CHAPITRE

5 Dérivation globale

Ressources du chapitre disponibles ici : www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

Tester les limites et trouver de nouvelles fonctions

Isaac Newton

Isaac Newton est un scientifique et philosophe britannique du XVIIe siècle. Célèbre pour ses travaux sur le mouvement et sur la gravitation (avec l'épisode de la fameuse pomme), il a également travaillé sur de nombreux sujets mathématiques comme les tangentes, les dérivées et les calculs infinitésimaux.

La construction de la notion de dérivation n'a pas été un long fleuve tranquille. L'Europe de la fin du XVIIe siècle a été le théâtre d'un affrontement scientifique entre deux écoles de pensée, d'un côté le monde anglais véhicule les « fluxions » de Newton tandis que le reste de l'Europe porte la pensée de Leibniz.

Voici comment, dans son ouvrage (1687), Newton exprime sa vision des dérivées :
« Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut. »

De quelles quantités parle Newton lorsqu'il cite les quantités ultimes ?
Après avoir justifié pourquoi, dans la formule du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ menant au nombre dérivé $f'(a)$, h ne peut être égal à 0, faire le lien entre la définition du nombre dérivé et la vision de Newton.

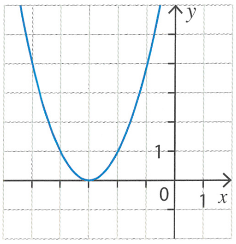
Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

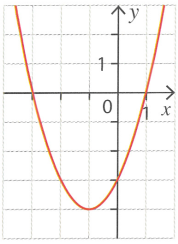
1 Signe d'une fonction

Associer chaque représentation graphique à son tableau de signes.

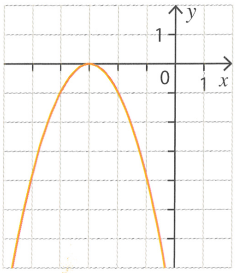
a.



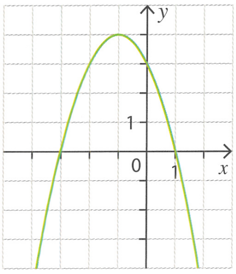
b.



c.



d.



1.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2 Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $5 - (3x + 1) \geqslant 0$ **2.** $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$

3. $\dfrac{-x^2 + 2x - 5}{2x - 3} \geqslant 0$

3 Opération sur les fonctions (1)

Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

1. Déterminer l'expression algébrique des fonctions suivantes.

a. $f = u + v$, $g = 3v$ et $h = uv$.

b. $m = \dfrac{u}{v}$ sur $]1\,;+\infty[$.

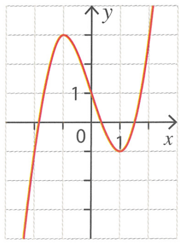
2. Déterminer la fonction $n = \sqrt{u}$ sur $[-0{,}5\,;+\infty[$.

4 Opération sur les fonctions (2)

Préciser si les expressions des fonctions suivantes sont écrites sous forme de somme, produit, quotient ou aucune de ces trois propositions.

- $f(x) = 5x\sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{x+2}{3x+5}$
- $h(x) = \sqrt{5x+4}$
- $m(x) = 5x^2 + 3x + 4$
- $n(x) = (4x+7)^3$
- $p(x) = (3-5x)(2+x)$
- $r(x) = -2\sqrt{x} + 3x$

5 Variation d'une fonction

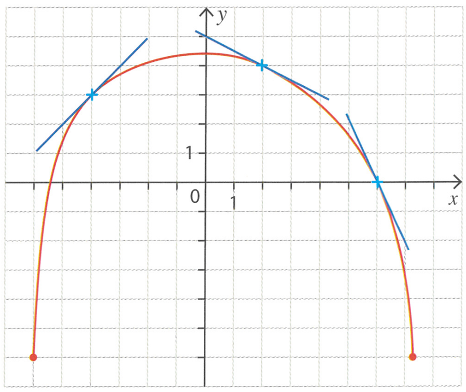


1. Dresser par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f représentée ci-dessus.

2. Sur l'intervalle $[-2\,;2]$, indiquer les extremums de la fonction f en précisant en quelle valeur de x ils sont atteints.

