Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Donner l'expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = x^2$ **2.** $g(x) = -3x^2$
3. $h(x) = -x^3$ **4.** $i(x) = -6\sqrt{x}$
5. $j(x) = \dfrac{2}{x}$ **6.** $k(x) = (2x+1)^2$

2 Déterminer le signe des expressions affines suivantes selon les valeurs de x.

1. $f(x) = 2x - 6$ **2.** $g(x) = -2x + 4$
3. $h(x) = 3x + 9$ **4.** $i(x) = -0{,}5x + 2$
5. $j(x) = 3 + 2x$ **6.** $k(x) = 9 - 3x$

3 Donner l'expression de la dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes (sans s'intéresser aux valeurs interdites).

1. $f(x) = x^2 + 3x + 5$

2. $g(x) = \dfrac{1}{x} + 5x - 2$

3. $h(x) = x^7 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

4. $i(x) = \dfrac{-7}{x}$

5. $j(x) = 5x^7$

6. $k(x) = -3\sqrt{x}$

7. $m(x) = (3x+7)^5$

8. $n(x) = \sqrt{5-2x}$

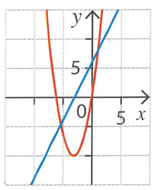
DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

4 Donner, sans calcul, le signe des expressions suivantes.

1. $-x^2 - 3$ **2.** $2x^2 + \sqrt{x}$
3. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{-x^2-1}$ **4.** $-3x^2(x^2+4)$

5 L'une des deux courbes est celle d'une fonction f, l'autre est celle de sa dérivée f'.



• Associer chaque fonction à sa courbe.

6 Reconnaître la structure des fonctions suivantes (somme, produit ou quotient) et donner l'expression de leur fonction dérivée.

1. $f(x) = (4x+5)(2+\sqrt{x})$ pour x dans $]0\,;+\infty[$.

2. $g(x) = \dfrac{5x^2+3x-5}{3x+2}$ pour $x \neq -\dfrac{2}{3}$.

3. $h(x) = \sqrt{x^2+x-2}$ pour x dans : $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$.

4. $i(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{5}{x} - 3x + 5$ pour x dans $]0\,;+\infty[$.

5. $j(x) = \dfrac{1}{(2x-1)(4-2x)}$ pour $x \neq 0{,}5$ et $x \neq 2$.

7 On considère les fonctions f, g et h suivantes.
• f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\sqrt{x}$.
• g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = 2(x-1)^2 + 4$.
• h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = -3(x-1)^2 + 4$.
• Associer à chacune des fonctions f, g et h l'un des tableaux de variation suivants.

Tableau a

x	0		1		$+\infty$
Variations		↘	4	↗	

Tableau b

x	0		1		$+\infty$
Variations		↗	4	↘	

Tableau c

x	0		$+\infty$
Variations		↗	

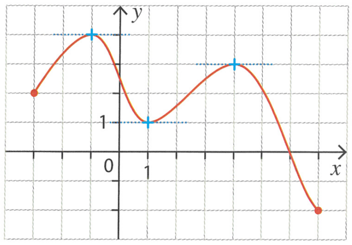
Tableau d

x	0		$+\infty$
Variations		↘	

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

On a représenté ci-contre une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;7]$.



1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$
2. Si $x = 4$ alors $f'(x) = 0$.
3. Si $f'(x) = 0$ alors $x = -1$.
4. Pour tout $x \in [-3\,;6[$, $f(x) > 0$.
5. Pour tout $x \in [4\,;7]$, $f'(x) \leqslant 0$.
6. Pour tout $x \in [-3\,;6]$, $f'(x) \geqslant 0$.
7. Pour tout $x \in [6\,;7]$, $f'(x) \leqslant 0$.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants. Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

On cherche une fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des constantes réelles. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On sait que $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A\,(0\,;0)$ et $B\,(3\,;-3)$. De plus, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en A notée (AC) et une tangente en B notée (BD) telles que $C\,(-1\,;-5)$ et $D\,(5\,;1)$.
- Déterminer l'expression de la fonction f.

Exposé

voir p. 110

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Au sujet des infiniment petits, la plus célèbre querelle est celle de Leibniz et de Newton. Près d'un siècle plus tard, Lazare Carnot, homme politique, général et savant, exprime encore la mésentente scientifique qui entoure ces objets mathématiques.
« On n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent par leurs propriétés, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant. »
En reprenant la définition du taux de variation d'une fonction f et du nombre dérivé de f en un réel a, expliquer la citation de Lazare Carnot.

Exercices

Calcul de fonction dérivée

1 On considère les fonctions u, v, w et z définies pour tout réel x strictement positif par :

$$u(x) = 5x + 3,\ v(x) = \sqrt{x},$$
$$w(x) = x^2 \text{ et } z(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Donner l'expression de la dérivée de ces fonctions.
2. Écrire l'expression des fonctions suivantes puis déterminer l'expression de leur dérivée.

$f = 5w - 2u$ $\qquad g = v - 9z$

$h = \dfrac{w}{u}$

3. Écrire l'expression des dérivées des fonctions suivantes.

$k : x \mapsto \sqrt{5x+3}$ $\qquad l : x \mapsto (5x+3)^2$

$m : x \mapsto \dfrac{1}{5x+3}$

2 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x+1}.$$

1. Écrire f sous la forme d'une somme de deux fonctions u et v dont on précisera l'expression.
2. En déduire la fonction dérivée de f.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-3x+7)(5x+1).$$

1. Quelles sont les fonctions u et v telles que $f = uv$?
2. En déduire la fonction dérivée de f.
3. Donner la forme développée de f puis retrouver le résultat précédent.

4 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-3x-7}{x^2} \text{ pour tout } x \text{ non nul.}$$

1. Quelles sont les fonctions u et v telles que $f = \dfrac{u}{v}$?
2. En déduire la fonction dérivée de f.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (8x-9)^6$.

1. Montrer que $f(x)$ est écrite sous la forme $f(x) = g(mx+p)$ en précisant l'expression de g ainsi que les valeurs de m et p.
2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de f.

6 Soit f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{2x-4}$.

1. Écrire f sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v dont on précisera les expressions.
2. En déduire la fonction dérivée de f sans se soucier du domaine de dérivabilité.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| + x^4$.

