Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Calculer :

a. $4-\frac{1}{4}$ b. $5-\frac{1}{3}$

c. $-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ d. $-\frac{4}{7}-\frac{2}{14}$

e. $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$ f. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

g. $\frac{5}{14}-\frac{10}{21}$ h. $-\frac{4}{7}-\frac{1}{3}$

2 On considère la droite d d'équation :

$$d : y = -3x + 4.$$

Déterminer si les points suivants appartiennent à d.

a. $A(1\,;1)$ b. $B(0\,;4)$

c. $C(4\,;-9)$ d. $D(-2\,;11)$

e. $E(-1\,;7)$ f. $F\left(\frac{2}{3}\,;2\right)$

3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

Calculer :

a. $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ b. $\dfrac{f(5)-f(0)}{5}$

c. $\dfrac{f(-1)-f(2)}{-1-2}$

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}.$$

• Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(4)$.

5 Simplifier les expressions suivantes.

a. $\dfrac{h^2-4h}{h}$ b. $\dfrac{3h}{h}$

c. $\dfrac{(1+h)(1-h)}{1-h}$ d. $\dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

6 Développer et simplifier les expressions suivantes.

a. $(1+h)^2 - 2h$

b. $(2+h)^2 - 4 - h^2$

c. $(3-h)^2 - (3+h)^2$

d. $h(1+h) - h(1-h)$

7 1. Lorsque h est un nombre très proche de 2, de quel nombre le nombre $3 + h$ est-il proche ?

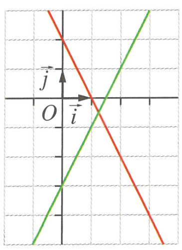
2. Lorsque h est un nombre très proche de 1, de quel nombre le nombre $-1 + h$ est-il proche ?

3. Lorsque h est un nombre très proche de 0, de quel nombre le nombre $\sqrt{h}$ est-il proche ?

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

8 Déterminer par lecture graphique l'équation des deux droites tracées ci-dessous.



9 On considère une fonction f telle que $f(3) = 1$ et $f'(3) = -2$.

• Quelle est l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 3 ?

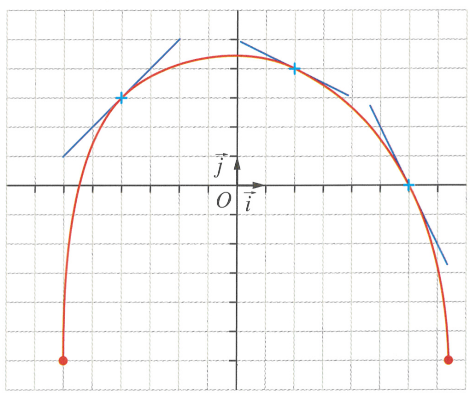
10 VRAI OU FAUX

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $f'(2) = 0$, alors la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est verticale.

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 0.

11 La courbe représentative de la fonction f ainsi que trois de ses tangentes sont représentées ci-dessous.



• Déterminer graphiquement la valeur des nombres $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(2)$, $f'(2)$, $f(6)$ et $f'(6)$.

12 Un automobiliste a parcouru 60 km en trois quarts d'heure.

• Quelle a été sa vitesse moyenne sur ce trajet (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) ? Est-ce qu'à un moment donné du trajet, cet automobiliste a pu rouler à 88 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si une fonction f est telle que $f(1) = -4$ et $f(3) = 2$, alors la fonction f est croissante sur $[1 ; 3]$.

2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ au point A d'abscisse 1 est $y = 3x + 1$.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

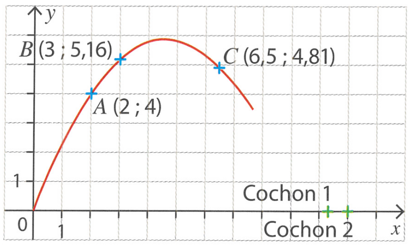
Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Dans un jeu sur smartphone, le joueur utilise un lance-pierre pour lancer des oiseaux sur des cochons verts. Chaque oiseau lancé suit une trajectoire parabolique et a le pouvoir d'accélérer en ligne droite (tangente à la parabole) dès que le joueur tape sur l'écran.
Deux cochons sont situés dans un jardin et ont pour coordonnées $(10{,}29 ; 0)$ et $(10{,}95 ; 0)$.



- L'oiseau lancé sur l'écran ci-contre atteindra-t-il un cochon lorsque le joueur appuie sur l'écran au niveau du point C ?

Exposé

voir p. 110

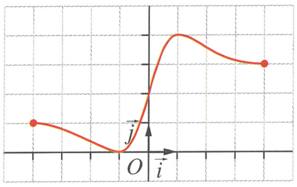
Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Effectuer des recherches sur les notions de cercle osculateur et de rayon de courbure.
Expliquer pourquoi la tangente à une courbe définie dans ce chapitre correspond à celle définie par Euclide dans *Les Éléments*, livre III.

Exercices

Taux de variation

1 On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ représentée ci-dessous.



1. Sans les déterminer, justifier le signe des taux de variation de f :
a. entre -4 et -3 ;
b. entre 0 et 1 ;
c. entre 2 et 3 ;
d. entre 0 et 3.
2. Comparer, avec la précision permise par le graphique, le taux de variation de f entre -4 et -3 à celui de f entre -2 et -1.

2 **1.** Calculer le taux de variation de la fonction cube entre 0 et 1 puis entre 1 et 3.
2. Calculer le taux de variation de la fonction inverse entre 0,1 et 1 puis entre 1 et 10.

3 **Évolution démographique**
Le tableau ci-dessous donne les populations de Bordeaux et de Toulouse lors de trois recensements.

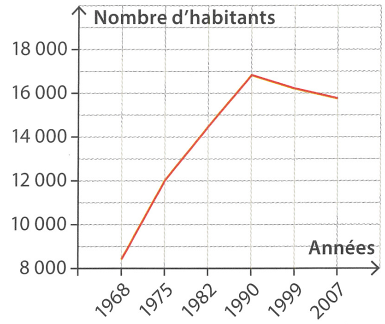
	1968	1982	2014
Bordeaux	266 662	208 159	246 586
Toulouse	370 796	347 995	466 297

1. Calculer le taux de variation de la population de chaque ville entre 1968 et 1982, puis entre 1982 et 2014 (en habitant par an).
2. Calculer le taux d'évolution en pourcentage de la population de chaque ville entre 1968 et 1982, puis entre 1982 et 2014.
3. Donner une interprétation concrète de ces résultats.

4 **1.** Sans calculer, donner le taux de variation entre $-1{,}45$ et π de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x + 12$. Justifier.
2. Calculer le taux de variation de la fonction carré entre 10 et 20 puis, sans calculer, donner son taux de variation entre -20 et -10. Justifier.

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 3x - 11.$$
1. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 0 et 4.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre -3 et 0.
3. Peut-on en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$? Justifier.

6 **Population de Floirac**
Le graphique ci-dessous concerne la population de la ville de Floirac en Gironde de 1968 à 2007. Cette population était de 15 794 habitants en 2007, 16 156 en 1999, 16 384 en 1990, 14 477 en 1982, 12 040 en 1975 et 8 241 en 1968.



1. Déterminer graphiquement la période pendant laquelle l'évolution de la population est la plus rapide. Justifier.
2. Calculer le taux de variation de la population de Floirac entre 1968 et 1990 (en habitant par an), entre 1990 et 2007, puis entre 1968 et 2007. Conclure.