6 Image et nombre dérivé

La courbe de la fonction f ainsi que quelques-unes de ses tangentes sont représentées ci-dessous.



Lire la valeur des nombres $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(2)$, $f'(2)$, $f(6)$ et $f'(6)$.

Pour construire le cours

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Objectif
Découvrir la fonction dérivée.

Un solide est lâché sans vitesse initiale depuis une certaine altitude dans le référentiel terrestre. À chaque instant t exprimé en seconde, la distance parcourue par le solide est donnée par la fonction $d(t) = t^2$ exprimée en mètre.

1. Combien de mètres aura parcourus le solide après 10 s de chute ?
2. À l'aide du taux de variation $\frac{d(10+h)-d(10)}{h}$, calculer le nombre dérivé de d en 10, noté $d'(10)$.

   Ce nombre est également appelé **vitesse instantanée** du solide à l'instant $t = 10$. Cette vitesse est ici exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
3. En répartissant le travail dans la classe, recopier et compléter à l'aide du taux de variation, le tableau suivant.

t	10	15	20	25	30
$d'(t)$	20				

4. Conjecturer au vu des résultats précédents une expression de $d'(t)$ en fonction de t.
5. Démontrer la conjecture en s'appuyant sur le calcul de $\frac{d(t+h)-d(t)}{h}$.
6. Déterminer la vitesse instantanée du solide à l'instant $t = 100$.

Situation 2 Composer des fonctions

Objectif
Découvrir la composition $g(ax + b)$.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x + 5$ et la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = 5\sqrt{x} + 3$.

1. Donner une expression en fonction de x des fonctions $u + g$, $u \times g$ et $\frac{u}{g}$ définies sur $\mathbb{R}^+$.
2. **a.** Recopier le tableau suivant et le compléter lorsque cela est possible.

x $\longrightarrow$	$u(x)$ $\longrightarrow$	$g(u(x))$
10	25	$5 \times 5 + 3 = 28$
1		
-5		
5,5		
-3		
8		

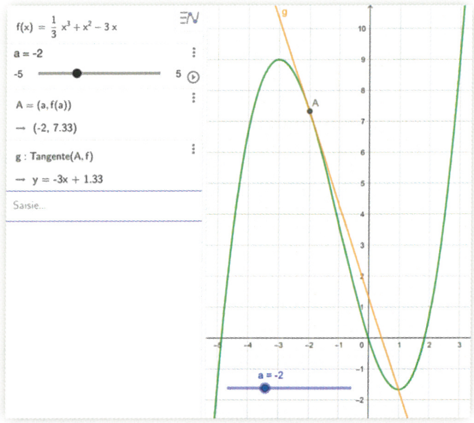
b. Deux cellules du tableau ne peuvent pas être complétées. Expliquer pourquoi.

c. Préciser l'ensemble de définition et l'expression de la fonction définie dans la colonne de droite du tableau.

Situation 3 Étudier les variations d'une fonction

Objectif
Découvrir le lien entre variation de f et signe de sa dérivée f'.

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-contre.
On note $A\,(a\,; f(a))$ un point mobile sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
Le réel a se modifie à l'aide du curseur du logiciel.
On a tracé la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



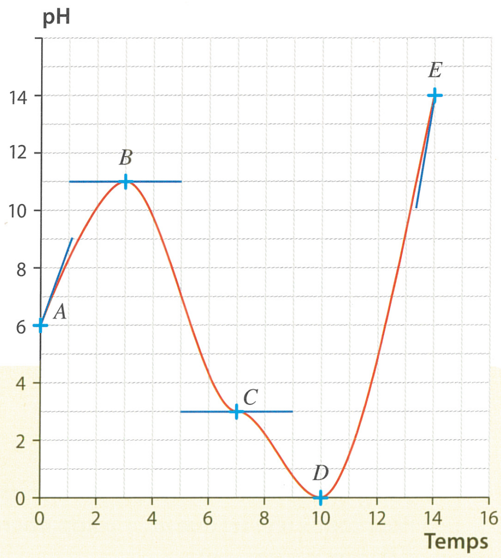
1. En faisant varier le curseur et en utilisant l'équation de la tangente de la fenêtre *Algèbre*, déterminer le lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variation de la fonction f.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Sur $]-\infty\,; -3]$	$f'(x)$ ... 0	f est ...
Sur $]-3\,; 1]$	$f'(x)$ ... 0	f est ...
Sur $[1\,; +\infty[$	$f'(x)$ ... 0	f est ...