1. Écrire f sous la forme d'une somme de deux fonctions u et v.
2. En déduire le domaine de dérivabilité de la fonction f.
3. Donner l'expression de la fonction u sans valeur absolue.
4. En déduire l'expression de la fonction dérivée de f sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{2x^2+1}.$$

1. Déterminer deux fonctions u et v telles que $f = \dfrac{u}{v}$.
2. Déterminer l'expression des fonctions u' et v', fonctions dérivées de u et v.
3. En déduire l'expression de la fonction f', fonction dérivée de f.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 7.$$

1. À l'aide du taux de variation, montrer que f est dérivable en $a = -2$ et donner $f'(-2)$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de f' puis retrouver le résultat précédent.

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-8}{x}$ pour tout réel x non nul.

1. À l'aide du taux de variation, montrer que f est dérivable en $a = -5$ et donner $f'(-5)$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de f' et retrouver le résultat précédent.

11 On considère la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 2x^2 - x + 1$.

1. À l'aide du taux de variation, montrer que h est dérivable en $a = 1$ et donner $h'(1)$.
2. Même question pour $a = -2$.
3. Même question pour $a = 0$.
4. Un élève déclare la conjecture : « Pour tout réel a, $h'(a)$ est égal au produit de a par 4 diminué de 1. » A-t-il raison ?

12 **Calculer**

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $f(x) = -x^2$
- $g(x) = \dfrac{-\pi}{x}$
- $h(x) = 18\sqrt{x}$
- $j(x) = -x + 8 + \sqrt{x}$
- $k(x) = \dfrac{-3}{x} + 3x^2 + 7$
- $m(x) = -3\sqrt{2x+5}$

13 Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $n(x) = \sqrt{3}x^2 - \pi x + \dfrac{1}{3}$
- $p(x) = (2x^2 - x + 1)(-7x + 8)$
- $r(x) = \dfrac{3x-7}{x}$
- $s(x) = \dfrac{x+5}{2x-1}$
- $t(x) = \dfrac{x^2+3x-7}{x+5}$
- $w(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{7-3x}$

14 Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $f(x) = -5\sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{23}{x}$
- $h(x) = 15x^2$
- $j(x) = 3x - 5 + 7\sqrt{x}$
- $k(x) = 3\sqrt{4x+2} - 5x + x^2$
- $m(x) = -\pi - \dfrac{1}{3}x$

15 Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

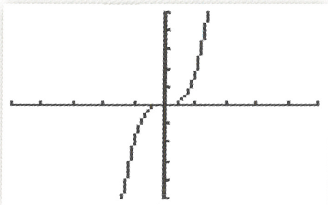
- $n(x) = (-5 + 3x)^7$
- $p(x) = (8 - x)(2x^2 - x + 7)$
- $r(x) = \dfrac{x^2}{x}$
- $s(x) = \dfrac{7x + 2}{x - 1}$
- $t(x) = \dfrac{-2x^2 + x - 1}{7x + 1}$
- $w(x) = \dfrac{5}{2 - 7x}$

Étude des variations

16 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 0{,}1x^2 .$$

On a représenté sur l'écran d'une calculatrice la fonction f.



- Peut-on affirmer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-5 ; 5]$?
Justifier la réponse.

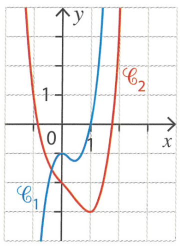
17 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f' est négative sur $]-\infty ; -2]$ et positive sur $[-2 ; +\infty[$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
2. On suppose que $f(-4) = 5$, $f(-2) = 1$ et $f(0) = 3$. Donner une allure possible de la courbe représentative de f.
3. Existe-t-il une seule courbe possible représentant la fonction f ?

18 **Communiquer**

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g.

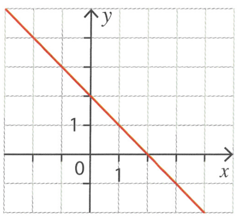
- Sachant que $g = f'$, identifier la courbe représentative de chacune de ces fonctions. Justifier.



19 **Raisonner**

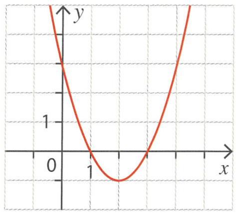
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g' dérivée d'une fonction g.

- Déduire de cette représentation graphique le sens de variation de la fonction g.



20 **Raisonner**

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f' dérivée d'une fonction f.



- Déduire de cette représentation graphique le sens de variation de la fonction f.

21 Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes en étudiant le signe de leur dérivée.

1. $f_1(x) = -\dfrac{1}{x + 1}$ pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$.
2. $f_2(x) = -2\sqrt{x} + 1$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.
3. $f_3(x) = x^2 - 2x + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. $f_4(x) = \sqrt{2x^4 + 5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

22 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1} .$$

1. Expliquer pourquoi f est définie sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
2. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{-5}{(x - 1)^2} .$$

3. En déduire le signe de f' sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Tracer sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f pour vérifier le tableau.

23 **Raisonner, chercher**

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} .$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
2. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.
3. En déduire le signe de f' sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Tracer sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f pour vérifier le tableau.

24 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-3 ; 5]$. Le tableau de signes de $f'(x)$ est le suivant.

x	-3		-1		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Sachant que $f(-1) = -2$ et $f(3) = 0$, dresser le tableau de signes de $f(x)$.

25 Recopier et compléter les tableaux suivants.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$		↘	2	↗	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$		↗	2	↘	

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4.$$

Grâce à un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

```
1  f(x):=2x^3+4x^2+2x+4
       x -> 2*x^3+4*x^2+2*x+4
2  factoriser(f(x))
       2*(x+2)*(x^2+1)
3  factoriser(f'(x))
       2*(x+1)*(3*x+1)
```

1. À l'aide de ces résultats :

a. résoudre l'équation $f(x) = 0$;

b. dresser le tableau de variation de f ;

2. En déduire le signe de $f(x)$.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 15.$$

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. Calculer $f(3)$.
En déduire le signe de la fonction f.

