Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

CHAPITRE

4 Dérivation locale

Approcher les courbes au plus près

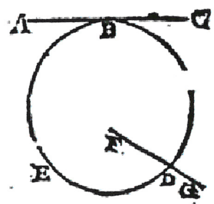
Isaac Newton et Gottfried Leibniz

Au XVII^{e} siècle, grâce à l'émergence de la géométrie analytique, l'étude des courbes rejoint ce que nous appelons aujourd'hui l'étude des fonctions. **Isaac Newton** et **Gottfried Leibniz**, pour résoudre entre autres des problèmes de tangentes à une courbe, développent dans la seconde moitié du XVII^{e} siècle, chacun de leur côté, une nouvelle mathématique, très fructueuse mais très controversée à l'époque, qui utilise des infiniment petits et même des quantités qualifiées alors d'« évanouissantes ». Ce sont les prémices du calcul infinitésimal ou calcul différentiel.

La notion de tangente est apparue très tôt en géométrie. Euclide (III^{e} siècle avant J.-C.) en donne une définition dans le livre III des *Éléments*.

2. Vne ligne droite eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuée ne le coupe point.

Comme la ligne droite AB ſera dite toucher le cercle BDE en B, ſi elle l'y touche, en ſorte qu'étant prolongée vers C, elle ne le coupe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droite GD atteint le meſme cercle au point D, en telle ſorte qu'eſtant prolongée iuſques à F, elle coupe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne ſera pas dite toucher le cercle, mais le couper.



Euclide, *Les Éléments*, livre III, traduction de D. Henrion, 1676

Archimède (vers –287 à –212) est le premier à déterminer une tangente à une autre courbe qu'un cercle.

La tangente à une courbe définie dans ce chapitre correspond-elle à la tangente à un cercle définie par Euclide ci-dessus ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Fonction affine

On considère la fonction affine f telle que :

$$f(2) = 3 \text{ et } f(4) = -1.$$

• En notant $f(x) = mx + p$, déterminer m puis p.

2 Coefficients directeurs

Déterminer le coefficient directeur des droites suivantes.

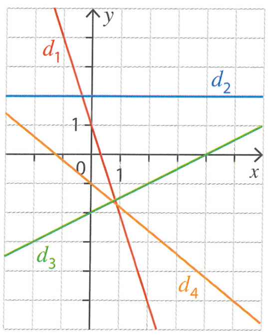
1. $\mathcal{D}_1$, droite passant par $A\ (5\ ;2)$ et $B\ (-3\ ;1)$.

2. $\mathcal{D}_2$, droite passant par $C\left(\frac{1}{2}\ ;\frac{3}{4}\right)$ et $D\left(-1\ ;\frac{1}{2}\right)$.

3. $\mathcal{D}_3$, droite passant par $E\left(-\sqrt{7}\ ;\frac{1}{3}\right)$ et $F\left(1+\sqrt{3}\ ;\frac{1}{3}\right)$.

3 Équations de droites

Déterminer, par lecture graphique, les équations réduites des droites d_1, d_2, d_3 et d_4 du graphique ci-dessous.



4 Calculs d'images

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de $f(1+h)$, où h est un réel tel que $f(1+h)$ existe.

a. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

b. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

c. $f(x) = \sqrt{5x-2}$

d. $f(x) = \dfrac{3}{5x^2+1}$

5 Limite en 0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1.$$

1. CALCULATRICE Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice.

h	0,1	0,01	0,001	10^{-4}
$f(h)$				

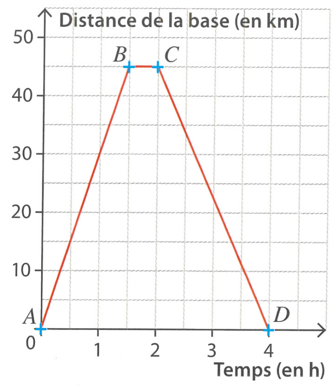
2. Que peut-on dire des images lorsque les antécédents sont proches de zéro ?

6 Fonctions par morceaux

On effectue un test de vol sur un drone. Le drone se déplace en ligne droite depuis sa base et peut faire du vol stationnaire. Le graphique ci-dessous donne la distance le séparant de sa base.