Situation 4 Étudier l'évolution d'un pH

Objectif
Faire le lien entre dérivée et extremum.

Au cours d'une expérience de chimie, on a mis en contact deux réactifs et on a étudié l'évolution du pH au cours du temps.
On obtient la courbe ci-contre.
On note P la fonction représentée par cette courbe dont on a nommé cinq points particuliers.



1. Lire les coordonnées de ces points.
2. Lire les coefficients directeurs des tangentes à la courbe en chacun de ces points.
3. Lister les extremums de la fonction P.
4. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Le point ...	A	B	C	D	E
sur l'intervalle...	[0 ; 14]	[2 ; 5]	[6 ; 8]	[0 ; 14]	[0 ; 14]
correspond-il à un extremum ?	Non	...	...	...	...
$P'(t) = ...$	2	...	...	...	...

5. Peut-on conjecturer un lien entre présence d'extremum et le fait que la dérivée s'annule ?

Connaître le cours

1. Fonctions dérivables sur un intervalle

1. Définition de la dérivée d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **dérivable** sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$.
- On appelle **fonction dérivée** de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

2. Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue : $f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } x \in\ ]-\infty ; 0[\\ 1 \text{ pour } x \in\ ]0 ; +\infty[\end{cases}$

3. Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

DÉMO en ligne

DÉMO p. 150 et 151

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

2. Soit k un réel. La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

3. La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

4. Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

5. Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Théorème (admis) : Dérivée de la fonction $f : x \mapsto g(mx + p)$

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout x réel tel que $mx + p$ appartient à I, la fonction f définie par $f(x) = g(mx + p)$ est dérivable et $f'(x) = m \times g'(mx + p)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x + 8)^4$.

f est de la forme $f : x \mapsto g(mx + p)$ avec $g(x) = x^4$, $m = 5$ et $p = 8$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $g'(x) = 4x^3$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = m \times g'(mx + p) = 5 \times 4 \times (5x + 8)^3 = 20(5x + 8)^3 .$$

Exercice résolu 1 Étudier la dérivabilité d'une fonction

Soit a un nombre réel quelconque.
À l'aide du taux de variation, montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

Solution commentée

Pour étudier la dérivabilité de f en a, il faut tout d'abord s'intéresser au taux de variation de f en a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$

Lorsque h devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de $2a$ qui est un nombre fini.
La fonction est donc dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.

EXERCICE 9 p. 160

Exercice résolu 2 Déterminer la fonction dérivée

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = 3x+5$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^7$
4. $f(x) = \sqrt{2}$
5. $f(x) = -3+2x$

Solution commentée

1. f est une fonction affine $mx+p$ avec $m = 3$ donc $f'(x) = 3$.
2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $f'(x) = 7x^6$
4. f est une fonction constante donc $f'(x) = 0$.
5. f est une fonction affine $mx+p$ avec $m = 2$ donc $f'(x) = 2$.

EXERCICE 12 p. 160

Exercice résolu 3 Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une fonction

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 7x^2-5x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{3}{x}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x^2+5}$
4. $m : x \mapsto \sqrt{x}(6x^3-2)$

Solution commentée

1. f est la somme de deux fonctions $u : x \mapsto 7x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto -5x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u' + v'$.
$u'(x) = 7 \times 2x = 14x$ et $v'(x) = -5$, donc $f'(x) = 14x - 5$.

2. g est de la forme ku, avec $k = 3$ et $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = ku'(x) = 3\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-3}{x^2}$.