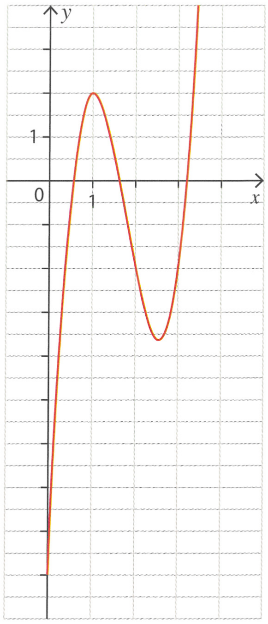
28 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 8]$. Le tableau de signes de $f'(x)$ est le suivant.

x	0		3		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

• Sachant que $f(2) = 0$ et $f(8) = 3$, dresser le tableau de variation et le tableau de signes de f.

Étude des extremums

29 On étudie une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, estimer les nombres suivants.

a. $f(1)$

b. Les valeurs de x telles que $f'(x) = 0$.

c. $f'(2)$

2. À l'aide du graphique, donner le tableau de variation de f.

3. Quelle semble être la valeur du minimum de f sur l'intervalle $[0 ; 4]$?

4. On donne $f(x) = 3x^3 - 16x^2 + 23x - 8$.

a. Calculer $f'(x)$ puis vérifier par le calcul les résultats obtenus à la question **1**.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f puis retrouver le résultat obtenu à la question **3**.

30 On considère la fonction f définie sur $[-3 ; 2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4.$$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3 ; 2]$.

3. Quel est le maximum de f sur $[-3 ; 2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

4. Quel est le minimum de f sur $[-3 ; 2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

31 On considère la fonction g définie sur $[-3 ; 2]$ par :

$$g(x) = \frac{3x+2}{x+6}.$$

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variation de g sur $[-3 ; 2]$.

3. Quel est le maximum de g sur $[-3 ; 2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

4. Quel est le minimum de g sur $[-3 ; 2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

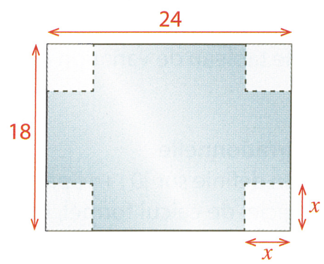
32 Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-10 ; 10]$ telle que $f(-10) = 0$, $f(-9) = -2$, $f(2) = 5$ et $f(10) = -6$.
1. Compléter le tableau de variation suivant.

x	-10		-9		2		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$							

2. Déterminer la valeur du minimum de f sur $[-10 ; 10]$ et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer la valeur du maximum de f sur $[-10 ; 10]$ et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

33 **Bénéfice maximal**
Communiquer
Une entreprise fabrique et vend x objets par jour, avec x compris entre 0 et 150.
Le bénéfice journalier $B(x)$, exprimé en euro, est donné par $B(x) = -x^2 + 140x - 1\,300$.
1. Calculer la dérivée de la fonction et étudier son signe.
2. En déduire les variations de la fonction Bénéfice journalier.
3. Quelle est la valeur du bénéfice maximal ? Combien d'objets faut-il fabriquer et vendre par jour pour l'obtenir ?

34 **Modéliser**
Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



1. Pour quelle valeur de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?
2. Peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ?

35 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [3 ; 8]$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}.$$
1. Donner l'expression de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur I.
2. En déduire le maximum et le minimum de la fonction f sur I.

36 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0 ; 8]$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}.$$
Un logiciel de calcul formel donne l'affichage suivant.

```
1 factoriser(deriver((x^2-2x+6)/(x+1)))
```
$$\frac{(x-2)*(x+4)}{(x+1)^2}$$

1. Vérifier le résultat affiché.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f'.
3. En déduire les variations de f.

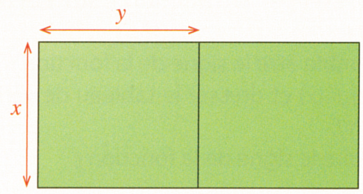
37 On veut montrer que pour tout réel $x \in \,]-\infty ; 3]$, $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 \leqslant 4$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$
1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le maximum de f sur $]-\infty ; 3]$?
3. Conclure.

38 On veut montrer que pour tout réel $x \in [-2 ; +\infty[$, $x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$
1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le minimum de f sur $[-2 ; +\infty[$?
3. Conclure.

39 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser
Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à 64 cm^2 pour que son périmètre soit minimal ?

40 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser
Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 24 cm pour que son aire soit maximale ?

41 PRISE D'INITIATIVE
Chercher, communiquer
Un fermier dispose de 100 mètres de clôture. Il souhaite créer deux enclos mitoyens de même taille selon le schéma suivant.



• Quelles dimensions x et y doit-il choisir pour que l'aire de chacun de ces deux enclos soit la plus grande possible ?

MODERATO

Exercices

42 On considère la fonction w définie par :
$$w(x) = \frac{2x^2+x+1}{-2x+1}.$$
1. Donner la valeur interdite pour w.
2. Calculer la fonction dérivée de w.

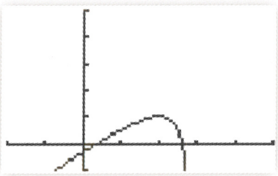
43 Calculer la fonction dérivée des trois fonctions définies par les expressions suivantes en précisant les domaines de dérivabilité.

$f(x) = (-5x+3)\sqrt{x}$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{5x^2-2x-7}{3x-4}$

$h(x) = -5x+7\sqrt{x}$ $\quad$ $i(x) = \sqrt{4-3x}$

44 **Calculer**
Déterminer la fonction dérivée sur l'intervalle considéré de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes.
1. $f(x) = (2x+3)(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{5x-1}$ sur [3 ; 10].
3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ sur [2 ; 5].

45 CALCULATRICE
Un élève a représenté sur la calculatrice la fonction dont l'expression est la suivante :
$$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-3}.$$
Il obtient la représentation graphique suivante.

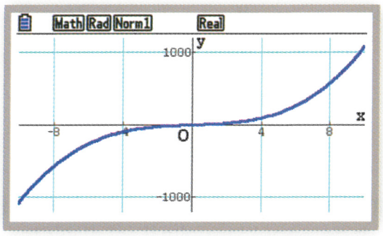


1. A-t-il suffisamment d'informations pour donner le sens de variation de la fonction ?
2. a. Dériver la fonction à l'aide de la formule de dérivation du quotient.
b. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction et vérifier la réponse de la question **1**.