Nombre dérivé

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 5x^2 - x + 7.$$
1. Soit h un réel non nul. Donner l'expression du taux de variation de f entre 1 et $1 + h$.
2. Que devient ce taux quand h tend vers 0 ?
3. En déduire la valeur de $f'(1)$.

8 **1.** Déterminer le taux de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3$ entre 2 et $2 + h$, h étant un réel non nul. En déduire le nombre dérivé de f en 2.
2. Déterminer le taux de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ entre -2 et $-2 + h$.
En déduire le nombre dérivé de g en -2.

9 **Calculer**
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé de f en a.
1. $f : x \mapsto 3{,}7x - 5$ $\quad a = 5$
2. $f : x \mapsto x^2 + x - 1$ $\quad a = -1$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2}{2x+5}$ $\quad a = 0$
4. $f : x \mapsto (x - 3)(x + 1)$ $\quad a = 3$

10 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé de f en a.
1. $f : x \mapsto x^2 + 3x + 7$ $\quad a = 2$
2. $f : x \mapsto -x^2 + 6$ $\quad a = 10$
3. $f : x \mapsto x(x - 3)$ $\quad a = 0$
4. $f : x \mapsto 2(x + 1)^2 + 2$ $\quad a = -1$

11 **Vitesse moyenne et instantanée**

Un véhicule roule en ligne droite. La distance $d(t)$ (exprimée en mètre) parcourue par le véhicule en fonction du temps est donnée par la formule $d(t) = 2t^2 + t$, où t est exprimé en seconde.

1. Quelle distance le véhicule a-t-il parcourue à l'instant $t = 10$?
2. Pour $h \neq 0$, calculer la vitesse moyenne du véhicule entre les instants 10 et $10 + h$.
3. En utilisant le dernier calcul, déterminer la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 10$.
4. Reprendre ces questions pour l'instant $t = 5$.

12 ALGO PYTHON

On considère une fonction mystère écrite en Python.

```
def fonction_mystere(a):
    for i in range(1,11):
        h=10**-i
        t=((a+h)**2-a**2)/h
    return t
```

1. Recopier et compléter les lignes du tableau suivant contenant toutes les valeurs des variables lors de l'écriture dans la console de l'instruction fonction_mystere(3).

a	i	h	t
3	1	0,1	6,1
3	2		
…			

2. Que représente la valeur renvoyée par cette fonction mystère ?

13 1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 2$ est dérivable en 1.

2. Montrer que, pour tout réel a, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 2$ est dérivable en a.

14 QCM

On donne ci-dessous deux copies d'écran issues d'un logiciel de calcul formel.

▸ Algèbre	▸ Calcul formel	
• $f(x) = x^2 - x + 2$	1	Simplifier(f(1+h)) $\rightarrow h^2 + h + 2$

▸ Algèbre	▸ Calcul formel	
• $g(t) = \frac{t}{t-5}$	1	(g(6+h)-g(6))/h $\rightarrow -\frac{5}{h+1}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 2$.
La valeur de $f'(1)$ est :
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

2. Soit g la fonction définie par $g(t) = \frac{t}{t-5}$.
La valeur de $g'(6)$ est :
(a) -5 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) $-\frac{5}{7}$ (d) 6

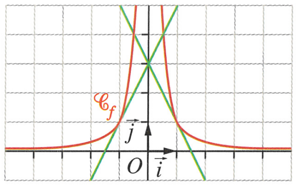
15 **Coût de fabrication**

Une entreprise fabrique des billes pour roulements à billes. Le coût de fabrication de x billes (x exprimé en centaine) est modélisé à l'aide de la fonction C définie sur $[0 ; +\infty[$ par $C(x) = 0{,}5x^2 + x + 1$, où $C(x)$ est exprimé en centaine d'euros.

1. Calculer le prix de fabrication de 1 000 billes.
2. Calculer le coût de fabrication de la 1 001e bille (coût marginal pour 1 000 billes fabriquées).
3. Calculer le nombre dérivé de la fonction C en 1 000. Comparer au résultat précédent.
4. Reprendre les questions précédentes pour 500 billes fabriquées.

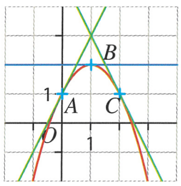
Tangente à une courbe

16 $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. En vert, on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse -1 et 1.



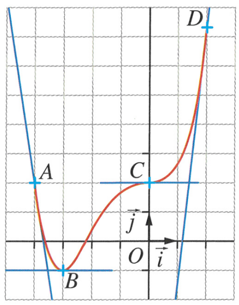
• À l'aide du graphique, donner le nombre dérivé de f en 1 puis en -1.

17 La courbe d'une fonction f et trois de ses tangentes ont été tracées aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

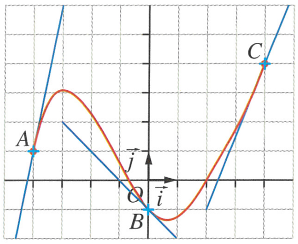


• Lire les nombres dérivés de f en 0, en 1 et en 2.

18 Déterminer graphiquement les nombres dérivés de la fonction f représentée ci-contre qui se déduisent des tangentes tracées sur le graphique.



19 La courbe de la fonction g définie sur $[-4 ; 4]$ ainsi que trois de ses tangentes sont représentées ci-dessous.



- Lire la valeur des nombres $g(-4)$, $g'(-4)$, $g(0)$, $g'(0)$, $g(4)$ et $g'(4)$.

20 On considère une fonction f définie sur $[-4 ; 6]$.
- En utilisant les données du tableau ci-dessous, tracer une allure possible pour la courbe représentative de f.

x	-4	-1	1	$3{,}5$	6
$f(x)$	0	2	0	-2	-1
$f'(x)$	1	0	-2	0	1

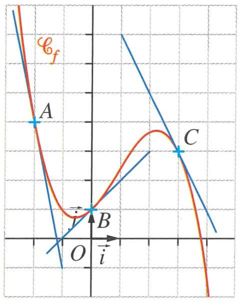
21 On considère une fonction f définie sur $[0 ; 10]$.
- En utilisant les données du tableau ci-dessous, tracer une allure possible pour la courbe représentative de f.

x	0	1	3	5,5	10
$f(x)$	2	3,5	4,5	3	4
$f'(x)$	2	1	0	-1	1

22 CALCULATRICE
Calculer
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 5x^2 - 7x.$$
1. Soit h un réel non nul.
Montrer que le taux de variation de la fonction g entre 1 et $1 + h$ est égal à $3 + 5h$. En déduire $g'(1)$.
2. Reprendre la même démarche pour calculer $g'(-1)$.
3. Déduire des réponses aux questions 1 et 2 les équations des tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ à la courbe représentative de g aux points A et A' d'abscisses respectives 1 et -1.
4. Vérifier en traçant la courbe et les deux tangentes à l'aide de la calculatrice.

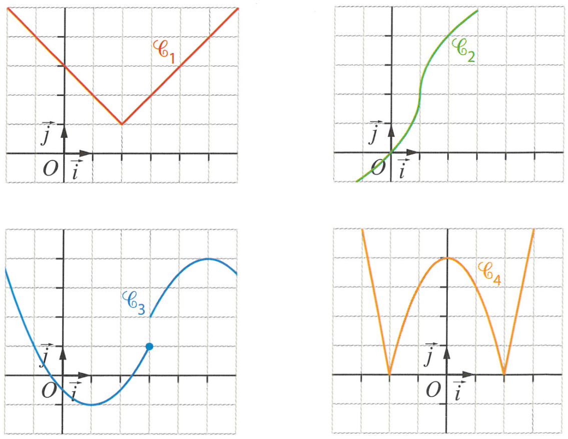
23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 2x - 1.$$
On admet que $f'(1) = 0$, $f'(0) = -2$ et $f'(3) = 4$.
1. Dans un repère orthonormé, construire les tangentes à la courbe au point d'abscisse 1, au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 3.
2. Déterminer graphiquement les équations des tangentes aux points d'abscisse 1 et 0.
3. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.
4. Tracer la courbe représentative de f en s'aidant des tangentes.