3. h est le quotient de deux fonctions $u : x \mapsto 3x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto 2x^2+5$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x, $v(x) \geqslant 5 > 0$, donc v ne s'annule pas. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
On en déduit :

$$h'(x) = \frac{3\times(2x^2+5)-(3x+1)\times 4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-(12x^2+4x)}{(2x^2+5)^2} = \frac{6x^2+15-12x^2-4x}{(2x^2+5)^2} = \frac{-6x^2-4x+15}{(2x^2+5)^2}.$$

4. m est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $v : x \mapsto 6x^3-2$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que m est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $m' = u'v + uv'$.
$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 18x^2$, donc $m'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(6x^3-2)+\sqrt{x}\times 18x^2 = \dfrac{3x^3-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\times 18x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{21x^3-1}{\sqrt{x}}$.

EXERCICE 2 p. 160

Connaître le cours

2. Variations et courbes représentatives des fonctions

1. Lien entre sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

2. Lien entre extremums et dérivation

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de l'intervalle.

- f admet un maximum en a sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le maximum vaut $f(a)$ et est atteint en a.

- f admet un minimum en a sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Le minimum vaut $f(a)$ et est atteint en a.

Remarque

Un extremum est un minimum ou un maximum.

DÉMO p. 151

Propriété

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I et qui n'est pas une borne de I.

Si la fonction f admet un extremum en a sur I alors $f'(a) = 0$.

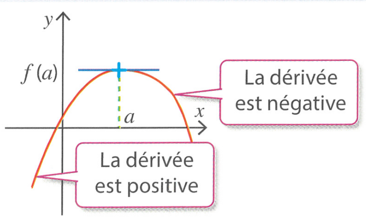
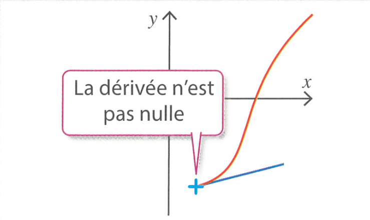
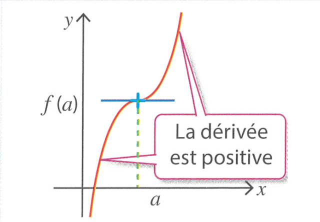
Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse.

Exemple

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$. Donc $f'(0) = 0$. Mais f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

f admet un extremum : $f'(a) = 0$.	f admet un extremum en une borne de l'intervalle. f' peut ne jamais s'annuler.	$f'(a) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum.
		

Exercice résolu 1 Étudier les variations d'une fonction

On donne la fonction f définie sur [– 3 ; 3] par $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f et étudier son signe.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. En déduire les extremums de la fonction et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Solution commentée

1. La dérivée de la fonction f a pour expression $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$.
$f'(x)$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = -2$; pour étudier son signe, on cherche les racines.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$.
a étant positif, on en déduit que f' est négative entre les racines, donc sur $\left[-\frac{1}{2} ; 2\right]$, et positive à l'extérieur des racines.

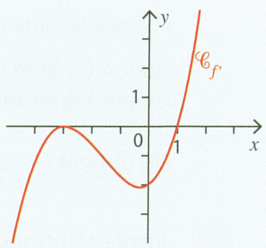
2. On utilise ensuite le théorème qui lie le signe de la dérivée aux variations de la fonction et on obtient le tableau ci-contre.

x	-3		$-\frac{1}{2}$		2		3
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variation de f	$-\frac{49}{2}$	↗	$\frac{37}{24}$	↘	$-\frac{11}{3}$	↗	$-\frac{1}{2}$

3. D'après le tableau de variation, le minimum de f est $\frac{-49}{2}$ atteint pour $x = -3$ (ici –3 est une borne de l'intervalle, on a un extremum sans dérivée nulle) et le maximum de f est $\frac{37}{24}$ atteint pour $x = \frac{-1}{2}$.

EXERCICE 30 p. 162

Exercice résolu 2 Utiliser la courbe représentative de f'



On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction f admet des extremums.

Solution commentée

Graphiquement, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont -3 et 1.
On dresse le tableau de variation de la fonction f :
f' s'annule et change de signe en 1.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–	0	–	0	+	
Variation de f		↘		↘		↗	

f admet un minimum atteint en 1 et en –3, la dérivée s'annule sans changer de signe.
Les renseignements dont on dispose ne permettent pas de connaître la valeur du minimum.