46 CALCULATRICE
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 10.$$
1. a. Représenter la fonction f sur l'écran de la calculatrice.
b. Quel semble être le signe de la fonction f ?
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f.

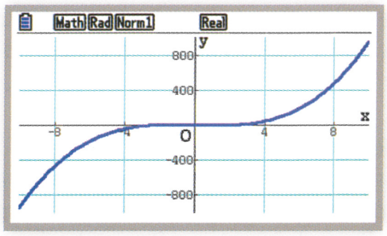
47 Vérifier grâce à la dérivation que, pour tout nombre réel $x \in [1\,;+\infty[$, on a :
$$-x^3+x^2-x+1 \leqslant 0.$$

48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + 8x.$$
On a obtenu à la calculatrice, la courbe suivante.



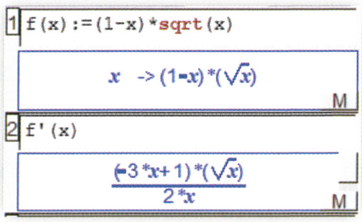
1. Que peut-on conjecturer sur les variations de la fonction f ?
2. On souhaite démontrer la conjecture précédente.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$.
c. Déterminer le tableau de variation de f.
d. Conclure.

49 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 5x.$$
On a obtenu à la calculatrice, la courbe suivante.



1. Que peut-on conjecturer sur les variations de la fonction f ?
2. On souhaite démontrer la conjecture précédente.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$.
c. Déterminer le tableau de variation de f.
d. Conclure.

50 **Une fonction irrationnelle**
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$.
Grâce à un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.



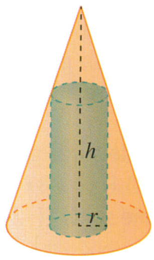
1. Vérifier le résultat obtenu pour $f'(x)$.
2. Démontrer que f admet un maximum que l'on précisera.
3. Comparer $f(1+10^{15})$ et $f(2+10^{15})$.

51 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 3\,.$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.
a. Pour tout $x \in [-\infty\,;0[, f(x) \leqslant -3$.
b. Pour tout $x \in [0\,;+\infty[, f(x) \geqslant 11{,}3$.
c. Pour tout $x \leqslant 7, f(x) < 0$.
d. Pour tout $x > 7, f(x) \geqslant 0$.

52 Un cylindre est inscrit dans un cône de hauteur 30 et de rayon 10. On note h la hauteur du cylindre et r son rayon.



On cherche à déterminer la valeur de r pour laquelle le volume du cylindre est maximal.
1. Prouver que $h = 3(10 - r)$ et en déduire le volume de ce cylindre, en fonction de r, noté $V(r)$.
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction V, notée V'.
3. Étudier le signe de $V'(r)$ et en déduire les variations de la fonction V.
4. Conclure.

53 **Bénéfice d'un artisan**

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut en produire plus de 70 par semaine.
Le coût de production, en euro, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 70] par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}05x^2 + 91x + 225.$$

Chaque objet est vendu 80 euros.
1. a. Quel est le montant des coûts fixes pour cet artisan ?
b. Combien lui coûte la production de 25 objets ?
c. Vérifier que la fonction C est croissante sur l'intervalle [0 ; 70].
2. Le bénéfice, en euro, qu'il retire de la production et de la vente de x objets, est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 70].
a. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
b. Vérifier que $B(25) = 0$.
3. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 70].
a. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour gagner de l'argent.
b. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour que son bénéfice soit maximal.

54 TABLEUR **Coût marginal et coût moyen**
Modéliser, chercher

Un constructeur automobile décide de commercialiser ses voitures au prix de 7 900 € l'unité. Sa production mensuelle peut varier entre 2 000 et 19 000 unités.
On suppose que la fonction Coût associée à cette production (en millier d'euros) est donnée par la formule suivante :

$$C(q) = 0{,}021q^3 - 0{,}37q^2 + 6{,}25q + 0{,}4,$$

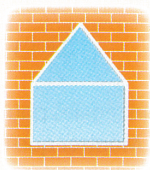
où q est la quantité de voitures en millier.
On a utilisé un tableur grapheur pour trouver les coûts de production.

	A	B	C	D
1	Quantités de voitures	Coût total de production	Coût moyen	Coût marginal
2	1	6,301		
3	2	11,588		
4	3	16,387		
5	4	20,824		
6	5	25,025		
7	6	29,116		
8	7	33,223		
9	8	37,472		
10	9	41,989		
11	10	46,9		
12	11	52,331		
13	12	58,408		
14	13	65,257		
15	14	73,004		
16	15	81,775		
17	16	91,696		
18	17	102,893		
19	18	115,492		
20	19	129,619		

1. Quel est le coût de production pour 11 000 voitures ?
2. Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B2 pour faire calculer les coûts de production ?
3. Entrer ces données sur un tableur.
4. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C2 ?
5. Quelle quantité semble donner un coût moyen minimum ?
6. Sachant que le coût marginal est obtenu en dérivant le coût total, quelle formule doit-on entrer dans la cellule D2 ?
7. Faire tracer les représentations graphiques des trois fonctions dans un même repère.
8. Pour quelle quantité a-t-on le coût marginal égal au coût moyen ? Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question 5. Que peut-on en déduire ?

55 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser

Une fenêtre se compose d'un rectangle surmonté d'un triangle isocèle rectangle. Le périmètre de sa partie rectangulaire est égal à trois mètres.



• Quelles doivent être les dimensions de la fenêtre pour qu'elle donne un éclairement maximal ?

56 ALGO

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2.$$

1. On considère l'algorithme suivant.

```
entrer h
a ← 0
u ← a
m ← f(a)
Tant que a < 5
    a ← a + h
    Si f(a) < m alors
        u ← a
        m ← f(a)
Afficher u et m
```

a. Faire tourner cet algorithme pour $h = 1$. Quel résultat affiche-t-il ?

b. Programmer cet algorithme sur la calculatrice ou en Python et donner la valeur affichée pour $h = 0{,}1$.

c. Que fait cet algorithme ? Quel résultat permet-il de conjecturer pour la fonction f ?

