CHAPITRE

6 Fonction exponentielle

Ressources du chapitre disponibles ici : www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

Croître à une vitesse folle

Leonhard Euler

Leonhard Euler est un mathématicien et physicien suisse du XVIII^e siècle. Il travaille dans des domaines aussi variés que la mécanique, la dynamique des fluides, l'optique et l'astronomie, mais c'est en mathématiques qu'il est considéré comme l'un des plus grands génies. Il a travaillé en particulier sur la notion de fonction et le calcul infinitésimal, et on lui doit de nombreuses notations qui ont toujours cours aujourd'hui.

Euler utilise une notation pour définir un nouveau nombre. Cette notation s'appelle le développement d'un nombre en fractions continues. Il écrit en 1737 :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}}}$$

La première apparition de la lettre « e » pour désigner ce nombre date de 1728.
Déterminer une valeur approchée du nombre e à l'aide du développement ci-dessus.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Calculs de puissances

Écrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de 2.

$A = 2^5 \times 2^3$ $\quad B = (2^4)^2$ $\quad C = 4^3 \times 2^2$

$D = \dfrac{1}{2^6}$ $\quad E = \dfrac{2^{11}}{2^5}$ $\quad F = \dfrac{2^{-4} \times 2^6}{2^5}$

2 Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $2x - 3 = 4x + 7$ **2.** $x^2 - 6 = 3x + 2$

3. $3x + 7 < 2x - 5$ **4.** $2x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$

3 Suite géométrique

1. (v_n) est la suite de premier terme 2 et telle que, pour tout entier naturel n non nul, v_{n+1} s'obtient en diminuant v_n de 70 %.
Expliquer pourquoi (v_n) est une suite géométrique et en donner la raison.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{4}{3^n}$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique et donner son premier terme et sa raison.

4 Termes d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison -3.

• Calculer u_1, u_2 et u_{12}.

5 Taux de variation

Un véhicule décrit un mouvement rectiligne. Il démarre à l'instant $t = 0$. La distance parcourue par ce véhicule, exprimée en mètre, depuis son démarrage en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par $d(t) = t^2 + 5t$.

1. Calculer le taux de variation de la fonction d entre les instants 10 et $10 + h$ (avec $h > 0$).

2. Déterminer la vitesse instantanée de ce véhicule après 10 s.

6 Fonction dérivée

Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur l'intervalle I par l'expression proposée.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ et $I = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = (3x - 2)\sqrt{x}$ et $I =]0\,;+\infty[$.

3. $h(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.

4. $i(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 3}$ et $I =]-3\,;+\infty[$.

5. $j(x) = \sqrt{3x}$ et $I =]0\,;+\infty[$.

7 Tableau de signes

Donner le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$.

$A(x) = -3x + 6$
$B(x) = (-3x - 2)(x - 5)$
$C(x) = -5(x^2 - 4x - 5)$

8 Équation de tangente

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 - 3x + 1.$$

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.

• Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

9 Utilisation d'un tableur

Un capital de 3 000 euros est placé à un taux d'intérêt de 4,5 % par an. On donne l'évolution de ce capital dans la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	1er janvier 2010	3000
2	1 er janvier 2011	3135
3	1er janvier 2012	3276,075
4	1 er janvier 2013	3423,49838
5	1 er janvier 2014	3577,5558
6	1 er janvier 2015	3738,54581
7	1 er janvier 2016	3906,78037
8	1 er janvier 2017	4082,58549
9	1 er janvier 2018	4266,30184

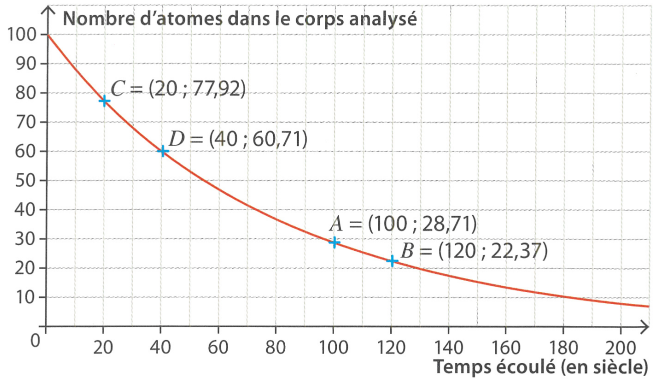
• Quelle formule a-t-on saisie en B2 puis recopiée vers le bas pour compléter cette feuille ?