EXERCICE 32 p. 163

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

> Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
> La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration

On considère la fonction $f = u \times v$.
Soit x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I.

Le taux de variation de f en x_0 s'écrit $T(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

On remplace l'expression de f en fonction de u et v :

$$T(h) = \frac{u(x_0+h) \times v(x_0+h) - u(x_0) \times v(x_0)}{h}$$

Soit
$$T(h) = \frac{u(x_0+h) \times v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0) \times v(x_0)}{h} \qquad (1)$$

$$T(h) = v(x_0+h) \times \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + u(x_0) \times \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \qquad (2)$$

Lorsque h tend vers 0, on a :

- $\dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$ tend vers $u'(x_0)$;
- $\dfrac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}$ tend vers $v'(x_0)$;
- on admet que $v(x_0+h)$ tend vers $v(x_0)$.

Donc $T(h)$ tend vers $v(x_0) \times u'(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$. (3)
On peut donc dire que f est dérivable en x_0 et que l'on a :

$$f'(x_0) = v(x_0) \times u'(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0). \qquad (4)$$

On obtient $f' = u'v + uv'$. (5)

1. Justifier l'introduction de l'expression en rouge ligne (1).
2. Expliquer la réorganisation du calcul de la ligne (2).
3. Justifier la ligne (3).
4. Justifier le passage de l'écriture du nombre dérivé en x_0 en ligne (4) à l'égalité entre fonctions de la ligne (5).

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I.
> Si la fonction f admet un extremum en a sur I alors $f'(a) = 0$.

En utilisant les indications suivantes, démontrer cette propriété dans le cas où $f(a)$ est un maximum de f sur I.

- Rappeler ce que signifie : « $f(a)$ est un maximum de f sur I. »
- Rappeler la formule du taux de variation de f en a.

En déduire, si $h > 0$, le signe du taux de variation de f en a.
Que peut-on en déduire sur le signe de $f'(a)$ dans ce cas ?
Déterminer, lorsque $h < 0$, le signe du taux de variation de f en a.
Que peut-on en déduire sur le signe de $f'(a)$ dans ce cas ?
Quelle est alors la seule valeur possible de $f'(a)$?

- À l'aide d'un contre-exemple, expliquer pourquoi a ne doit pas être une borne de l'intervalle I.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
> Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

En utilisant les indications suivantes, démontrer cette propriété.

- Poser $f = \frac{1}{u}$ et considérer x_0, un élément de I.
- Écrire le taux de variation de la fonction u en x_0.
- Écrire le taux de variation de la fonction f en x_0.
- Vérifier que ce taux de variation peut s'écrire :

$$-\frac{1}{u(x_0+h)u(x_0)} \times \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}.$$

- En déduire la limite de ce taux de variation lorsque h tend vers 0 et retrouver ainsi le résultat de cours. On admettra que $u(x_0 + h)$ tend vers $u(x_0)$ lorsque h tend vers 0.

Utiliser différents raisonnements

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ et est impaire si $f(-x) = -f(x)$.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en démontrant la réponse.

Si f' n'est pas paire, alors f n'est pas impaire.

> **Raisonner par contraposée**
> Démontrer une implication $A \Rightarrow B$ est équivalent à démontrer que non $B \Rightarrow$ non A.

Apprendre par le texte & la vidéo

7 VIDÉOS DE COURS

Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, n nombre entier	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } x < 0 \\ 1 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

Opérations et dérivation

Si f s'écrit…	alors f' s'écrit…
$u + v$	$u' + v'$
$k \times u$ où k est une constante	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f(x) = g(mx + p)$	$f'(x) = m \times g'(mx + p)$

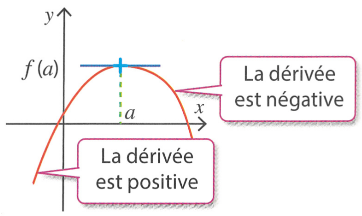
Signe de la dérivée et variation de f

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

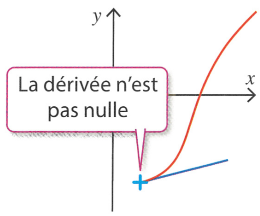
- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Extremums

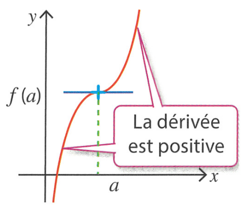
- f admet un extremum en a : $f'(a) = 0$.