24 On considère la fonction f dont on donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ ci-dessous ainsi que ses tangentes aux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses -2, 0 et 3.

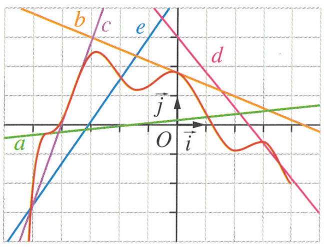


1. Donner par lecture graphique les valeurs de $f(-2)$, $f'(-2)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$ et $f'(3)$.
2. À l'aide des valeurs obtenues, donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -2.
3. Même question au point B d'abscisse 0 et au point C d'abscisse 3.
4. Déterminer le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A et B.

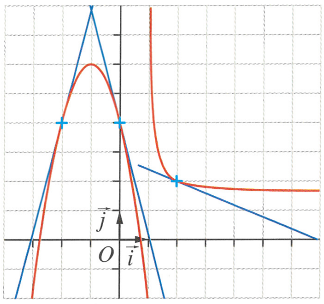
25 **Communiquer**
On donne ci-dessous les représentations graphiques $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ de quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.
Pour chacune de ces fonctions, il existe au moins un réel a en lequel la fonction n'est pas dérivable.
- Préciser chacune de ces valeurs à l'aide des graphiques en justifiant la réponse.



26 Parmi les droites tracées ci-dessous, quelles sont celles qui semblent être des tangentes à la courbe tracée en rouge ? Si cela semble être le cas, préciser en quel point.

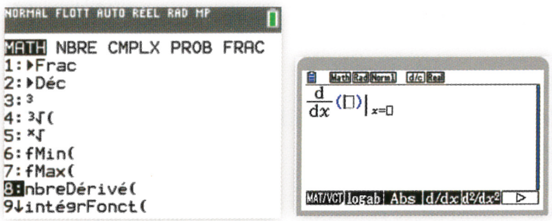


27 On considère la fonction g définie sur $]-3\,;1[\cup]1\,;7[$ dont on donne la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ ci-dessous et les tangentes aux points de la courbe d'abscisses –2, 0 et 2.



1. Donner par lecture graphique les valeurs de $g(-2)$, $g'(-2)$, $g(0)$, $g'(0)$, $g(2)$ et $g'(2)$.
2. À l'aide des valeurs obtenues, donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse –2.
3. Même question pour les tangentes au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 3.

28 CALCULATRICE
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^2 - 3.$$
1. Obtenir, à l'aide de la commande de la calculatrice ci-dessous, une conjecture du nombre dérivé de f en 1.



2. En admettant que le résultat précédent est bien la valeur exacte de $f'(1)$, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
3. Visualiser à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f et sa tangente au point d'abscisse 1. Vérifier la cohérence avec la réponse précédente.

29 CALCULATRICE
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
1. Déterminer la valeur de $f'(-1)$ à l'aide de la commande donnant le nombre dérivé de la calculatrice.
2. En admettant que le résultat précédent est bien la valeur exacte de $f'(-1)$, vérifier que la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse –1 a pour équation réduite $y = -5x - 1$.
3. Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$.
4. En déduire la position relative de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{C}$.
5. Vérifier la réponse précédente en traçant la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran de la calculatrice.

30 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$
On admet que $f'(2) = 10$.
1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
2. Le point $S\,(5\,;37)$ appartient-il à cette droite ?

31 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{3}{x^2+1}.$$
On admet que $f'(-1) = \frac{3}{2}$.
1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative au point A d'abscisse –1.
2. Le point $K\,(1\,;2)$ appartient-il à cette droite ?

32 La fonction f est définie sur $[-8\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x+8}.$$
On admet que $f'(1) = \frac{1}{6}$.
1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative au point A d'abscisse 1.
2. Le point $K\,(4\,;4)$ appartient-il à cette droite ?

33 **Calculer**
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1.$$
1. Soit h un réel non nul. Montrer que le taux de variation de la fonction f entre 2 et $2 + h$ est égal à $-5 - 2h$. En déduire $f'(2)$.
2. Reprendre la même démarche pour calculer $f'(-3)$.
3. Déduire des réponses aux questions **1** et **2** les équations réduites des tangentes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ à la courbe représentative de f aux points A et A' d'abscisses respectives 2 et –3.
4. Vérifier en traçant la courbe et les deux tangentes à l'aide de la calculatrice.
5. À quelle tangente le point B de coordonnées (5 ; 92) appartient-il ?

34 On admet l'existence d'une fonction f telle que $f(0) = 1$ et telle que, pour tout réel x, f soit dérivable avec $f'(x) = f(x)$.
1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0.
2. En déduire une valeur approchée de $f(0{,}1)$.
3. Comment pourrait-on procéder pour déterminer une valeur approchée de $f(0{,}2)$?

35 PRISE D'INITIATIVE
Raisonner
Dans un repère, la distance parcourue par un mobile, en mètre, est donnée par la formule $d(t) = 0{,}5t^2 + 4t + 6$, où t est le temps exprimé en seconde.
• Calculer la vitesse instantanée du mobile à $t = 10$ s.

MODERATO

Exercices

36 Déterminer le taux de variation des fonctions suivantes entre a et b.

1. $f : x \mapsto 13{,}4x + 22{,}1$ $a = 6{,}23$ $b = 11{,}2$
2. $f : x \mapsto 8x^2 + 2x + 12$ $a = 0{,}5$ $b = 2$
3. $f : x \mapsto -(x+7)(x-4)$ $a = -7$ $b = 4$
4. $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 1$ $a = 2$ $b = 3$

37 Calculer le taux de variation des fonctions suivantes entre a et b.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x-5}{x-1}$ $a = 4$ $b = 6$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+1}$ $a = -7$ $b = -3$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x-2}$ $a = 7$ $b = 7{,}5$

38 Calculer le taux de variation des fonctions suivantes entre a et b.

1. $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ $a = 5$ $b = 8$
2. $f : x \mapsto \sqrt{2x+2}$ $a = 0$ $b = 8$
3. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2-1}$ $a = -5$ $b = -1$

39 Calculer le taux de variation des fonctions suivantes entre a et b.

1. $f : x \mapsto |x| + 2$ $a = 0$ $b = 6$
2. $f : x \mapsto |x-3|$ $a = -1$ $b = 3$
3. $f : x \mapsto 2|x| + x$ $a = -5$ $b = -1$
4. $f : x \mapsto x^2 - 3|x-2|$ $a = -2$ $b = 2$

40 Déterminer le nombre dérivé en a des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 23{,}2x - 14{,}99$ $a = 52$
2. $f : x \mapsto x^2 - 5$ $a = 1$
3. $f : x \mapsto 3(x-5)(x+2)$ $a = 5$
4. $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ $a = 0$

41 Déterminer le nombre dérivé en a des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{7}$ $a = -2$
2. $f : x \mapsto 150x^2 - 25x + 520$ $a = \dfrac{1}{5}$
3. $f : x \mapsto 0{,}01x^2 + 24{,}5$ $a = 5$
4. $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ $a = 0$

42 Déterminer le nombre dérivé en a des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$ $a = 0$
2. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ $a = 1$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-3}$ $a = -1$

43 Déterminer le nombre dérivé en a des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{4+2x}{x-3}$ $a = 0$
2. $f : x \mapsto \dfrac{3+x}{x}$ $a = 1$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2+3x}{2+x}$ $a = -1$

44 CALCULATRICE

Raisonner

1. En admettant que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet en tout réel a un nombre dérivé égal à $3a^2$, déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à sa courbe représentative $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
2. En déduire un moyen simple d'obtenir rapidement une valeur approchée de $0{,}97^3$ et de $1{,}02^3$. Effectuer ces calculs puis comparer les résultats obtenus à ceux donnés par une calculatrice.