TEXTES DES SITUATIONS MODIFIABLES

Situation A — Datation au carbone 14

Objectif
Introduire une fonction exponentielle.

Le carbone 14 est un isotope du carbone (^{14}C) présent en infime proportion dans la nature mais de manière constante.
Quand un être vivant (animal ou végétal) meurt, les atomes de carbone 14 qu'il contient se désintègrent de telle sorte que le nombre de désintégrations par unité de temps (appelée aussi vitesse de désintégration) est proportionnel à la quantité d'atomes encore présents.
On note λ le coefficient de proportionnalité.
Le graphique ci-dessous représente cette désintégration au cours du temps.



1 **a.** Vérifier sur les deux intervalles de temps [20 ; 40] et [100 ; 120] que la propriété énoncée précédemment est bien vérifiée.

b. On appelle demi-vie du carbone 14 le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de ses atomes. Estimer à l'aide de la courbe représentative cette demi-vie.

2 **a.** Soit $N(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un corps à l'instant t et h une durée donnée.
Exprimer en fonction de t et de h le nombre de désintégrations entre les instants t et $(t+h)$.

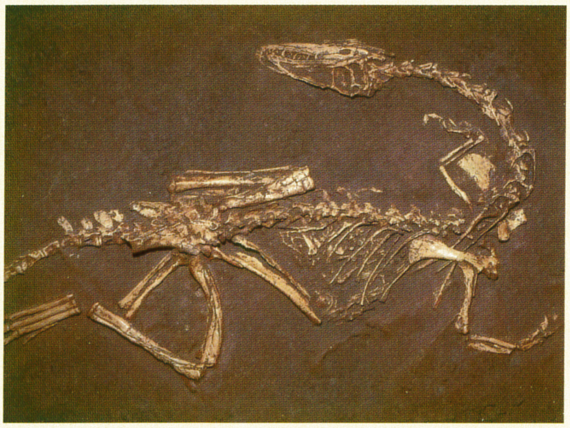
b. La vitesse de désintégration du carbone 14 à l'instant t est donnée par la limite du taux de variation de la fonction N lorsque la durée h tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\text{Nombre de désintégrations entre } t \text{ et } t+h}{h}$$

En déduire une expression de la vitesse de désintégration en fonction de t.

c. Déterminer, d'après l'énoncé, une relation entre la vitesse de désintégration et le nombre d'atomes. Cette relation est appelée « équation différentielle » caractéristique de la fonction N.

3 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.
Montrer que, s'il existe un réel λ tel que pour tout réel t, $N(t) = f(-\lambda t)$, alors la fonction N est solution de l'équation différentielle précédente.



Situation B Rechercher la fonction « idéale » TABLEUR

Objectif
Tracer une courbe approchant la représentation graphique de la fonction exponentielle.

On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Dans cette situation, on va approcher point par point la courbe représentative d'une telle fonction f. On utilise ici une méthode appelée méthode d'Euler.

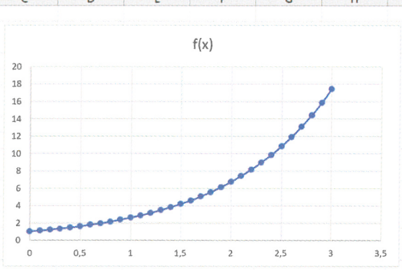
- On choisit un intervalle $[a\,;b]$ sur lequel on veut approcher la courbe représentative de f.
- On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles $[a\,;a+h]$; $[a+h\,;a+2h]$, etc., avec $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- Pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, on utilise l'approximation suivante :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Remarque : Plus n sera grand et donc h petit, meilleure sera cette approximation.

1 **a.** Montrer que, par la méthode d'Euler, pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x+h) \approx f(x) \times (1+h)$.
b. On se propose, à l'aide d'un tableur, d'approcher la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$ avec $h = 0{,}1$.

	A	B
1	x	f(x)
2	0	1
3	0,1	1,1
4	0,2	1,21
5	0,3	1,331
6	0,4	1,4641
7	0,5	1,61051
8	0,6	1,77156
9	0,7	1,94872
10	0,8	2,14359
11	0,9	2,35795
12	1	2,59374
13	1,1	2,85312
14	1,2	3,13843
15	1,3	3,45227
16	1,4	3,7975
17	1,5	4,17725



Quelle formule saisie en B3 et recopiée vers le bas permet d'obtenir le tableau des valeurs approximatives ?
c. Affiner cette approche sur l'intervalle $[-2\,;2]$ avec $f(0) = 1$ et $h = 0{,}05$.