- L'extremum est atteint en une borne de l'intervalle : la dérivée peut ne jamais s'annuler.



- $f'(a) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum.



Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 6 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 Donner l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes.
1. $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.
2. $g(x) = x^8$ pour tout x réel.
3. $h(x) = -3x + 5$ pour tout x réel.
4. $i(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

2 Donner l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes.
1. $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x > 0$.
2. $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + x - 4$ pour tout x réel.
3. $h(x) = \dfrac{2x+3}{5x-3}$ pour tout x différent de 0,6.
4. $i(x) = \sqrt{2x+8}$ pour $x > -4$.

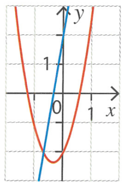
3 Recopier et compléter les tableaux suivants.

x	-10		-1		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Variation de f											

4

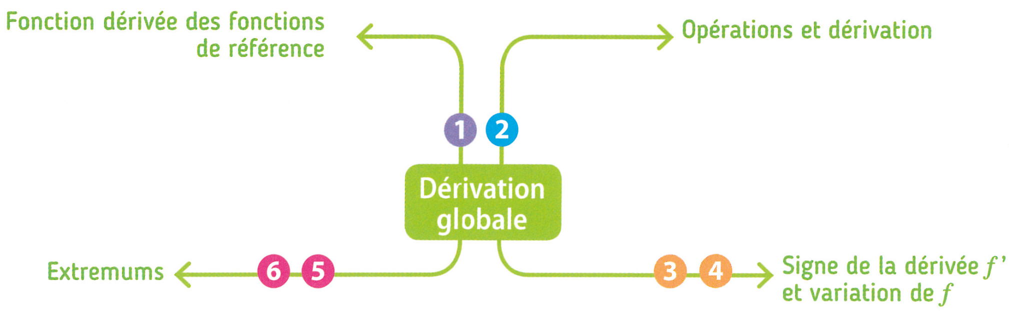


Ces courbes représentent deux fonctions. L'une d'elles est la dérivée de l'autre. Laquelle ?

5 Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse en utilisant les fonctions dérivées.
1. Le maximum de la fonction $f(x) = x^2$ quand x est compris entre -5 et 3 est atteint en $x = 3$.
2. La fonction $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ présente un minimum sur $]-2\,;+\infty[$.
3. Une fonction h présente un extremum en a si et seulement si $h'(a) = 0$.

6 On considère la fonction f définie sur $[-2\,;2]$ par :
$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 1.$$
1. Donner l'expression de f'.
2. Dresser le tableau de signes de f' sur $[-2\,;2]$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $[-2\,;2]$.
4. Lister les extremums de f.

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP 1 Allure d'une courbe

Objectif
Tracer une courbe avec Python.

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = x^3$.
On veut écrire un algorithme qui construit point par point l'allure de la courbe de la fonction dérivée de la fonction f, à l'aide de son taux de variation. Pour cela, on approxime les valeurs de $f'(a)$ par le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ en a, calculé avec une valeur de h assez petite.

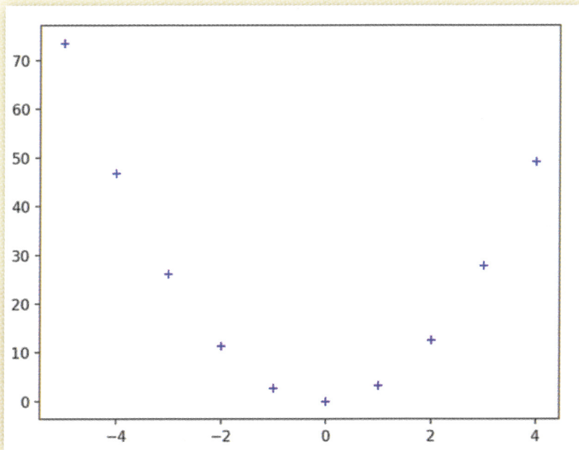
1. On définit une fonction taux_variation qui prend en arguments une fonction f, a et h et renvoie la valeur approchée du taux de variation de f en a.
Compléter la fonction suivante.

```python
def taux_variation(f,a,h):
    return ...
```