45 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 10.$$

1. Montrer que $f'(5) = 9$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 5.
3. Le point R de coordonnées $(100\,;-905)$ appartient-il à cette tangente ?

46 **Raisonner**

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable en 0.

47 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5.$$

1. Vérifier que sa courbe représentative admet pour tangente au point d'abscisse 5 la droite $\mathcal{T}$ qui a pour équation réduite $y = 17x - 45$.
2. La droite $\mathcal{T}$ passe-t-elle par le point S de coordonnées $(2\,;-11)$?

48 On considère la fonction polynôme f de degré 3, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que 0 a deux antécédents a et b par f.
2. Calculer le nombre dérivé de f en a, en b et en 2.
3. Déterminer une équation des tangentes à la courbe aux points d'abscisse a, b et 2. Tracer ces droites dans un repère orthonormé.
4. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, tracer sur le graphique précédent la courbe représentative de f.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						

49 Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 5] ayant les propriétés suivantes :
- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 2] ;
- f admet en 2 un minimum égal à –3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- Pour tout réel $x \in [1 ; 5]$, $f(x) < 0$.

50 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

1. a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ est dérivable en 5 et donner la valeur de $f'(5)$.
b. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point P d'abscisse 5.
2. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer $\mathscr{C}_f$, un point A sur $\mathscr{C}_f$ puis la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en A. Déplacer le point A sur $\mathscr{C}_f$. Que peut-on conjecturer sur la valeur du nombre dérivé en fonction de a ?
b. Montrer que pour tout réel a, la fonction f est dérivable en a puis préciser $f'(a)$.
c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points, dont on déterminera l'équation réduite en fonction de l'abscisse a du point considéré.

51 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 1$.

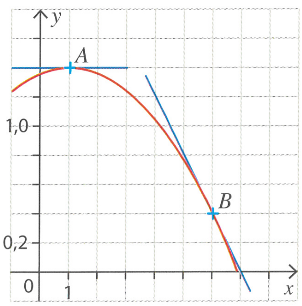
52 PRISE D'INITIATIVE

On considère la fonction g définie pour tout réel x positif par $g(x) = 6\sqrt{x} + 6$, ainsi que les points $A(-4 ; 6)$ et $B(2 ; 15)$.
- Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 4.

53 On définit pour tout x réel les fonctions f et g par : $f(x) = x^2 - x - 1$ et $g(x) = 3 - x$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ désigne la courbe de f et $\mathscr{D}$ celle de g.
1. Résoudre par le calcul $f(x) = g(x)$. On note x_0 la solution positive.
2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point P d'abscisse x_0. Déterminer son équation.
3. Tracer $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ dans un repère.

54 À l'aide du graphique ci-contre, qui représente la courbe d'une fonction f et les tangentes aux points A et B à cette courbe, compléter le tableau.

x	1	6
$f(x)$		
$f'(x)$		



55 CALCULATRICE

Communiquer

On considère la fonction f définie par $f(x) = |-x^2 + 2x + 1|$.
- En traçant sa représentation graphique sur l'écran de la calculatrice, déterminer deux valeurs de x en lesquelles f ne semble pas dérivable. Argumenter.

56 **Chute d'une bille** ALGO PYTHON

Une bille tombe en chute libre d'une hauteur de 50 m avec une vitesse initiale nulle.
On considère le script en Python ci-dessous.

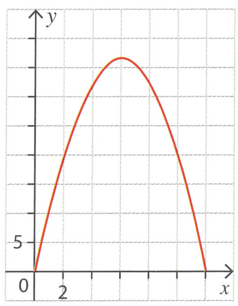
```
def d(t):
    return -4.9*t**2+50

def fonction (d,t1,t2):
    L=[]
    t=t1
    while t<t2 :
        a=abs((d(t+0.1)-d(t)))/0.1
        L.append(a)
        t=t+0.1
    return L
```

1. Quelle est celle des deux fonctions qui modélise la chute de la bille ? Donner son expression en fonction de t, le temps exprimé en seconde.
2. Quel est le rôle de « fonction » ? Indiquer ce que représentent ses paramètres.
Que représente la variable L renvoyée dans le contexte de l'exercice ?
3. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer une valeur approchée de la vitesse instantanée de la bille à l'instant t donné.

57 **Population de bactéries**

Raisonner, modéliser

On prélève un échantillon de peau infecté par une bactérie pour en faire une culture dans le but de tester l'efficacité d'un antibiotique.
À l'instant $t = 0$, quand il y a environ 100 000 bactéries dans la culture, on y injecte l'antibiotique. On évalue ensuite le nombre de bactéries toutes les heures.



On note $f(t)$ (en millier) le nombre de bactéries supplémentaires à l'instant t, où t est donné en heure. On donne ci-dessus la courbe représentative de f.
1. À l'aide du graphique, donner une estimation du nombre total de bactéries aux instants $t = 2$, $t = 6$ et $t = 12$.
2. À l'aide du graphique et d'une règle, donner une estimation du taux de croissance horaire (en millier de bactéries par heure) de cette population de bactéries aux instants $t = 0$, $t = 2$, $t = 4$, $t = 6$ et $t = 10$.
3. Le nombre de bactéries augmente plus vite à $t = 2$ qu'à $t = 4$. Peut-on préciser à peu près combien de fois plus vite ? Justifier.

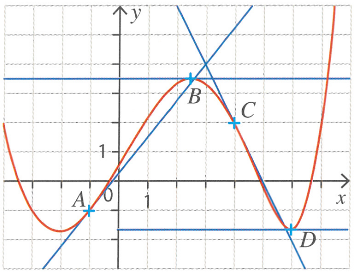
58 CALCULATRICE

Donner la valeur affichée par la calculatrice pour $f'(a)$ dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $a = 0$.

2. $f(x) = \sqrt{x} + x + 1$; $a = 4$.

59 La courbe rouge ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les tangentes à la courbe en quatre points A, B, C et D ont été tracées.



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec la précision permise par le graphique.

x	-1	2,5	4	6
$f(x)$				
$f'(x)$				

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{T}_A$ au point A d'abscisse -1 et celle de la tangente $\mathcal{T}_C$ au point C d'abscisse 4.

3. Parmi les affirmations ci-dessous, une seule est correcte. Préciser laquelle en justifiant la réponse.

a. $f'(-3) = -1{,}7$ **b.** $f'(-3) = 1$

c. $f'(-3) = 0{,}7$ **d.** $f'(-3) = -0{,}7$

60 ALGO PYTHON

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x + 1$. On admet que sur l'intervalle [0 ; 10], la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en un point A d'abscisse a une tangente parallèle à d.