2 **a.** En utilisant la courbe obtenue ci-dessus, conjecturer le signe et les variations de la fonction f.
b. Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $[-2\,;2]$ et tels que $a+b$ appartienne également à $[-2\,;2]$, conjecturer une relation entre $f(a+b)$, $f(a)$ et $f(b)$.

Situation C Comparer avec une croissance géométrique LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Faire le lien entre la croissance de la fonction exponentielle et celles des suites géométriques.

On sait que $\exp(0) = 1$. On se propose donc de comparer la représentation graphique de cette fonction avec celles des suites géométriques de premier terme $u_0 = 1$.

1 Représenter graphiquement la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0\,;10]$.

2 Créer un curseur « e » variant entre 0 et 3, d'incrément 0,01 puis, à l'aide d'un tableur, générer les 10 premiers termes de la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison e.

3 Créer la liste de points correspondante puis faire varier le curseur e. Que constate-t-on ?

4 En déduire que, pour tout entier n, $\exp(n)$ peut aussi s'écrire e^n, e étant un nombre réel dont on estimera la valeur.

Connaître le cours

1. Définition et propriétés algébriques

1. La fonction exponentielle

DÉMO p. 182

Propriété et définition

Il existe une fonction f et une seule définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée exp : $x \rightarrow \exp(x)$.

Remarque

L'existence de cette fonction est admise. Son unicité est démontrée p. 182.

2. Propriétés algébriques

DÉMO p. 183

Théorème (relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque

Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

DÉMO en ligne

Propriété

Pour tous réels x et y, on a :
- $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

3. Lien avec les suites géométriques

DÉMO p. 183

Propriété

Soit a un réel et (u_n) la suite de terme général $\exp(na)$ où n est un entier naturel.
- La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\exp(a)$.
- Pour tout entier n et tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

4. Notation e^x

Définition et notation

Le nombre exp(1) est noté **e**.
Une valeur approchée de ce nombre au millième est **2,718**.

Remarque

D'après la propriété précédente avec $a = 1$, pour tout entier n, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.

Notation

Par extension de la propriété précédente à l'ensemble des réels, on note :
pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Exercice résolu 1 Utiliser la dérivée de la fonction exponentielle

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = 5\exp(x) + x$
2. $g(x) = (3x - 1)\exp(x)$

Solution commentée

1. $f'(x) = 5\exp(x) + 1$
2. $g'(x) = 3\exp(x) + (3x - 1)\exp(x) = (3x + 2)\exp(x)$

EXERCICE 1 p. 192

Exercice résolu 2 Transformer une expression

On donne les ordres de grandeur suivant : $\exp(2) \approx 7$, $\exp(3) \approx 20$ et $\exp(4) \approx 55$.

• En déduire les ordres de grandeur de $\exp(5)$, $\exp(-3)$ et $\exp(1)$.

Solution commentée

$\exp(5) = \exp(2 + 3) = \exp(2) \times \exp(3) \approx 7 \times 20 \approx 140$

$\exp(-3) = \dfrac{1}{\exp(3)} \approx \dfrac{1}{20} \approx 0{,}05$

$\exp(1) = \exp(4 - 3) = \dfrac{\exp(4)}{\exp(3)} \approx \dfrac{55}{20} \approx 2{,}75$

EXERCICE 5 p. 192

Exercice résolu 3 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour simplifier les expressions suivantes.

$A = \exp(x + 3) \times \exp(x - 1)$ $\quad B = (\exp(x))^2 \times \exp(3x)$ $\quad C = \dfrac{\exp(x-1)}{\exp(x+2)}$

Solution commentée

$A = \exp(x + 1) \times \exp(x - 1) = \exp(x + 1 + x - 1) = \exp(2x)$

$B = (\exp(x))^2 \times \exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(3x) = \exp(2x + 3x) = \exp(5x)$

$C = \dfrac{\exp(x-1)}{\exp(x+2)} = \exp[(x - 1) - (x + 2)] = \exp(x - 1 - x - 2) = \exp(-1) = \dfrac{1}{\exp(1)}$

EXERCICE 7 p. 192

Exercice résolu 4 Identifier une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 10 \times e^{3n}$.