2. On considère la fonction suivante.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
def appro_derivee(f,xmin,xmax,p,h):
    a=xmin
    LX=[]
    LY=[]
    while a<xmax:
        LX.append(a)
        LY.append(taux_variation(f,a,h))
        a=a+p
    plt.plot(LX,LY,"b+")
    plt.show()
```

a. Quel est le rôle du nombre p dans cette fonction ?
b. Que contient la liste LY lorsque la boucle s'arrête ?
c. Programmer cette fonction et retrouver le graphique ci-dessous.



d. Quelle est l'expression de la fonction dérivée de f ?
e. En donnant différentes valeurs à p et à h, retrouver l'allure de la courbe de la fonction dérivée de la fonction $f(x) = x^3$.

3. Tester le programme précédent afin d'obtenir une allure de la courbe de la dérivée des fonctions :

$$g : x \mapsto x^3 - 7x \text{ sur } \mathbb{R} ;$$
$$h : x \mapsto \sqrt{4x+1} \text{ sur } \left]-\frac{1}{4} ; +\infty\right[.$$

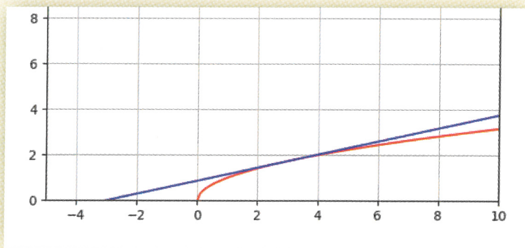
TP 2 Tangente à une courbe

Objectif
Déterminer la solution d'une équation.

On considère la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On cherche à obtenir l'abscisse x_0 du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1 On considère le cas $a = 3$.

On a tracé ci-dessous, à l'aide du programme en Python ci-contre, la courbe de la fonction racine carrée ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.




```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import sqrt

def f(x):
    return(sqrt(x))

def derivee_f(x):
    return(1/(2*sqrt(x)))

def trace_racine_carre(xmin,xmax):
    LX=np.linspace(xmin,xmax,100)
    LY=np.sqrt(LX)
    plt.plot(LX,LY,"r-")

def trace_tangente(f,a):
    LX=np.linspace(-10,10,100)
    LY=((derivee_f(a))*(LX-a)+f(a))
    plt.plot(LX,LY,"b-")