1. L'algorithme incomplet ci-dessous permet de déterminer une valeur approchée de a. Après exécution, la variable a a pour valeur environ 1,497 51. Compléter les parties manquantes.

$a \leftarrow 0$
$h \leftarrow 10^{-6}$
$t \leftarrow 0$
Tant que $|t - \ldots| > 10^{-2}$ faire :
  $t \leftarrow \ldots$
  $a \leftarrow a + 10^{-5}$

2. Programmer cet algorithme sur logiciel ou sur calculatrice et vérifier la valeur de l'abscisse recherchée. Comment obtenir une valeur plus précise ?

3. Démontrer la conjecture et donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à d.

61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 + x - 9.$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

2. En déduire $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et $f'(\sqrt{5})$.

3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 2.

62 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

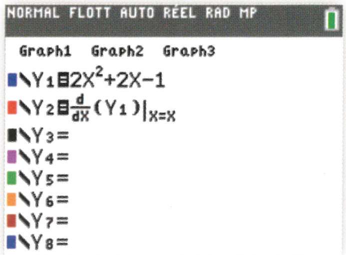
$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1,$$

de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$y = 2x - 1.$$

On cherche à déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$.

1. En utilisant la table de la calculatrice comme indiqué ci-dessous, conjecturer l'abscisse x_0 d'un point répondant à la question.



2. Déterminer le taux de variation entre x_0 et $x_0 + h$. Valider la conjecture.

63 **L'attaque du faucon pèlerin**

Le faucon pèlerin est un rapace dont la technique de chasse consiste à attaquer par l'arrière et en piqué des oiseaux en plein vol. Il peut se laisser tomber presque à la verticale d'une hauteur de 500 m sur sa proie.

La fonction suivante donne de façon simplifiée la distance parcourue par un faucon lors du piqué sur un pigeon, en fonction du temps, en seconde, à partir du moment où il commence sa descente :

$$f(t) = 5t^2 + 25t.$$

On rappelle que la vitesse instantanée à un instant t se modélise par le nombre dérivé $f'(t)$.

1. Déterminer la vitesse initiale du faucon.

2. L'attaque a duré 8 secondes.

a. Quelle a été la distance parcourue pendant le piqué ?

b. Quelle est la vitesse moyenne du faucon lors du piqué ?

c. À quelle vitesse le faucon a-t-il percuté le pigeon ?

64 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2}.$$

1. Déterminer la valeur de $f'(1)$.
2. Vérifier que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 a pour équation réduite $y=x-1$.
3. En déduire une valeur approchée de $f(0{,}99)$.
4. Calculer $f(0{,}99)$ à l'aide de la calculatrice et comparer cette valeur avec la réponse à la question **3**.

65 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3-2x}{x+1}.$$

1. Montrer que $f'(1)=-\frac{5}{4}$.
2. Donner l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 1.
3. Cette tangente $\mathcal{T}$ a-t-elle un autre point d'intersection avec la courbe $\mathcal{C}_f$? Justifier.

66 TABLEUR **Population d'une ruche**
Argumenter, modéliser

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abeilles dans une ruche. Le tableau suivant donne l'estimation du nombre d'abeilles dans la ruche au 15 de chaque mois de mars à septembre, ce qui correspond à la pleine période d'activité de cette ruche.

	A	B	C	D	E
1	Date	Nombres de jours x depuis le 1er mars	Nombre d'abeilles en milliers	$f(x)$	$f'(x)$
2	15-mars	15	12		
3	15-avr	46	40		
4	15-mai	76	52		
5	15-juin	107	56		
6	15-juil	137	50		
7	15-août	168	36		
8	15-sept	199	21		

1. Reproduire le tableau à l'aide d'un tableur et sélectionner la plage de valeurs B2:C8 pour faire apparaître un nuage de points.
2. Quel type de fonction semble pouvoir convenir pour modéliser l'évolution de cette colonie d'abeilles du 15 mars au 15 septembre ?
3. Cliquer sur l'un des points du graphique et ajouter une courbe de tendance du type voulu dont on fera afficher l'équation sur le graphique. On notera f la fonction obtenue.
4. Compléter la colonne D puis, à l'aide de la calculatrice, la colonne E.
5. Interpréter les résultats de la colonne D. Exprimer la réponse en langage courant.

67 On considère la fonction f définie sur $[-4\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x+4}.$$

1. Montrer que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$, où h est un réel non nul, est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$.
2. En déduire la valeur de $f'(1)$.

68 Reprendre la méthode de l'exercice précédent pour déterminer le nombre dérivé des fonctions f en a dans chacun des cas suivants.

1. $f: x \mapsto \sqrt{-2x+5}$ $\quad a=2$
2. $f: x \mapsto \sqrt{3x+1}$ $\quad a=0$
3. $f: x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ $\quad a=-1$
4. $f: x \mapsto \sqrt{4-2x}$ $\quad a=-3$

69 **Raisonner**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x|x|.$$

• Démontrer que f est dérivable en 0.

70 Tracer une courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ayant les propriétés suivantes :
• $f(1)=0$, $f(-3)=0$ et $f(3)=3$;
• f est croissante sur l'intervalle $[1\,;3]$;
• f admet en 0 un maximum égal à 4 ;
• $f'(3)=0$, $f'(-3)=2$ et $f'(1)=0{,}5$.

71 LOGICIEL
Raisonner, modéliser

Le tableau suivant donne l'estimation des revenus cumulés des GAFAM en milliard d'euros de 2002 à 2017 (Source : Statista).

	A	B	C	D	E
1	Année	Rang de l'année	Revenus cumulés GAFAM en milliards d'euros	f	f'
2	2002	0	31,2		
3	2003	1	36,8		
4	2004	2	44,9		
5	2005	3	55,5		
6	2006	4	69,1		
7	2007	5	87,3		
8	2008	6	113,2		
9	2009	7	122,3		
10	2010	8	157,2		
11	2011	9	217,9		
12	2012	10	282		
13	2013	11	314,5		
14	2014	12	355,4		
15	2015	13	428,6		
16	2016	14	450,7		
17	2017	15	527,8		
18					

1. Reproduire le tableau à l'aide d'un tableur et sélectionner la plage de valeurs B2:C17 pour faire apparaître un nuage de points.
2. Quel type de fonction semble pouvoir convenir pour modéliser l'évolution de leurs revenus de 2002 à 2017 ?
3. Cliquer sur l'un des points du graphique et ajouter une courbe de tendance du type voulu dont on fera afficher l'équation sur le graphique. On notera f la fonction obtenue.
4. Compléter la colonne D puis, à l'aide de la calculatrice, la colonne E.
5. Interpréter les résultats de la colonne E. Exprimer votre réponse en langage courant.

72 Démonstration

Le but de cet exercice est de démontrer que les fonctions affines sont les seules fonctions à posséder un taux de variation constant, c'est-à-dire les seules pour lesquelles il existe un unique réel m, tel que, pour tous réels a et b distincts, en notant f la fonction, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m.$$

1. Soit f une fonction de taux de variation constant égal à 3 telle que $f(0)=-2$. En calculant son taux de variation entre 0 et x $(x \neq 0)$, montrer que f est une fonction affine que l'on peut déterminer explicitement.

2. Même question pour une fonction f de taux de variation constant égal à 3 et telle que $f(3)=10$.

3. Dans le cas général, démontrer qu'une fonction de taux de variation constant est une fonction affine.

73 Distance de freinage

Un cycliste qui se déplace à environ 37 km·h^{-1} freine pour s'arrêter à un stop. À partir du moment où il commence son freinage et jusqu'à son arrêt, la distance qu'il parcourt, en mètre, est donnée en fonction du temps t, en seconde, par la fonction d définie par $d(t)=-1{,}7t(t-6)$.