1. Calculer u_0.
2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. On rappelle que $e^3 \approx 20$.
Justifier que la suite (u_n) est croissante puis déterminer mentalement à partir de quel rang on a $u_n > 10^6$.

Solution commentée

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 10 \times e^{3n}$,
donc $u_0 = 10 \times e^0 = 10$.

2. Soit n un entier naturel.
On a $u_{n+1} = 10 \times e^{3(n+1)} = 10 \times e^{3n+3}$
$= 10 \times e^3 \times e^{3n} = e^3 \times u_n$.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $q = e^3$.

3. Pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = 10 \times (e^3)^n \approx 10 \times 20^n.$$
$u_0 > 0$ et $e^3 > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.
De plus,
$$10 \xrightarrow{\times 20} 200 \xrightarrow{\times 20} 4\ 000 \xrightarrow{\times 20} 80\ 000 \xrightarrow{\times 20} 1\ 600\ 000 > 10^6$$
Donc u_n dépasse le million dès le rang $n = 4$.

EXERCICE 14 p. 192

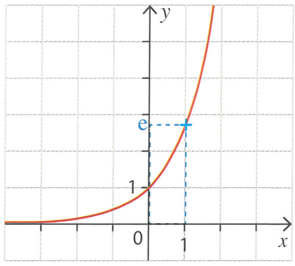
2. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe et variation

DÉMO en ligne

Propriété

Pour tout réel x, $e^x > 0$.
La fonction exponentielle est strictement positive.



DÉMO en ligne

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	↗	1	↗

DÉMO en ligne

Propriété

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

2. Propriétés algébriques

DÉMO en ligne

Propriétés

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- Pour tous réels x et y, on a : $e^x \times e^{-x} = 1$; $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- Pour tout entier naturel n, $e^{nx} = (e^x)^n$.

3. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ et $g(t) = e^{-kt}$

Vocabulaire

De façon générale, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions $f(t) = e^{kt}$ ou $g(t) = e^{-kt}$, où k est un réel strictement positif, sont appelées **fonctions exponentielles**.

Propriété (admise)

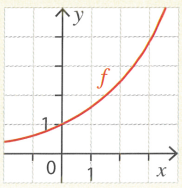
Soient k un réel, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$ et $g(t) = e^{-kt}$.
Pour tout réel t, $f'(t) = k \times f(t) = ke^{kt}$ et $g'(t) = -k \times g(t) = -ke^{-kt}$.

DÉMO en ligne

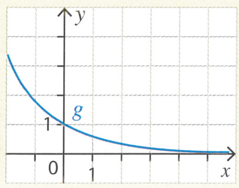
Propriété

Soit k un réel strictement positif.

- La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



- La fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exercice résolu 1 Étudier une fonction avec une exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

- Dresser son tableau de variation.

Solution commentée

Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On étudie le signe de la dérivée f'.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0$

On obtient le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

EXERCICE 16 p. 193

Exercice résolu 2 Résoudre une équation ou une inéquation

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1$
2. $\mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^{x+2}$
3. $\mathrm{e}^{2x+1} \leqslant 1$

Solution commentée

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ car $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$

   $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\quad S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

2. $\mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^{x+2} \Leftrightarrow 3x - 1 = x + 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $\quad S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

3. $\mathrm{e}^{2x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x + 1 \leqslant 0$ car $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

   $\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est : $S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$.

EXERCICE 21 p. 193

Exercice résolu 3 Étudier une fonction de la forme $f(t) = \mathrm{e}^{-kt}$

Un condensateur de capacité C est branché aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R.
La tension aux bornes du condensateur en fonction du temps en seconde, est donnée par l'expression $u_c(t) = E \times \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}$, où E représente la tension d'alimentation, exprimée en volt, et τ une constante telle que $\tau = RC$. (R en ohm (Ω) et C en farad (F)).
On donne $E = 2$ V, $R = 10$ kΩ et $C = 1\,000$ µF.

1. Montrer que la tension aux bornes du condensateur est une fonction décroissante.
2. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la tension aux bornes du condensateur sur l'intervalle [0 ; 15] et déterminer le temps nécessaire pour que la tension du condensateur devienne inférieure à la moitié de la tension d'alimentation.