1. Quelle a été sa vitesse, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, sur les intervalles de temps $[0\ ;1{,}5]$, $[1{,}5\ ;2]$ et $[2\ ;4]$?

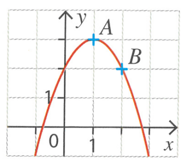
2. Quelle a été la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?



7 Coefficient directeur

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre. A et B sont deux points de la courbe.

• Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).



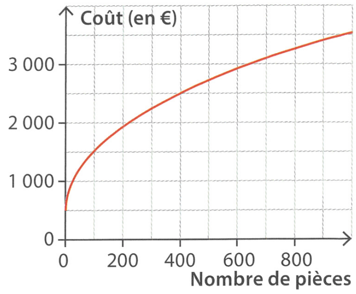
Pour construire le cours

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation 1 Déterminer un taux de variation

Objectif
Introduire le taux de variation.

Une entreprise fabrique des pièces automobiles. Elle peut en produire jusqu'à 1 000 par jour. Le coût de fabrication de ces pièces dépend du nombre de pièces fabriquées.
On modélise le coût total de fabrication par une fonction C telle que $C(x)$ représente le coût (en euro) de fabrication pour x pièces créées.
On suppose que $C(x) = 100\sqrt{x} + 500$ et on considère la courbe représentative de la fonction C donnée ci-contre.



1. **a.** Calculer le coût de fabrication de 0 pièce, puis de 400 pièces.
b. On définit **le taux de variation** du coût de fabrication entre 0 et 400 pièces fabriquées par :

$$\frac{C(400) - C(0)}{400 - 0}.$$

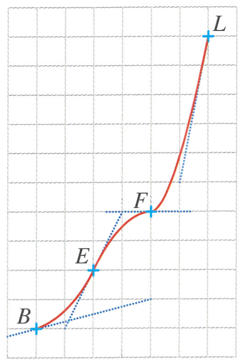
Calculer ce taux.
c. Comparer ce taux à celui de l'augmentation de 400 à 900 pièces fabriquées.
Interpréter.

2. En économie, on utilise un indicateur, appelé **coût marginal**, qui se définit comme le coût de fabrication d'une unité supplémentaire après avoir déjà fabriqué x unités.
On note $C_m(x)$ le coût marginal en euro et $C_m(x) = C(x + 1) - C(x)$.
a. Calculer le coût marginal, arrondi au centime, pour 200 pièces fabriquées.
b. Calculer le coût marginal, arrondi au centime, pour 800 pièces fabriquées.
c. Comparer ces deux valeurs.

Situation 2 Gravir une côte

Objectif
Introduire la pente d'une tangente.

La course de côte en moto consiste à suivre un parcours avec des dénivelés importants.
Une portion du profil du circuit est donnée par la courbe ci-contre représentée dans un repère.



1. Parmi les points figurant sur la courbe, quel est celui qui présente la plus forte pente ? la plus faible ?

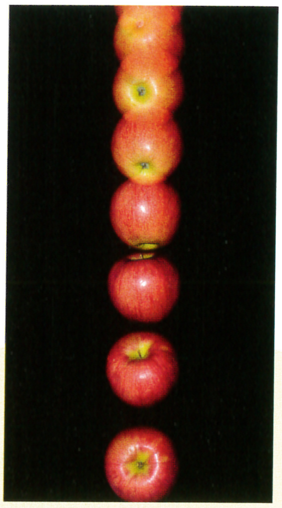
2. Dans le repère ci-contre, une unité horizontale représente 10 m et une unité verticale 1 m.
Une pente de 15 % signifie que lorsqu'on avance horizontalement de 100 m, on monte de 15 m.
Déterminer la pente au niveau des points B, E, F et L.

3. Un participant déclare que la pente est deux fois plus forte au point L qu'au point E. Que peut-on penser de ce propos ?

Situation 3 Étudier la chute libre

Objectif
Introduire le nombre dérivé.

On dit qu'un corps est en chute libre lorsqu'il est lâché sans vitesse initiale depuis un point et qu'il n'est soumis qu'à son poids (on néglige le frottement de l'air).
Le corps parcourt alors en t (seconde) une distance que l'on peut approcher par $d(t) = 5t^2$ (en mètre).