2. Démontrer la conjecture précédente.

57 Soit p la fonction définie pour tout réel x par :

$$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2.$$

1. Déterminer l'expression de $p'(x)$.

2. Montrer que $p(x)$ s'écrit aussi :

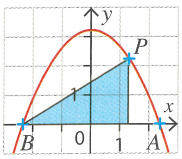
$$p(x) = (x - 2)(3x^2 + 2x - 1).$$

Retrouver avec cette forme l'expression de $p'(x)$.

3. Montrer que $p(x)$ s'écrit encore $3(x-2)\,(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

Retrouver avec cette dernière forme l'expression de $p'(x)$.

58



La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $P\,(x ; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.

• Déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle bleu soit maximale.

59 **1.** Montrer que les expressions :

$$3x + 1 + \frac{2}{x+3} \quad \text{et} \quad \frac{3x^2 + 10x + 5}{x+3}$$

sont égales pour tout x réel différent de -3.

2. Montrer que les dérivées de chacune des ces expressions sont égales.

3. Retrouver ces résultats en utilisant un logiciel de calcul formel.

60 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = 3 - \frac{3}{x+1}.$$

1. Déterminer les fonctions dérivées de f et g.

2. Que remarque-t-on ?

3. Donner l'expression de la fonction $f - g$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Conclure quant à la remarque précédente.

61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$.

2. Montrer que l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = 7x - 7$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x - 7$.

a. Montrer que $f(x) - g(x) = 2x^2 - 8x + 8$.

b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}$.

62 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x + 1,$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-1}{x+2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g.

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)}{x+2}$.

b. Étudier le signe de $h(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

4. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection. Donner une équation de cette tangente.

63 **Vitesse d'un mobile**

Calculer

Lorsqu'un mobile se déplace selon un mouvement rectiligne, on repère sa position à partir d'une origine par une fonction f définie par :

$$f(t) = 5t^2 + 3t + 1,$$

où t désigne le temps écoulé.

La vitesse du mobile est donnée à l'instant t par la fonction notée en sciences physiques $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, qui correspond à f' en mathématiques.

L'accélération du mobile est donnée à l'instant t par la fonction $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 t}$, qui correspond à f'' (dérivée seconde ou encore dérivée de la fonction f') en mathématiques.

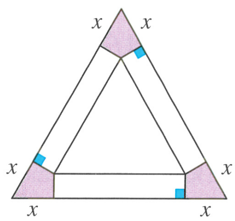
• Donner l'expression et l'accélération du mobile en fonction du temps.

64 Le pic pétrolier d'un gisement est atteint lorsque la production de pétrole est à son niveau maximum.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la production pétrolière en Norvège exprimée en millier de barils par jour entre les années 1990 et 2013.

	A	B	C
1	Année	Rang	Production
2	1990	0	1725
3	1991	1	1962
4	1992	2	2225
5	1993	3	2385
6	1994	4	2701
7	1995	5	2910
8	1996	6	3241
9	1997	7	3290
10	1998	8	3147
11	1999	9	3148
12	2000	10	3355
13	2001	11	3423
14	2002	12	3342
15	2003	13	3273
16	2004	14	3197
17	2005	15	2978
18	2006	16	2786
19	2007	17	2565
20	2008	18	2464
21	2009	19	2353
22	2010	20	2135
23	2011	21	2007
24	2012	22	1902
25	2013	23	1826

1. a. Recopier, sur un tableur, le tableau précédent.
b. Sélectionner la plage B1:C25 et représenter par un nuage de points la série statistique donnant la production suivant le rang de l'année.
c. Cliquer droit sur ce nuage de points et sélectionner *Ajouter une courbe de tendance*, puis choisir une courbe de tendance polynomiale de degré 3 et, dans *Option*, choisir *Afficher l'équation sur le graphique*.
d. Quel polynôme P de degré 3 permettant de modéliser cette évolution obtient-on ?
2. En étudiant la fonction P :
a. estimer l'année du pic pétrolier des gisements norvégiens ;
b. estimer l'année où la production norvégienne a atteint son plus bas niveau.

65 On découpe dans un triangle équilatéral de côté 60 cm les trois coins en violet pour former une boîte triangulaire sans couvercle.



• Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

66 **Évolution d'une épidémie**
On a modélisé l'évolution d'une épidémie de grippe de la façon suivante : si t est le temps (en jour) écoulé depuis le début de l'épidémie, le nombre de cas en millier est donné par :

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t.$$

1. Combien de malades compte-t-on au bout de 5 jours ? Combien de malades compte-t-on au bout de 20 jours ?
2. Donner l'expression de la fonction dérivée de f.
On appelle vitesse instantanée d'évolution au temps t le nombre dérivé de la fonction f en t.
3. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie au début de l'épidémie.
4. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie à l'instant $t = 3$ jours.
5. Déterminer le nombre de jours pour atteindre le pic de l'épidémie.
6. Quelle est la vitesse d'évolution de la maladie au moment du pic ?

67 **Étude marketing**

Une marque de soda a lancé une vaste campagne de publicité pour promouvoir une nouvelle boisson auprès des jeunes.
La fréquence des jeunes connaissant ce nouveau soda est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{2t+1}{2t+4},$$

où t désigne le nombre de mois écoulés depuis le début de la campagne.
1. Quel est le pourcentage de jeunes qui connaissent cette boisson au début de la campagne ? Quel est le pourcentage de jeunes qui connaissent cette boisson au bout d'un mois ?
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0{,}75$.
Interpréter le résultat obtenu.
4. Au bout de combien de mois plus de 90 % des jeunes connaîtront-ils cette nouvelle boisson ?

ALLEGRO
Exercices

68 **Calculer**

Donner la fonction dérivée des fonctions définies par les expressions suivantes sans se soucier du domaine de définition ou de dérivabilité.
a, b et c désignent des nombres réels quelconques.

- $f(x) = ax^2$
- $g(x) = \dfrac{b}{x}$
- $h(t) = a\sqrt{t}$
- $j(x) = -ax + b + c\sqrt{x}$
- $k(t) = \dfrac{a}{t} + bt^2 + 7$
- $m(t) = (-5t + b)\sqrt{t}$
- $n(x) = c\sqrt{3}x^2 - 3ax + b$
- $p(x) = (3x+5)(-7x+8)(-x+3)$
- $r(x) = \dfrac{ax-7}{bx}$

69 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2}$.