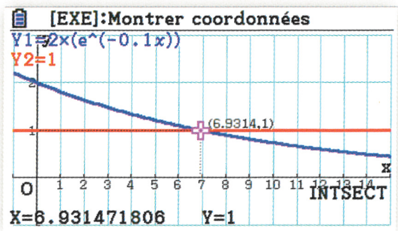
Solution commentée

1. $\tau = R \times C = 10 \times 10^3 \times 1\,000 \times 10^{-6} = 10^1 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^{-6} = 10$

   Donc $u_c(t) = E \times \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} = 2 \times \mathrm{e}^{\frac{-t}{10}} = 2\mathrm{e}^{-0,1t}$.

   On a $u'_c(t) = 2 \times (-0,1)\,\mathrm{e}^{-0,1t} = -2\mathrm{e}^{-0,1t} < 0$, donc la tension est décroissante.

2. Au bout d'environ 7 s, la tension devient inférieure à 1 V, soit la moitié de la tension d'alimentation.



EXERCICE 30 p. 194

Comprendre une démonstration Approfondissement

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

On admet qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On veut démontrer que la fonction f est unique.

- On démontre d'abord que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.
Pour tout réel x, on a :

$$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$
$$= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

La fonction h a pour dérivée la fonction nulle, elle est donc constante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $h(0) = f(0) \times f(0) = 1$, donc, pour tout réel x, on a :

$$h(x) = f(x) \times f(-x) = 1.$$

Ainsi, quel que soit le réel x, $f(x) \neq 0$.

- On démontre ensuite que f est unique.

Soit g une fonction également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On note H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$H(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Alors, pour tout réel x,

$$H'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - f(x)g(x)}{(f(x))^2} = 0.$$

La fonction H a pour dérivée la fonction nulle, elle est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $H(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$, donc, pour tout réel x, $H(x) = 1$.

Conclusion

Quel que soit le réel x, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, donc $g(x) = f(x)$. La fonction f est donc unique.

1. S'il existait une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$, qu'en serait-il de $h(x)$?
Quelle assertion démontrée justifie alors que f ne peut pas s'annuler ?
2. Comment justifie-t-on que la fonction H est définie sur $\mathbb{R}$?
3. Comment l'unicité de la fonction f est-elle démontrée ?

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété (relation fonctionnelle).

- Considérer un réel y et poser $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
- Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'expression de sa dérivée g'. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?
- Déterminer $g(0)$ puis conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Pour tout entier n et tout réel a, $e^{na} = (e^a)^n$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Poser $u_n = e^{na}$.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n).
- Déterminer le premier terme u_0 et la raison q de cette suite.
- En déduire une expression de u_n en fonction de u_0 et q et conclure.

Utiliser différents raisonnements

On veut démontrer la propriété mathématique suivante notée P :

Pour tout réel x, $e^x > 0$.

On veut utiliser un raisonnement par l'absurde.

1 Écrire la propriété contraire de P.

2 Soit a un réel. En utilisant l'égalité $a = 2 \times \frac{a}{2}$, exprimer e^a en fonction de $e^{\frac{a}{2}}$.

3 Montrer qu'il existe une contradiction entre les résultats des questions **1** et **2**.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition $\overline{P}$ (proposition contraire de P) est vraie et on montre qu'elle conduit à une contradiction.

Apprendre par le texte & la vidéo

6 VIDÉOS DE COURS

Définition

La **fonction exponentielle** notée exp vérifie :
- $\exp(0) = 1$;
- pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Notation de la fonction exp et nombre e

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto e^x$
- $e = \exp(1)$ $\qquad e \approx 2{,}718$

Propriétés algébriques

- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Exponentielle et suite géométrique

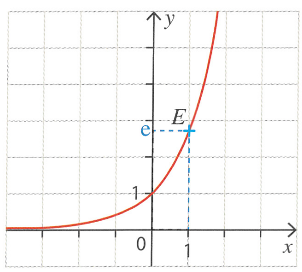
Soit a un réel.

La suite de terme général (e^{na}) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^a.

Signe et variation

Pour tout réel x, $e^x > 0$.

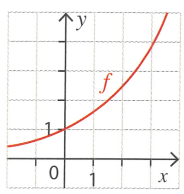
x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		↗	



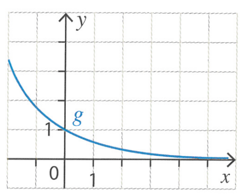
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $e^a \geqslant e^b \Leftrightarrow a \geqslant b$

Fonctions $f : t \mapsto e^{kt}$ et $g : t \mapsto e^{-kt}$ avec k strictement positif

- $f'(t) = ke^{kt}$



- $g'(t) = -ke^{-kt}$



Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 10 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 **1.** Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\exp(x) - x^2 + 1.$$

2. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x}{\exp(x)}.$$

2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa dérivée sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = -2(x+1)e^x$

$g(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$

3 À l'aide des propriétés algébriques de la fonction exponentielle, simplifier les expressions suivantes.