La vitesse moyenne v d'un objet ayant parcouru une distance d (en m) en un temps t (en s) est donnée par $v = \frac{d}{t}$ avec v en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 **a.** Recopier et compléter le tableau suivant.

t	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
$d(t)$								

b. À l'aide du tableau précédent, construire la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0\,;5]$ dans un repère orthogonal d'unités 2 cm pour 1 s en abscisses et 1 cm pour 10 m en ordonnées.

c. Calculer la vitesse moyenne entre les instants 1 et 5, puis entre 1 et 3 et enfin entre 1 et 2.

d. Comment interprétér ces résultats sur le graphique de la courbe $\mathscr{C}$?

2 **a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Entre 0,9 s et 1 s	Entre 0,99 s et 1 s	Entre 0,999 s et 1 s	Entre 1 s et 1,001 s	Entre 1 s et 1,01 s	Entre 1 s et 1,1 s
Vitesse moyenne						

b. Comment interpréter graphiquement ces valeurs ?

3 **a.** Soit h un réel non nul.
Calculer la vitesse moyenne entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$.

b. « La vitesse instantanée à l'instant $t = 1$ est de $10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. »
Expliquer cette affirmation.

4 En utilisant un raisonnement analogue, déterminer la vitesse instantanée à l'instant $t = 3$ s.

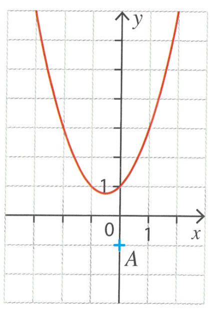
Situation 4 Prendre la tangente… ou pas

Objectif
Déterminer la tangente à une courbe.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x + 1,$$

sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ et le point $A\,(0\,;-1)$.



1 La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 1 passe-t-elle par le point A ?

2 Existe-t-il une ou plusieurs tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère ?

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

1. Point de vue algébrique

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I. Soit h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers zéro.
Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en a.** On le note $f'(a)$.

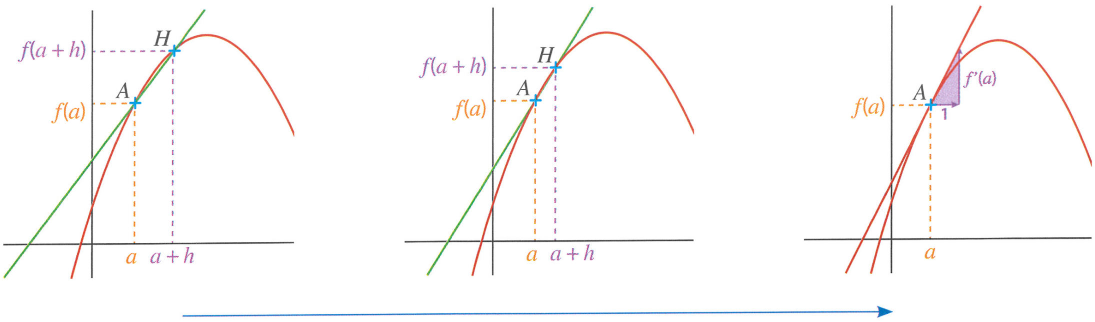
Remarque

Une fonction peut ne pas être dérivable en un réel a.
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ ne sont pas dérivables en 0.

DÉMO p. 118 et 119

2. Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I. Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et H le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a + h$.



h se rapproche de zéro

Lorsque h tend vers zéro, le point H se rapproche du point A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite (en rouge sur le dessin). Si f est dérivable en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite qui correspond à la position limite de (AH).

Définition

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a\,;f(a))$.
La **tangente à la courbe** représentative de f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A.

DÉMO p. 119

Propriété

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a\,;f(a))$.
La tangente à la courbe représentative de f au point A a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque

Localement, la courbe représentative de f au voisinage du point A est presque confondue avec sa tangente. Autrement dit, lorsque $x \approx a$, on a $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exercice résolu 1 Calculer un nombre dérivé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x}.$$

• Montrer que f est dérivable en 5 et donner la valeur de $f'(5)$.

Solution commentée

Pour étudier la dérivabilité de f en 5, on calcule le taux de variation de f entre 5 et $5 + h$ ($h \neq -5$ et $h \neq 0$).