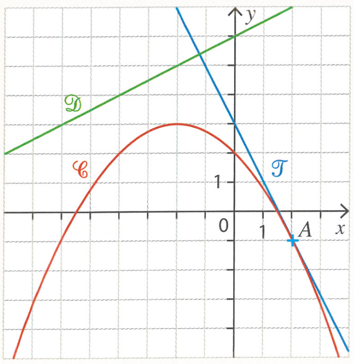
1. Dresser le tableau de signes de f.
2. Donner l'expression de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de signes de f'.
4. En déduire le tableau de variation de f.

70 « J'ai perdu la question, mais j'ai la réponse ! Je sais qu'il fallait déterminer la dérivée de deux fonctions, et voilà la réponse :

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + x \text{ et } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}} + x^2\text{. »}$$

- Rédiger un énoncé pour cet exercice. Y a-t-il plusieurs énoncés possibles ?

71 PRISE D'INITIATIVE



On a construit dans le repère ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction u et la droite $\mathscr{D}$ représentant une fonction affine v.
$\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 2.
On définit la fonction φ par :

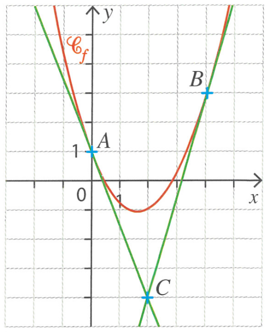
$$\varphi(x) = u(x) \times v(x) \text{ pour tout réel } x.$$

- À l'aide du graphique, déterminer $\varphi'(2)$ et $\varphi'(-2)$.

72 On considère la fonction définie sur l'intervalle [4 ; 5] par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{20}{x}\right)$.

- Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [4 ; 5], $f(x) \geqslant \sqrt{20}$.

73 On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation : $y = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels) représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.
Cette courbe $\mathscr{P}$ passe par les points $A(0\,;1)$ et $B(4\,;3)$.
Les tangentes en A et B se coupent en $C(2\,;-4)$.



1. Donner graphiquement l'équation réduite de chacune de ces tangentes.
2. En déduire $f'(0)$ puis $f'(4)$.
3. Déterminer l'expression de la fonction $f'(x)$ en fonction des constantes a, b et c.
4. À l'aide des renseignements précédents, obtenir trois équations d'inconnues a, b et c.
5. Donner l'expression de $f(x)$ puis celle de $f'(x)$.
6. Retrouver les valeurs de $f'(0)$ puis $f'(4)$.

74 1. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x + 1,$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

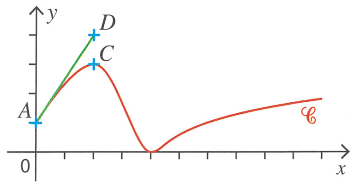
a. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_0$.

2. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 2x + 1.$$

75 On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique.



Les coordonnées des points indiqués sont $A(0\,;1)$, $D(2\,;4)$ et $C(2\,;3)$.
La droite (AD) est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La courbe rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.
On sait aussi que $f(6) = 1$ et que la tangente au point d'abscisse 6 passe par le point $E(3\,;0)$.

1. Par lecture graphique :

a. déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(6)$;

b. déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6 ;

c. dresser le tableau de signes de f'.

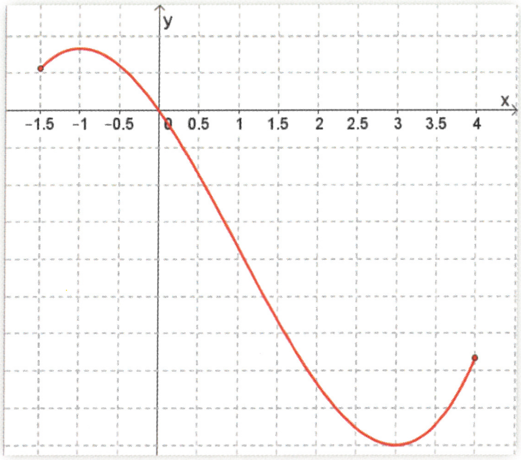
2. On considère la fonction g définie par $g = \dfrac{1}{f}$.

a. Déterminer le domaine de définition de g.

b. Donner l'expression de g' à l'aide de f et de f'.

c. En déduire le sens de variation de g.

76 **1.** Lucas a représenté à l'aide d'un logiciel de géométrie une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,5 ; 4]$, mais il n'a pas gradué l'axe des ordonnées.



À l'aide du graphique :

a. décrire les variations de la fonction f ;

b. résoudre l'équation $f'(x) = 0$;

c. résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$;

d. résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

2. La fonction f représentée par Lucas s'écrit sous la forme :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont quatre nombres réels.

a. Justifier que $c = 0$.

b. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2a + b = -3 \\ 6a + b = -27 \end{cases}.$$

c. En déduire les valeurs de a et b.

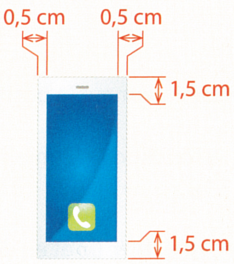
3. Retrouver par le calcul les variations de la fonction f.

4. En déduire les extremums de la fonction f et l'unité choisie par Lucas sur l'axe des ordonnées.

77 PRISE D'INITIATIVE

L'écran d'un téléphone portable a une surface de 45 cm^2.

À gauche et à droite de l'écran, le bord du téléphone mesure 0,5 cm. En haut et en bas, le bord du téléphone mesure 1,5 cm.



• Sachant que ce téléphone a été conçu pour que sa surface totale (écran et bords) soit minimale, quelles sont les dimensions de son écran ?

78 PRISE D'INITIATIVE

Communiquer

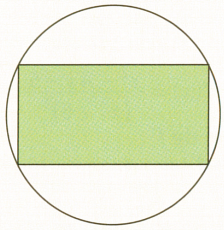
On coupe en deux parties une ficelle de 2 m. Avec le premier bout, on construit un disque et avec le second un carré.

• Comment doit-on couper la ficelle pour que le total des deux aires de ces deux figures soit minimal ?