$A = e^3 \times e^{-2} \times e^{-1}$

$B = \dfrac{e^6 \times \left(e^{-1}\right)^3}{e^4}$

$C = \dfrac{1}{e^{-3}} \times \dfrac{1}{e^7}$

$D = (e^{-2})^2 \times e^{-5}$

4 Simplifier les expressions suivantes.

$A = e^{2-2x} \times e^3$

$B = \dfrac{e^{3-x}}{\left(e^{x+2}\right)^2}$

$C = \dfrac{1}{e^{2x}} \times \dfrac{1}{e^{-3x}}$

5 On considère la suite de terme général $u_n = \exp(4n)$.
• Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

6 Résoudre les équations suivantes.
1. $e^{2x+1} = 1$
2. $e^{-3x+4} = e^{-x+2}$

7 Résoudre les inéquations suivantes.
1. $e^{x-1} \leqslant 1$
2. $e^{-2x-1} \leqslant e^{x+2}$
3. $e^{x+2} \geqslant 1$
4. $e^{3x+2} \geqslant e^{-x+4}$

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

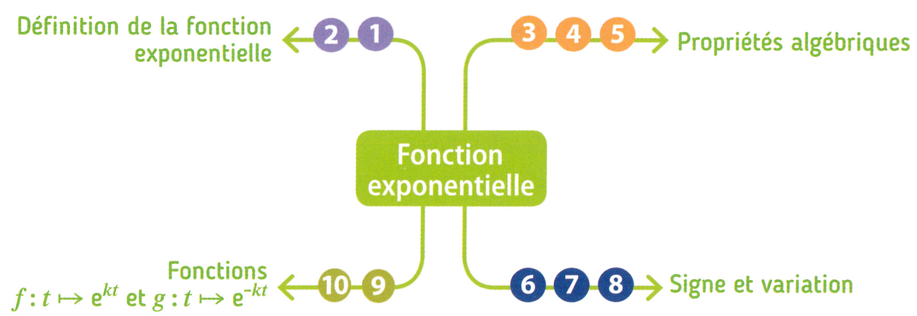
$$f(x) = (x-2)e^x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Dresser son tableau de variation.

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{2t}$.
1. Donner le sens de variation de la fonction f.
2. En utilisant la calculatrice, déterminer, à 0,01 près, la valeur de t pour laquelle $f(t) = 5$.

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3e^{-0{,}5t}$.
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Dresser son tableau de variation.

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler

Objectif
Approcher des images par une boucle non bornée.

On rappelle que la courbe de la fonction exponentielle peut être approchée point par point sur un intervalle donné en utilisant l'approximation suivante : $e^{x+h} \approx e^x \times (1+h)$. On suppose h positif, ici.
On se propose, à l'aide de cette méthode, d'approcher l'image d'un réel a positif quelconque par la fonction exponentielle, avec un pas de progression h donné.

1. Quel est le réel dont l'image par la fonction exponentielle est connue sans ambiguïté ? Quelle est cette image ?

```python
def Exp(a,h):
    x=
    y=
    while x<a:
        x=x+h
        y=
    return y
```

2. Dans la fonction en Python définie ci-dessus, y désigne l'image de x par la fonction exponentielle. Recopier et compléter ce script afin que cette fonction renvoie une valeur approchée de l'image de a par la fonction exponentielle pour un pas de progression h donné.
3. Utiliser cette fonction pour déterminer une valeur approchée des réels e, e^2 et e^3 avec différentes valeurs de h.
Comparer la valeur approchée donnée par l'algorithme et celle donnée par la calculatrice selon le pas de progression h choisi.
4. Écrire le script d'une nouvelle fonction qui renvoie une valeur approchée de l'image par la fonction exponentielle d'un réel b négatif, pour un pas de progression h donné.

TP 2 Première approximation de e par la méthode de Bernoulli

Objectif
Calculer une valeur approchée par une boucle non bornée.