plt.axis([-5,10,0,15])
plt.grid()
trace_racine_carre(0,10)
trace_tangente(f,3)
plt.show()
```

a. À quoi sert la fonction derivee_f(x) ?

b. Retrouver dans la fonction trace_tangente(f,a) l'instruction qui détermine l'équation de la tangente en a.

c. Conjecturer la valeur de l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

2 À l'aide du programme en Python, tracer les tangentes aux points d'abscisse a puis recopier et compléter le tableau suivant par lecture graphique.

a	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
x_0									

a. Quelle conjecture peut-on émettre à partir des résultats de ce tableau ?

b. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- L=[] crée une liste vide.
- L.append(objet) ajoute objet à la fin de la liste L.
- Pour tracer le graphique :

`import matplotlib.pyplot as plt` importe la bibliothèque matplotlib.pyplot ;
`import numpy as np` importe la bibliothèque numpy qui permet d'utiliser l'instruction linspace.

`np.linspace(a,b,nbrepoints)` crée un nombre de points entre a et b.

`plt.plot(X,Y,'b+')` crée un nuage de points où les abscisses sont dans la liste X et les ordonnées dans la liste Y. "b+" indique que les points tracés seront des croix bleues.

`plt.show()` ouvre la fenêtre et affiche la courbe.

`plt.grid()` affiche une grille dans un repère.

TP 3 Mesurer un taux de CO_2 TABLEUR

Objectif
Déterminer un extremum.

Un examen médical consiste à mesurer la quantité de CO_2 expirée au cours du temps (en s) d'une personne pendant un effort. Elle est mesurée en mmhg (le millimètre de mercure).
En soumettant un individu au test d'effort, on obtient, grâce à des capteurs, le tableau de résultats suivant.

t (en s)	0	5	10	15	18	23	28	35
Quantité de CO_2 (en mmhg)	5	21,875	33	39,125	40,712	40,397	37,032	28,625

On souhaite déterminer à quel moment la quantité de CO_2 expirée a été maximum.

1. Saisir ce tableau dans un tableur et tracer un graphique (nuage de points).
2. Faire afficher la courbe de tendance polynomiale de degré 3.
3. Donner l'expression de la dérivée de la fonction $f(x) = 001x^3 - 0{,}13x^2 + 4x + 5$ lorsque $x \in [0 ; 35]$.
4. Déterminer le signe de cette dérivée sur $[0 ; 35]$.
5. En déduire le sens de variation de f.
6. Déterminer le moment où le volume en CO_2 expiré a été le plus important.

TP 4 Souffler du verre LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Utiliser un calcul formel pour étudier un extremum.

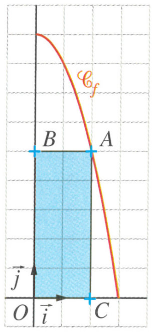
Un souffleur de verre fabrique des vases.
Le coût total journalier de production de x vases, en euro, est donné par :
$C(x) = x^3 - 18x^2 + 124x + 200$ pour $x \in [0 ; 14]$.
Le coût moyen de production d'un objet est donné par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour $x \in [0 ; 14]$.
On souhaite déterminer quelle quantité d'objets l'artisan doit produire pour que le coût moyen soit minimal.

1. Saisir la fonction C_m dans le calcul formel d'un logiciel de géométrie.
2. Donner à l'aide du logiciel la forme factorisée de la fonction dérivée C_m'.
3. Dresser le tableau de signes de C_m'.
4. En déduire le tableau de variation de C_m.
5. Quelle quantité d'objets l'artisan doit produire pour que le coût moyen soit minimal ?

TP 5 Aire maximale LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Modéliser une situation géométrique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on a représenté ci-contre la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(x) = 9 - x^2$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
A est un point mobile sur $\mathscr{C}_f$, C et B sont des points respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tels que $OCAB$ soit un rectangle.
On veut déterminer où placer le point A pour que le rectangle $OCAB$ ait une aire maximale.

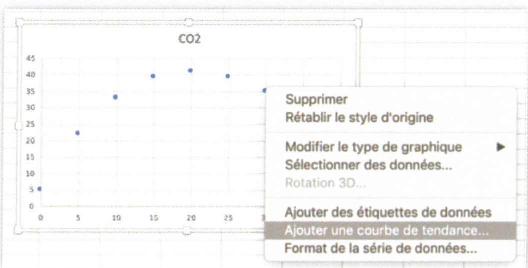


1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie puis conjecturer le résultat.
   On note x l'abscisse du point A.
2. Dans quel intervalle varie x ?
3. On note $g(x)$ l'aire du rectangle $OCAB$. Quelle est l'expression de $g(x)$?
4. Tracer la courbe représentative de g.
   Quel semble être le maximum de g et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
5. Montrer que $g'(x) = -3x^2 + 9$ et étudier les variations de la fonction g.
6. Retrouve-t-on les résultats de la question 1 ?
7. Conclure.

Boîte à outils

Tableur

- Pour tracer un diagramme en nuage de points, sélectionner toutes les données puis trouver dans le menu *Insérer* l'option *Nuage de points*.
- Pour obtenir une courbe de tendance, un clic droit sur un des points obtenus à l'écran ouvre un menu dans lequel il suffit de faire le choix du type de fonction.



Logiciel de géométrie option calcul formel

- Écrire, dans la zone de saisie du logiciel, l'expression de la fonction C_m et faire afficher la zone de calcul formel (dans *Affichage*).
- Pour dériver la fonction et factoriser le résultat, écrire dans la zone de saisie du calcul formel :