1. Calculer la vitesse instantanée à $t=0$. Vérifier la cohérence avec l'énoncé.

2. Calculer la vitesse instantanée au bout de 1 s.

3. Montrer que le vélo est arrêté à $t=3$ s.

4. On admet que le cycliste met 3 secondes pour s'arrêter. Au moment où le cycliste commence son freinage, le stop se trouve à 15 m de lui. Lui reste-t-il une distance suffisante pour s'arrêter avant la ligne d'effet du stop ?

74 PRISE D'INITIATIVE

Existe-t-il une fonction non affine dont la courbe possède une même droite comme tangente en une infinité de points distincts ? Si oui, donner un exemple.

75 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x}$ pour $x>0$ ainsi que les points $A(0\,;2)$ et $B(9\,;-1)$.

• Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de f en un point à définir.

76 Existe-t-il une fonction dont la courbe représentative présente une tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) ? Si oui, donner un exemple.

77 PRISE D'INITIATIVE

Chercher

Représenter une fonction non constante telle que, pour tout réel a, le taux de variation entre a et $a+1$ soit nul.

78 PRISE D'INITIATIVE

Trouver les réels a, b et c tels que la parabole représentant la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1\,;0)$ et $B(-2\,;0)$ et tels que la tangente en A à la parabole ait pour coefficient directeur 6.

79 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE CALCULATRICE

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2 \text{ et } g(x)=-x^2+4x-2.$$

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie ou d'une calculatrice, conjecturer une valeur de l'abscisse a en laquelle les courbes représentatives des fonctions f et g auraient une tangente commune (c'est-à-dire une tangente à la courbe représentative de la fonction f qui soit également tangente à la courbe représentative de la fonction g).

2. Déterminer $f'(a)$ et $g'(a)$.

3. Vérifier la conjecture.

80 Rôle de la constante (1)

Calculer, raisonner

1. Démontrer que, si la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x)=x^2+3x-2$, alors, pour tout réel a, f est dérivable et $f'(a)=2a+3$.

2. Démontrer que, si la fonction g est définie pour tout réel x par $g(x)=x^2+3x+6$, alors, pour tout réel a, g est dérivable et $g'(a)=2a+3$.

3. Peut-on déterminer d'autres fonctions admettant, pour tout réel a, un nombre dérivé égal à $2a+3$?

81 ALGO PYTHON

On considère la fonction en Python suivante.

```
from math import sqrt
def taux(a,h):
    return (sqrt(a+h)-sqrt(h))/h
```

1. Que renvoie l'instruction taux (1,0.1) ?

2. Quelle est la fonction utilisée dans cet algorithme ?

3. Que représente la valeur renvoyée ?

4. Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie une liste contenant des taux de variation pour h de plus en plus proche de 0.

82 Soient la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3-2x+1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}_0$.

83 **Raisonner**

On considère la fonction carré :

$$f : x \mapsto x^2, \text{ avec } x \in \mathbb{R},$$

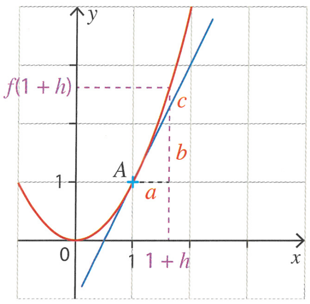
et sa courbe représentative $\mathscr{C}$.

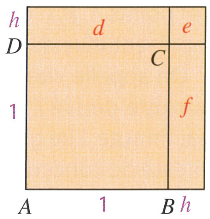
On admet que f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 2$.

1. Développer $(1 + h)^2$.

2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point $A\,(1\,;1)$.

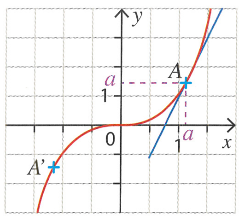
3. À partir des figures suivantes, associer chaque lettre en rouge (qui représentent des distances et des aires) à l'une des trois expressions suivantes : h, $2h$ et h^2.





4. Recopier et compléter la phrase suivante : « Lorsque h est très proche de 0, $(1 + h)^2$ est à peu près égal à … ». Argumenter.

84 Dans cet exercice, f désigne la fonction cube et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



1. Montrer que :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Soit a un réel.

Calculer le taux de variation de la fonction cube entre a et $a + h$.

3. Démontrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = 3a^2$.

4. Que peut-on en déduire pour les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A et A' d'abscisses respectives a et $-a$?

Quel argument géométrique permettrait aussi de justifier ce résultat ?

85 Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x + 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_1$ à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_1$.

86 PRISE D'INITIATIVE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente passant par le point B de coordonnées $(3\,;0)$?

87 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la valeur de $f'(1)$ à l'aide de la fonction « nombre dérivé » de la calculatrice.

2. En admettant que l'arrondi à l'unité du résultat précédent est bien $f'(1)$, vérifier que la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 a pour équation réduite $y = x - 1$.

3. Étudier la position relative de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{C}$.

4. Vérifier la réponse précédente en obtenant le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$ sur l'écran de la calculatrice.

88 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

On considère la fonction f définie sur $]-5\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{x+5}$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + x$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie ou d'une calculatrice, conjecturer une valeur de l'abscisse a en laquelle les courbes représentatives des fonctions f et g auraient une tangente commune (c'est-à-dire une tangente à la courbe représentative de la fonction f qui soit également tangente à la courbe représentative de la fonction g).

2. Déterminer $f'(a)$ et $g'(a)$.

3. Vérifier la conjecture.

89 **Rôle de la constante (2)**

1. Démontrer que, si la fonction f est définie pour tout réel x différent de -3 par $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$, alors, pour tout réel a, f est dérivable et $f'(a) = \dfrac{3}{(a+3)^2}$.

2. Démontrer que, si la fonction g est définie pour tout réel x différent de -3 par $g(x) = \dfrac{-3}{x+3}$, alors, pour tout réel a, g est dérivable et $g'(a) = \dfrac{3}{(a+3)^2}$.

3. Démontrer qu'il existe un réel α tel que pour tout réel x différent de -3, $g(x) = f(x) + \alpha$.

4. Peut-on déterminer d'autres fonctions admettant, pour tout réel a différent de -3, un nombre dérivé égal à $\dfrac{3}{(a+3)^2}$?

90 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a de l'ensemble de définition de f et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

3. En déduire $f'(-4)$ et $f'\left(\dfrac{5}{7}\right)$.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point $\mathscr{C}$ d'abscisse 4.

VERS L'épreuve écrite

91 **Déplacement d'un mobile**

Un mobile se déplace dans un plan muni d'un repère orthogonal.

À chaque instant t, le mobile possède deux coordonnées dont la valeur dépend du temps t.

On suppose que l'on a, pour tout $t \geqslant 0$, $x(t) = 10t$ et $y(t) = 0{,}1t^2 + 5$.

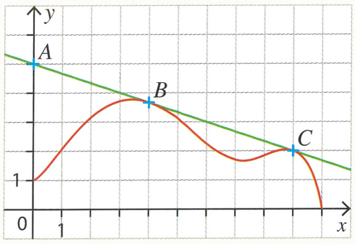
1. En quelle position se trouve le mobile au temps initial $t = 0$?
2. Exprimer y en fonction de x. Quel type de trajectoire décrit le mobile au cours du temps ? Tracer cette courbe.
3. On admet que la vitesse du mobile est définie par le vecteur $\vec{v}(t)$ de coordonnées $\vec{v}(t)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ où $x'(t)$ est le nombre dérivé de la fonction x à l'instant t et $y'(t)$ le nombre dérivé de la fonction y à l'instant t.
   a. Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = 0$?
   b. En donner une interprétation concrète.