Au milieu du XVII^{e} siècle, Jacques Bernoulli, mathématicien suisse, travaille sur une suite qui converge vers le nombre e.
Cette suite est définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Écrire en Python, le script de la fonction u d'argument n qui renvoie pour une valeur de n donnée, une valeur approchée du terme u_n.
2. On considère la fonction precision dont le script est donné ci-dessous.

```python
from math import e
def precision(p):
    n=1
    while abs(u(n)-e)>10**(-p):
        n=n+1
    return n,u(n)
```

a. Recopier la fonction à la suite de la fonction u.
b. Tester la fonction avec $p = 2$ puis interpréter le résultat obtenu.
c. Justifier l'utilisation de la fonction abs.
d. À partir de quelle valeur de n obtient-on une valeur approchée de e à 10^{-2} près ? à 10^{-3} près ? à 10^{-5} près ?

TP 3 Deuxième approximation de e par la série de Taylor

Objectif
Calculer une valeur approchée par une boucle bornée.

Le mathématicien Brook Taylor a établi une formule qui a permis au mathématicien Euler au XVIIIe siècle, de calculer une valeur approchée du nombre e.
La formule est la suivante :

$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$, cette somme se poursuivant à l'infini.

On se propose de programmer un algorithme permettant d'approcher d'aussi près que l'on veut le nombre e à partir de ce développement illimité.

Données : $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Plus généralement, on appelle **factorielle de n** et l'on note $n!$ le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.
Par convention, on prendra $0! = 1$.

1. Écrire en Python, une fonction factorielle d'argument n qui, pour un entier n donné, renvoie le nombre $n!$
2. On trouve dans la bibliothèque math une fonction appelée « factorial ». Importer cette fonction et vérifier qu'elle renvoie également la factorielle d'un entier n donné.
3. Saisir et compléter la fonction e ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de e par la formule d'Euler, pour un entier n donné en argument.

```
def e(n):
    e=1
    for k in range(...,...):
        e=...+1/...
    return ...
```

4. Faire varier la valeur de l'entier n et noter les approximations de e correspondantes.
5. En s'inspirant éventuellement du TP 2, écrire une fonction precision, d'argument p entier naturel, qui donne, par la formule d'Euler, le premier entier naturel n permettant d'obtenir une valeur approchée de e avec une précision de 10^{-p} et cette valeur approchée de e.

TP 4 Datation au carbone 14

Objectif
Déterminer une valeur approchée de la solution d'une inéquation avec une boucle non bornée.

On note $N(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique, t années après la mort de l'organisme.
Depuis les années 1950, les chercheurs ont réussi à modéliser la fonction N par l'expression : $N(t) = N(0) \times \mathrm{e}^{-0{,}0001244t}$, où $N(0)$ est le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.

1. Si l'on note $P(t)$ la proportion d'atomes de carbone 14 restant dans l'échantillon t années après la mort de l'organisme, montrer que $P(t) = \mathrm{e}^{-0{,}0001244t}$.
2. Écrire en Python, une fonction donnant la demi-vie du carbone 14, c'est-à-dire le temps nécessaire à la destruction de 50 % des atomes de carbone 14 dans un corps.
3. On analyse un fragment d'os et on constate qu'il a perdu 30 % de sa teneur en carbone. En modifiant l'algorithme précédent, estimer son âge.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour importer le nombre réel e

```
from math import e
```

- Pour importer la fonction factorielle

```
from math import factorial
```

TP 5 Évolution démographique : le modèle malthusien LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Modéliser et comparer des modèles.

En 1944, 29 rennes ont été introduits sur l'île de St Matthew en mer de Béring.
En l'absence de prédateur, et en présence de ressources alimentaires abondantes, la population a explosé, atteignant près de 6 000 individus à la fin de l'été 1963.

Année	144	1948	1952	1956	1960	1963
Nombre de rennes	29	88	268	812	2464	5670

On s'intéresse au modèle de croissance de cette population.