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{\left(1+\frac{3}{5+h}\right)-\left(1+\frac{3}{5}\right)}{h} = \frac{\frac{-3h}{5(5+h)}}{h} = \frac{-3h}{5(5+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-3}{5(5+h)}$$

Lorsque h tend vers zéro, $5 + h$ tend vers 5, $5(5 + h)$ tend vers 25 et donc le taux de variation tend vers le nombre réel $\frac{-3}{25}$.

La fonction f est donc dérivable en 5 avec $f'(5) = -\frac{3}{25}$.

EXERCICE 7 p. 128

Exercice résolu 2 Étudier la dérivabilité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

1 Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.

2 En déduire $f'(3)$.

Solution commentée

1 Pour étudier la dérivabilité de f en a, on calcule le taux de variation de f entre a et $a + h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2+4(a+h)+3-(a^2+4a-3)}{h}$$

$$= \frac{a^2+2ah+h^2+4a+4h+3-(a^2+4a-3)}{h}$$

$$= \frac{2ah+h^2+4h}{h}$$

$$= 2a+4+h.$$

Lorsque h tend vers zéro, le taux de variation tend vers le nombre réel $2a + 4$.
La fonction f est donc dérivable en tout réel a avec $f'(a) = 2a + 4$.

2 $f'(3) = 2 \times 3 + 4 = 10$

EXERCICE 61 p. 134

Exercice résolu 3 Déterminer l'équation d'une tangente

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 7$. On admet que $f'(3) = 9$.

1 Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

2 Le point S (10 ; 80) appartient-il à cette droite ?

Solution commentée

1 $f(3) = 3^2 + 3 \times 3 - 7 = 11$. On a aussi $f'(3) = 9$. On obtient donc $y = 9(x - 3) + 11$. L'équation est $y = 9x - 16$.

2 Un point appartient à la tangente si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation réduite établie à la question 1.
$9 \times 10 - 16 = 74$
Or $80 \neq 74$, donc les coordonnées de S ne vérifient pas l'équation,
donc S n'appartient pas à la tangente.

EXERCICE 30 p. 131

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

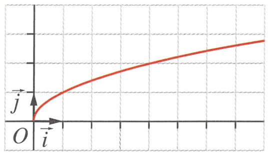
La fonction racine carrée est la fonction définie pour tout réel x positif par $f(x) = \sqrt{x}$.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Sa représentation graphique de f dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Soit h un réel positif.
Pour étudier la dérivabilité de f en 0, on détermine le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, le nombre $\sqrt{h}$ tend vers 0 en étant positif.
Donc l'inverse de $\sqrt{h}$ tend vers $+\infty$.
On en déduit que lorsque h tend vers 0, le taux de variation de la fonction entre 0 et h tend vers $+\infty$.
Ainsi, le taux de variation ne tend pas vers un nombre réel.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

1. Expliquer comment, à l'aide de la représentation graphique de f, on peut conjecturer que cette fonction n'est pas dérivable en 0.
2. Expliquer pourquoi on considère un réel h positif.
3. Expliquer pourquoi lorsque h tend vers 0, l'inverse de $\sqrt{h}$ tend vers $+\infty$.
On peut remplir pour cela le tableau suivant.

h	0,5	0,1	0,01	0,001	0,000 1	10^{-6}	10^{-8}
$\frac{1}{\sqrt{h}}$							

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit f une fonction dérivable en un réel a.
> Au point d'abscisse a, la tangente à la courbe représentative de f a pour équation :
> $$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

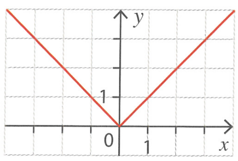
En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- La tangente est une droite dont l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$.
- Exprimer la valeur du coefficient directeur de cette droite en fonction de a.
- En remarquant que le point A de coordonnées $(a\,; f(a))$ appartient à cette droite, exprimer en fonction de a son ordonnée à l'origine.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Soit f la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.



En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.

- Montrer que le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$, où $h \neq 0$, est égal à $\dfrac{|h|}{h}$.
- Pour h strictement positif, déterminer le taux de variation entre 0 et $0 + h$.
- Pour h strictement négatif, déterminer le taux de variation entre 0 et $0 + h$.

Utiliser différents raisonnements

Soient une fonction f définie sur un intervalle I et deux nombres distincts a et b appartenant à I.