92 On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;10]$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée en rouge dans le graphique ci-dessous.

$f(0) = 1$ et $f(10) = 0$.

La droite verte passant par le point $A\,(0\,;5)$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points B et C de la courbe. On sait que B a pour abscisse 4 et que C a pour coordonnées $(9\,;2)$.

Les réponses devront être clairement justifiées.



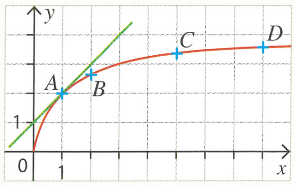
1. Calculer le taux de variation de f entre 0 et 10.
2. Déterminer $f'(4)$ et $f'(9)$.
3. Calculer $f(4)$.
4. Donner une valeur approchée de $f'(1)$.
5. Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'équation $f'(x) = 0$.
6. Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
7. Déterminer graphiquement une valeur telle que $f(x) \approx f'(x)$.
8. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle le nombre dérivé est maximal.

93 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a de l'ensemble de définition de f et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $-\frac{1}{3}$.

94 **Dureté de l'eau**

Lors d'une mesure de la dureté de l'eau, l'attaque du magnésium par une solution d'acide chlorhydrique donne des ions magnésium Mg^{2+}. La courbe ci-contre représente la concentration d'ions Mg^{2+} (exprimée en centième de mole par litre) en fonction du temps t (exprimé en minute).



On note f la fonction représentant la concentration d'ions Mg^{2+} dont la courbe est représentée ci-dessus.

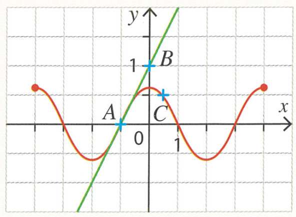
Les points A, B, C et D sont quatre points de la courbe représentative de la fonction f.

1. On appelle vitesse de concentration à l'instant t le nombre dérivé $f'(t)$, exprimé en centième de mole par minute. Lire graphiquement une estimation de la vitesse de concentration à l'instant $t = 1$.
2. Reproduire la courbe précédente et déterminer graphiquement la vitesse de concentration aux instants $t = 2$, $t = 5$ et $t = 8$. Laisser les tracés nécessaires sur le graphique.
3. La fonction f a pour expression $f(t) = \dfrac{4t}{t+1}$.
   a. Un logiciel de calcul formel donne :

▸ Algèbre	▸ Calcul formel
● $\mathbf{f(t) = \frac{4t}{t+1}}$	1 (f(0+h)-f(0))/h → $\frac{4}{h+1}$

   Déterminer grâce à ses indications la vitesse de concentration à l'instant $t = 0$.
   b. Représenter la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
   c. Existe-t-il un (ou des) instant(s) en le(s)quel(s) la vitesse de concentration est égale à 0,25 centième de mole par minute ?

95 On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-4\,;4]$ dont on donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-contre.



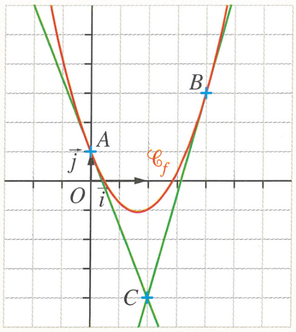
On note $A\,(-1\,;0)$ et $B\,(0\,;1)$.

La droite (AB) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

On admet que $\mathscr{C}_f$ passe par le point $C\,(0{,}4\,;0{,}5)$.

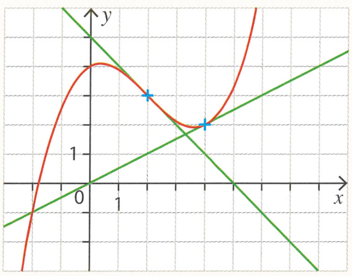
1. La fonction f semble-t-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ? Justifier.
2. Déterminer le taux de variation de f entre -1 et $0{,}5$.
3. Donner par lecture graphique les valeurs de $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
4. En se servant des valeurs obtenues, donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
5. Existe-t-il une droite qui semble tangente à $\mathscr{C}_f$ en trois points distincts ? Justifier.

96 On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels) représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal.
Cette courbe $\mathscr{P}$ passe par les points A (0 ; 1) et B (2 ; 3).
Les tangentes en A et B se coupent en C (1 ; – 4).



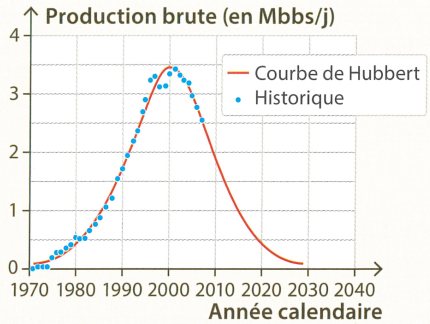
1. Donner l'équation réduite de chacune de ces tangentes.
2. En déduire $f'(0)$ puis $f'(2)$.
3. Soit x_0 un nombre réel. Déterminer l'expression de $f'(x_0)$ en fonction des constantes a et b.
4. À l'aide des renseignements précédents, obtenir trois équations d'inconnues a, b et c.
5. Donner l'expression de $f(x)$.
6. Déterminer le taux de variation entre a et $a + h$ pour a et h réels ($h \neq 0$). En déduire une expression de $f'(a)$.
7. Retrouver les valeurs de $f'(0)$ puis $f'(2)$.

97 QCM
On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



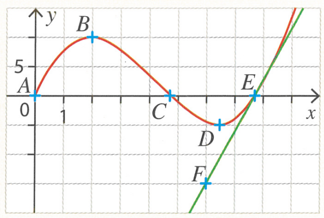
1. $f(0)$ est égal à :
(a) 4 (b) – 2 (c) 0 (d) 5
2. $f'(4)$ est égal à :
(a) 2 (b) – 1 (c) 0,5 (d) 0
3. $f'(2)$ est égal à :
(a) 3 (b) 1 (c) –1 (d) 5
4. Le taux de variation de f entre –2 et 4 est :
(a) positif (b) nul (c) négatif
(d) on ne peut pas savoir
5. Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 5 est :
(a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (b) $y = -2x + 1$
(c) aucune des deux

98 **Pic pétrolier**
Le géophysicien Marion King Hubbert suggéra dans les années 1940 que la production de pétrole d'un pays suivait une courbe en cloche qui pouvait se déduire de la quantité de pétrole déjà extraite et de l'estimation des réserves totales.
Compte tenu des crises politiques, des aléas économiques ou de la découverte de nouveaux gisements, ce modèle est rarement validé en pratique sur une longue période mais l'évolution de la production de pétrole en Norvège s'inscrit presque parfaitement sur la courbe de Hubbert.



L'axe des ordonnées du graphique ci-dessus est gradué en Mbbls/j (anglais) ou mbj (en français) :
1 Mbbls/j = 1 000 000 barils/jour.
Un baril correspond à 159 litres environ.
1. Quelles sont les années pendant lesquelles la production de pétrole semble augmenter le plus vite ? Expliquer graphiquement.
2. On admet que la vitesse d'évolution de la production de pétrole une année donnée est modélisée par le nombre dérivé (en Mbbls/j par an) de la fonction de Hubbert cette année-là. Comparer l'évolution de la production de pétrole en 1980 et en 1990. La démarche doit être bien détaillée.