1. On se propose d'utiliser un logiciel de géométrie pour construire le nuage de points représentant cette évolution de population puis le comparer à différents modèles (affine, degré 2, degré 3).

a. On pose $t = 0$ pour l'année 1944. En utilisant le tableur du logiciel, construire le nuage de points de coordonnées $(t\,;N(t))$ permettant de représenter l'évolution de la population de rennes entre 1944 et 1963.

b. Déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(0) = 29$ et $f(4) = 88$. Tracer sa représentation graphique dans le même repère.
Le modèle affine $N(t) = N(0) \times (at + b)$ paraît-il approprié pour modéliser cette évolution de population ?
c. On souhaite à présent comparer le nuage de points à un modèle de degré 2.
Montrer que si l'on pose $g(t) = g(0) \times (at + b)^2$, alors $b = 1$.
Créer un curseur a variant sur un intervalle judicieusement choisi et construire la représentation graphique de la fonction g. Le modèle du second degré $N(t) = N(0) \times (at + b)^2$ paraît-il approprié ?
d. Reprendre la question précédente pour un modèle de degré 3, c'est-à-dire d'expression :

$$N(t) = N(0) \times (at + b)^3.$$

2. Thomas Robert Malthus (1766-1834), économiste britannique, publia en 1798 un essai sur le principe d'évolution de la population. Il y suppose que « l'accroissement d'une population est directement proportionnel à son effectif ». Ainsi, si a est le taux annuel de natalité d'une population et b son taux annuel de mortalité, selon Malthus, l'évolution de cette population est modélisée par une fonction N telle que $N'(t) = aN(t) - bN(t)$.
Soit la fonction d'expression $N(t) = N(0)\,e^{kt}$, où $k = a - b$.
Vérifier que cette fonction satisfait bien à l'équation précédente.
Créer un curseur k compris entre 0 et 1 puis représenter la fonction N.
Le modèle de Malthus paraît-il approprié ? Si oui, pour quelle valeur de k ?

TP 6 Fonctions définies par une propriété fonctionnelle LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Approfondissement

Objectif
Approcher point par point la courbe représentative de nouvelles fonctions.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. Qu'en déduit-on pour le point O (0 ; 0) concernant la courbe représentative de la fonction f ?

2. Soient h et a deux réels donnés. On voudrait construire point par point la courbe représentative d'une fonction f telle que $f(0) = 0$, $f(h) = a$ et, pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a. Créer deux curseurs h et a et ouvrir une feuille de tableur. La colonne A contiendra des valeurs de x et la colonne B leurs images par la fonction f.
Quelles sont les premières valeurs à saisir dans les cellules A1 et B1 ?

b. Déterminer les formules à saisir en A2 et B2 puis à recopier vers le bas pour obtenir 20 nouveaux réels et leurs images.

c. Créer la liste de points correspondant à cette table de valeurs et observer le nuage obtenu.
Faire varier les curseurs h et a. Que peut-on penser de la fonction f ?

TP 7 Évolution de population : le modèle scientifique de Verhulst

LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Utiliser un modèle pour décrire une évolution.

Le modèle malthusien (voir le TP5) est remis en cause vers 1840 par Pierre-François Verhulst, mathématicien belge, qui propose un modèle, dit logistique, prenant en compte la limitation de la population.
Le principe est le suivant : « L'accroissement d'une population n'est proportionnel à cette population que pour les petites valeurs de celle-ci. Lorsqu'elle croît, des facteurs naturels limitants apparaissent qui font qu'il existe une population maximale M. » Verhulst postule alors que « l'accroissement de la population x est proportionnel à la quantité $x(M-x)$ ».

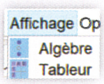
Afin de tester ce modèle, on étudie l'évolution d'une population de vers (ténébrion meunier) dans une boîte contenant au départ 200 g de farine et 500 vers.

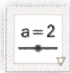
Nb de jours	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb de vers (en centaine)	5	7,49	11,22	16,81	25,18	37,72	56,5	84,64	126,78	189,92	284,5

1. Sur le logiciel, construire le nuage de points représentant l'évolution de cette population de vers.
2. On s'intéresse à l'évolution du nombre de vers sur une très longue période. Le milieu étant limité (en volume et en éléments nutritifs), on décide de modéliser l'évolution de la population de vers par la fonction g définie par :
$$g(t) = \frac{330}{1+65e^{-0,4t}},$$
où t est exprimé en jour et $g(t)$ en centaine de vers.
Vérifier à l'aide du logiciel que ce modèle convient pour les dix premiers jours.
3. Étendre la représentation de la fonction g à l'intervalle [0 ; 15] puis [0 ; 30].
Le principe de Verhulst semble-t-il vérifié ? Expliquer.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour utiliser le tableur : 

- Créer un curseur avec 

et compléter la boîte de dialogue.

- Pour construire un nuage de points à partir du tableur : sélectionner les valeurs à afficher puis cliquer droit. Choisir *Créer* et *Liste de points*.