
Four graphs, A, B, C and D are shown below.
Match the graphs with each of the following equations.

1. $y = 4e^{x}$ **2.** $y = -4e^{x}$ **3.** $y = 4e^{-x}$ **4.** $y = -4e^{-x}$

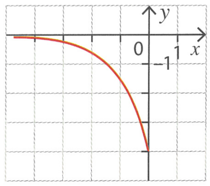
A.



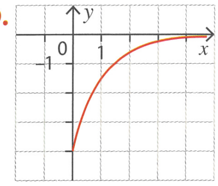
B.



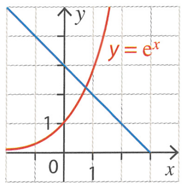
C.



D.



2 Describe as you wish!



1. Describe the graph above. Which functions are represented on this graph?

2. Using these functions and the graph, can you give an approximate value to 1 d.p. of the solution of the equation :

$$e^{x} + x - 3 = 0?$$

3. Using your calculator, give an approximate value to 4 d.p. of this solution.

3 Lovely minks!

A breed of mink is introduced in a new habitat. The number ok minks, M, after t years, is modelled by $M = 74e^{0.6t}$ ($t \geqslant 0$).

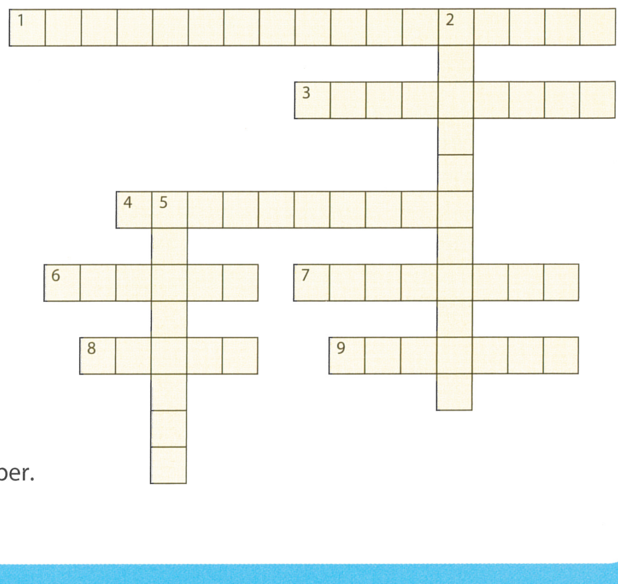
1. State the number of minks that were originally introduced in the new habitat.

2. Predict the number of minks after 3 years in the habitat.

3. Predict the number of complete years it would take for this mink population to exceed 10 000.

4. Sketch the graph to show how the mink population varies with time in the new habitat.

Individual work — Crosswords



1. In two words: the first one is similar to "combine"; the whole expression is often used in finance and economics to describe the overall interest earned on investment when the total interest earned during each period is added back to the original capital.

2. It can be used to describe the increase of the world's population.

3. A line that approaches a curve as close as we want.

4. If you calculate this for exp(x), it is still equal to exp(x).

5. A number that indicates the number of times a term is used as a factor to multiply itself.

6. It will always be positive with the exponential function.

7. A function that maps one number to a unique number.

8. For the exponential function, it is $[0\,;+\infty[$.

9. For the exponential function, it is $\mathbb{R}$.