79 PRISE D'INITIATIVE

Modéliser

On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon 1.



• Déterminer les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale.

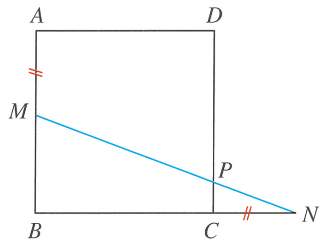
80 $ABCD$ est un carré de côté 1.

M est sur le segment $[AB]$.

On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC)$ à l'extérieur du segment $[BC]$.

La droite (MN) coupe (DC) en P.

On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.



Le but de l'exercice est de trouver M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.

1. Exprimer BM et BN en fonction de x.

2. Montrer que $PC = \dfrac{-x^2 + x}{x + 1}$.

3. En déduire la position du point M maximalisant la longueur PC.

81 Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est 576 mm^3.

On note y la hauteur ; ses autres dimensions sont x et $2x$ (x et y sont en mm), et x doit être nécessairement compris entre 3 et 12 mm.

1. Exprimer y en fonction de x.

2. Exprimer la surface totale $S(x)$, en mm^2, de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.

3. Étudier le sens de variation de S sur l'intervalle $[3 ; 12]$ et en déduire la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est minimale.

VERS

L'épreuve écrite

82 On considère la fonction w définie par :

$$w(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}.$$

1. Existe-t-il une valeur interdite pour w ?

2. Déterminer les variations de la fonction w.

3. Dans un repère, on appelle $\mathscr{C}_w$ la courbe représentative de la fonction et $\mathscr{T}_{-2}$ sa tangente au point d'abscisse (–2).

Déterminer l'équation de $\mathscr{T}_{-2}$.

4. Le point $\left(1\,;\dfrac{61}{25}\right)$ appartient-il à cette droite ?

83 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2 - x}{x^2 + 5}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x^2+5)^2}$.

2. Étudier le signe de f'.

3. En déduire le tableau de variation de f.

84 **Coût de fabrication et bénéfice maximal**

Dans une entreprise, les coûts de fabrication de q objets sont donnés, en euro, par :

$$C(q) = q^2 + 10q + 1\,500, \text{ pour } q \in [0\,;500].$$

L'entreprise vend chaque objet fabriqué 87 €.

1. Quels sont les coûts fixes ? Déterminer q pour que les coûts de fabrication soient égaux à 3 500 €.

2. Exprimer la fonction Recette totale R en fonction de q.

3. Exprimer la fonction Bénéfice B en fonction de q.

4. Calculer la quantité d'objets à produire et à vendre pour que cette entreprise réalise un bénéfice maximal.

5. Donner ce bénéfice maximal en euro.

6. Pour quelles quantités d'objets fabriqués et vendus, le bénéfice est-il strictement positif ?

85 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \text{ sur } [-3\,;3].$$

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de f.

3. Déterminer deux nombres réels m et M tels que, pour tout réel x de [–3 ; 3], on ait :

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

4. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction f. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$. Retrouver le résultat algébriquement.

86 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point A d'abscisse 1.

4. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2.$$

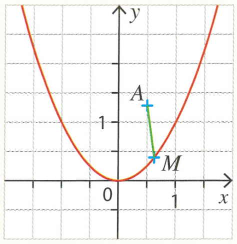
a. Montrer que l'on a :

$$f(x) - g(x) = (x-1)(x^2 + x - 2).$$

b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

c. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

87 On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{5}{4}\right)$. On cherche à déterminer l'abscisse x du point M de la parabole le plus proche de A.



1. Quelles sont les coordonnées du point M, mobile sur la parabole $\mathscr{P}$, en fonction de x ?

2. Déterminer AM^2 en fonction de x.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{29}{16}.$$

a. Déterminer $f'(x)$.

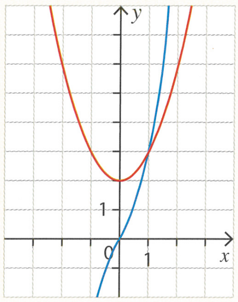
b. Montrer que $f'(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de f.

4. Répondre au problème posé.

88 Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x \text{ et } g(x) = x^2 + 2.$$



1. Déterminer graphiquement la position relative des deux courbes.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2.$$

a. Calculer $h'(x)$.

b. Déterminer le signe de $h'(x)$ et en déduire les variations de h.

c. Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de h.

3. À l'aide de l'étude de la fonction h, retrouver les résultats de la question **1**.

89 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la fonction g'.

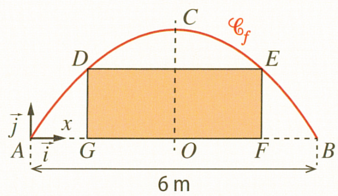
2. On note h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1$. Déterminer la fonction h' et dresser le tableau de variation de h.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction g.

4. En quel(s) point(s) $\mathscr{C}_g$ admet-elle une tangente horizontale ?

5. Existe-t-il un point de $\mathscr{C}_g$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 3$?

90



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.
Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

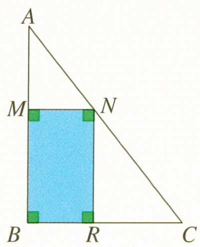
1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x exprimée en mètre ?

2. Démontrer que pour $x \in [0 ; 3]$,

$$\mathscr{A}(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x.$$

3. Déterminer le tableau de variation de la fonction A sur $[0 ; 3]$.
En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

91 Dans le triangle rectangle ABC, on a $AB = 8$ unités et $BC = 6$ unités.
R se déplace sur le segment $[BC]$ et engendre un rectangle $MNRB$ conformément à la figure ci-dessous.



1. Quelle position doit occuper R pour obtenir un rectangle d'aire maximale ?

2. Même question pour obtenir un rectangle de périmètre maximal.

92 QCM

Donner la seule réponse correcte parmi les trois proposées. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $[-3 ; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f sur $[-3 ; 4]$.

x	-3		-1		3		4
f	-24	↗	8	↘	-24	↗	-17

1. L'expression de $f'(x)$ est :
ⓐ $f'(x) = x^2 - 6x - 9$ ⓑ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
ⓒ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$

2. Sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, la fonction f' est :
ⓐ positive ⓑ négative
ⓒ de signe non constant

3. Le calcul de $f'(-2)$ donne :
ⓐ 25 ⓑ −11 ⓒ 1

4. L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-3 ; 4]$:
ⓐ aucune solution ⓑ une unique solution
ⓒ deux solutions

93 PRISE D'INITIATIVE

Je suis une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - ax^2 + b$, où a et b sont deux nombres réels.
Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, mon minimum est égal à 5 atteint pour $x = 2$.
• Qui suis-je ?