99 On considère une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 8]. On donne ci-contre sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$. On admet que la courbe passe par les points : A (0 ; 0), B (2 ; 10), C (4,75 ; 0), D (6,5 ; –5) et E (7,75 ; 0).



La droite (FE) où F est le point de coordonnées (6 ; –15) est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E.
1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Dresser le tableau de signes de f.
3. Dresser le tableau de signes de f'.
4. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x) \times f'(x) \geqslant 0$.
5. Déterminer $f'(7{,}75)$.
6. Estimer graphiquement une valeur approchée à l'unité de $f'(0)$. Justifier la réponse.

DIFFÉRENCIATION
Exercices AP

100 Tangentes parallèles à une courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.
On cherche à déterminer les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$.

Questions Va piano

1. CALCULATRICE Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ sur la calculatrice et conjecturer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à $\mathscr{D}$.
2. En utilisant un tableau de valeurs du nombre dérivé de f, en différentes abscisses, obtenu avec une calculatrice, confirmer la conjecture.
3. On admet que $f'(1) = 2$.
Déterminer l'équation d'une tangente parallèle à $\mathscr{D}$.

Questions Moderato

1. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ sur la calculatrice et conjecturer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à $\mathscr{D}$.
2. On admet que pour tout a réel, on a :

$$f'(a) = 3a^2 - 4a + 3.$$

Déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à $\mathscr{D}$.
3. Calculer $f'(1)$ et déterminer l'équation d'une tangente parallèle à $\mathscr{D}$.

Questions Allegro

1. Soit a un nombre réel.
Déterminer le taux de variation de f entre a et $a + h$ pour h un nombre réel non nul.
2. En déduire le nombre dérivé de f en a réel.
3. Déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à $\mathscr{D}$ et l'abscisse des points répondant au problème.
4. Donner les équations réduites de ces tangentes.

101 Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement : position, vitesse, accélération d'un mobile…
Deux systèmes mobiles F et G se déplacent sur un axe gradué, leurs positions respectives au cours du temps sont données par les fonctions f et g définies pour tout réel t positif par :

$$f(t) = 2t^2 + t + 4$$
$$\text{et } g(t) = -t^2 + 5t + 8.$$

On admet que sur cet axe, les mobiles peuvent se doubler ou se croiser.

Questions Va piano

1. Tracer un axe gradué et positionner les mobiles F et G aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ puis $t = 3$.
2. Quelle est la vitesse moyenne du mobile F entre les instants $t = 0$ et $t = 1$? et celle du mobile G ?
3. À quel instant sont-ils sur la même position ?

Questions Moderato

1. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(t) = g(t)$.
2. Interpréter dans le contexte les solutions trouvées.
3. Soit t un nombre réel positif.
Déterminer la vitesse moyenne de chaque mobile entre l'instant t et l'instant $t + h$, avec $h > 0$.

Questions Allegro

1. À quel instant les deux mobiles sont-ils sur une même position ? Est-ce un dépassement ou un croisement ?
2. Quelles sont leurs vitesses respectives à ce moment précis ?

102 Étude de bénéfice

Une entreprise produit et commercialise entre 0 et 14 tonnes d'engrais par jour. On admet que toute sa production est vendue.
Le bénéfice total (exprimé en centaine d'euros) réalisé pour une production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie par :

$$B(x) = -x^2 + 20x - 64.$$

Questions Va piano

1. Déterminer le taux de variation du bénéfice total entre 4 et 10 tonnes vendues puis entre 10 et 14 tonnes.
Interpréter ces résultats.
2. Déterminer le nombre dérivé de la fonction B en $x = 4$ puis en $x = 6$.
En donner une interprétation concrète.

Questions Moderato

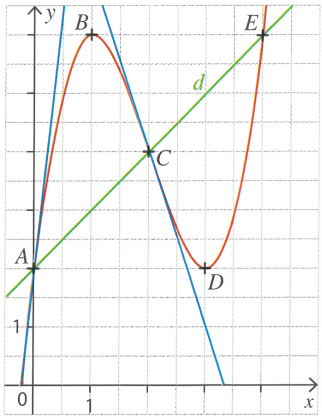
1. En utilisant les connaissances sur les polynômes du second degré, déterminer la quantité x_0 de tonnes d'engrais nécessaires à un bénéfice maximum.
2. Déterminer le nombre dérivé de B en x_0. Interpréter la valeur.
3. Pourquoi l'entreprise ne veut-elle pas produire plus d'engrais ?

Questions Allegro

1. Démontrer que la fonction B est dérivable en tout nombre réel a de l'intervalle $[0\,;14]$.
En déduire $B'(a)$.
2. Déterminer le tableau de signes de $B'(a)$ en fonction de a.
3. Donner le tableau de variation de B et le comparer au tableau de signes de $B'(a)$.
4. Déterminer ce bénéfice maximal.

1 Using a graph

Let f be a defined and differentiable function on interval $I = [0\,;4]$; here is its curve represented on orthogonal axes. The tangents to the curve at points $x = 0$ and $x = 2$ are also represented, as well as the straight line d whose equation is $y = x + 2$. At points $x = 1$ and $x = 3$ the tangents to the curve are parallel to the x-axis.



1. Using the graph, determine:

a. $f(0)$ and $f'(0)$; **b.** $f(1)$ and $f'(1)$; **c.** $f(2)$ and $f'(2)$;

d. the set of all possible real numbers x such that $f(x) \leqslant x + 2$.

2. Using the graph, draw the table that shows variations of f on interval I.

3. We assume that $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Using the calculator, show that the tangents to the curve at points $x = 0$ and $x = 4$ are parallel.

2 Drawing

1. Using a geometry software, draw the graph $y = x^2$.

2. Draw the chord passing through points $(0\,;0)$ and $(3\,;9)$. Give its gradient.

3. Draw the chord passing through points $(1\,;1)$ and $(3\,;9)$. Give its gradient.

4. Draw the chord passing through points $(2\,;4)$ and $(3\,;9)$. Give its gradient.

5. Go on drawing chords with points nearer and nearer to point $(3\,;9)$. What do you notice?

6. Plot three points $P(x\,;x^2)$, $Q(x+h\,;(x+h)^2)$ and $R(x+h\,;x^2)$. Compute $\dfrac{QR}{PR}$.

7. What happens to this fraction when h approaches zero?

3 Gradient

The gradient of a curve at a point $M(x_M\,;y_M)$ is the gradient of the tangent to the curve at this point M.
If the curve is the graph of $y = f(x)$ and f is differentiable this gradient is equal to the derivative $f'(x_M)$.
In England, $f'(x)$ is usually written $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ as physicists do in France.

1. Prove that $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

2. Find $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ for the equation $y = x^3 - 4x$.

3. Find the gradient of the curve at point $M(x_M\,;y_M)$ where $x_M = 2$.

4. Sketch the graph of the curve and guess the number of points that are on curve for which the gradient is 0. Find the coordinates of these points.

Pair Work Who am I?

Solve the following riddle. Then create your own riddle and present it to your classmate.

I am a quadratic function. Let's name $\mathscr{P}$ my graph.

1. One of $\mathscr{P}$'s x-intercept is equal to 3.

2. Its y-intercept is equal to 2.

3. The line with the equation $y = -2x + 2$ is a tangent to the curve $\mathscr{P}$ at point $B(0\,;2)$.

Can you find my second x-intercept?