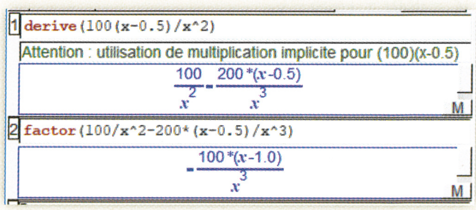
94 La puissance P (en watt) fournie par un générateur est donnée par la formule :

$P = U^2 \dfrac{R_U}{(R_G + R_U)^2}$ où U est la tension (en volt) aux bornes du générateur, R_G et R_U les résistances (en ohm) du générateur et du circuit.

On donne $U = 10$ V, $R_G = 0{,}5\ \Omega$ et $R_G + R_U = x\,\Omega$ avec $x > 0$.

1. Montrer que P est une fonction de la variable x avec $P(x) = 100\dfrac{x - 0{,}5}{x^2}$.

2. En utilisant le logiciel *Xcas*, on trouve l'expression factorisée de la dérivée de P.



Déterminer le signe de $P'(x)$ et dresser le tableau de variation de P.

3. Retrouver le résultat du calcul de la dérivée P'.

4. Quelle est la valeur de x pour laquelle la puissance est maximale ? Quelle est alors cette puissance ?

95 Somme minimale

Quelle somme minimale peut-on obtenir en additionnant un nombre strictement positif et son inverse ?

Questions Va piano

1. Choisir quatre nombres strictement positifs. Pour chacun d'eux, faire la somme de ce nombre et de son inverse. Quelle est la valeur minimale obtenue ? Cela répond-il à la problématique ?
2. Si x désigne un nombre strictement positif, expliquer pourquoi le problème consiste à chercher le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
3. Conjecturer cette valeur à l'aide de la calculatrice.

Questions Moderato

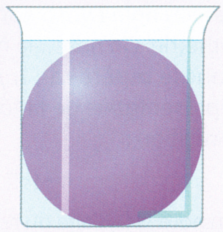
1. Montrer que le problème revient à chercher le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
2. Calculer la dérivée de f puis étudier son signe.
3. En déduire les variations de f.
4. Conclure.

Questions Allegro

1. Montrer que le problème revient à chercher le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
2. Conclure.
3. Généraliser le résultat en trouvant, pour tout n de $\mathbb{N}$, le minimum de la fonction $f_n(x) = x + \frac{n}{x}$.

96 Volume d'eau

On dépose une bille sphérique de rayon 9 cm dans un récipient cylindrique indéformable de diamètre 18 cm que l'on remplit d'eau jusqu'à ce que le niveau d'eau soit tangent à la bille.
On retire la bille sans emporter d'eau ni en rajouter, et on cherche à savoir s'il est possible de plonger une autre bille de rayon différent telle que le niveau de l'eau soit de nouveau tangent à la bille.



Questions Va piano

1. Calculer le volume d'eau, le volume de la bille de rayon 9 cm et le volume du cylindre jusqu'à la hauteur d'eau.
2. On note r le rayon de la nouvelle bille (si elle existe).
Quel est le volume de la nouvelle bille en fonction de r ?
3. Montrer que le problème revient à obtenir un volume d'eau et de bille égal au volume total du cylindre jusqu'à la nouvelle hauteur d'eau.
4. Montrer que la question précédente revient à trouver les solutions de l'équation $4r^3 - 486r + 1\,458 = 0$.
5. CALCULATRICE Conjecturer la solution à l'aide de la calculatrice.

Questions Moderato

1. Montrer que le problème revient à trouver le nombre de solutions sur $[0\,;9]$ de l'équation $4r^3 - 486r + 1\,458 = 0$.
2. Montrer que :
$(r-9)(4r^2+36r-162) = 4r^3 - 486r + 1\,458$.
3. Conclure.

Questions Allegro

1. Montrer que le problème revient à obtenir les solutions de l'équation :
$$4r^3 - 486r + 1\,458 = 0.$$
2. On considère la fonction définie sur $[0\,;9]$ par $f(x) = 4r^3 - 486r + 1\,458$.
Calculer la fonction dérivée de la fonction f puis en déduire le tableau de variation de f.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;9]$.
4. Conclure.

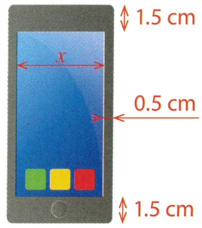
No problem!

1 Taking initiative

1. Use your calculator to sketch the graph of function f defined for any real number by $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ and comment on the variations.
2. Prove the conjectures.

2 Smartphone

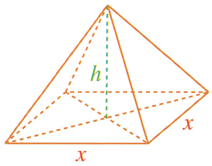
The area of a smartphone screen is equal to 45 cm^2. The borders of that phone on the left and right hand sides of the screen are 0.5 cm long. The borders of that phone at the top and at the bottom of the screen are 1.5 cm long.



• Knowing that we want the total area of that phone to be as small as possible, what are the screen dimensions?

3 A pyramid

A pyramid with square base-side length x, and height h is shown on the right. Find the value of x so that the volume of the pyramid is 1000 cm^3 and its surface area is minimum.



4 The salt cellar

A salt cellar is in the shape of a cylinder with a hemisphere attached to one end. Its total volume is to be 120 cm^3.
1. Express the formula for the height h of the cylinder of the salt cellar in terms of the radius R of the base.
2. Compute, in terms of R, the total surface of the salt cellar, which consists in the disc at the bottom, the hemisphere at the top, and the lateral surface of the cylinder.
3. Find the best possible value of R for which the surface is minimal.

Pair Work — Matching and talking

Try to associate each graph in the first row with the graph of the corresponding derivative on the second row. Explain your choices to your classmate.