1 Montrer que, si f est croissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est positif.

2 De façon analogue, montrer que, si f est décroissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est négatif.

> **Montrer une implication**
>
> Une implication est une propriété qui s'écrit :
> $$P \Rightarrow Q.$$
> Cela signifie :
> si P est vraie, alors Q est vraie.

Apprendre par le texte & la vidéo

5 VIDÉOS DE COURS

Taux de variation

Soient une fonction f définie sur un intervalle I et deux nombres distincts a et b appartenant à I.
Le **taux de variation de f entre a et b** est le nombre :

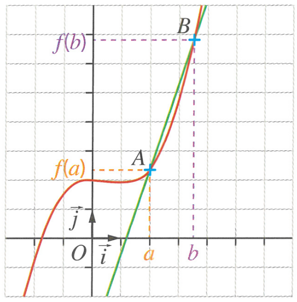
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Interprétation graphique

A est le point d'abscisse a de la courbe représentative de f et B le point d'abscisse b.

La droite (AB), appelée sécante à la courbe représentative de f, a pour pente le taux de variation :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Taux de variation et variation

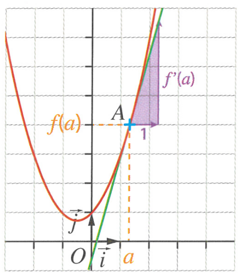
Soient une fonction f définie sur un intervalle I et deux nombres distincts a et b appartenant à I.

- Si f est croissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est positif.
- Si f est décroissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est négatif.

Tangente

Soient une fonction f dérivable en un réel a et le point A de coordonnées $(a\,;f(a))$.

- La **tangente à la courbe** représentative de f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



- Équation de la tangente :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Nombre dérivé

Soient une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre a appartenant à I.
Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.

On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers zéro.

Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en a**.
On le note $f'(a)$.

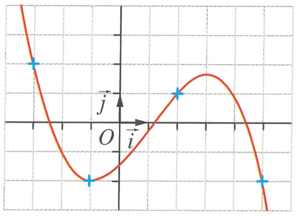
Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 6 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

1. Déterminer le taux de variation de f entre 0 et 1.
2. Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 3.

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ représentée graphiquement ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement :
a. le taux de variation de f entre -3 et -1 ;
b. le taux de variation de f entre -1 et 5.
2. Sans les déterminer, justifier le signe des taux de variation de f :
a. entre -1 et 2 ;
b. entre 3 et 5.

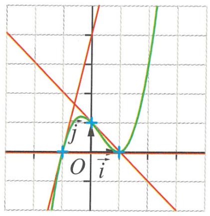
3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

1. a. Déterminer le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$.
b. Que devient ce taux quand h tend vers 0 ?
c. En déduire la valeur de $f'(2)$.
2. En utilisant la méthode de la question 1, montrer que f est dérivable en -1 et donner la valeur de $f'(-1)$.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 - 4.$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable en tout réel a et exprimer $f'(a)$ en fonction de a.
2. En déduire $f'(1)$.

5 La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et trois de ses tangentes ont été tracées.



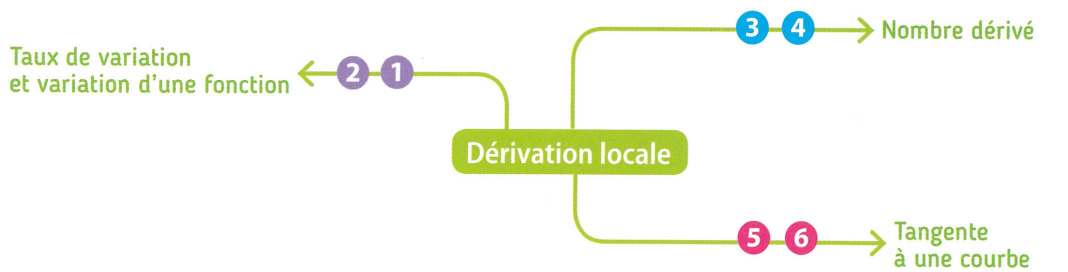
1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Déterminer graphiquement $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(-1)$.

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1+x}{x^2+1}.$$

On admet que $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f'(0) = 1$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de f.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f.

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Nombre dérivé à gauche et à droite

Objectif
Analyser le résultat d'un algorithme.

On considère la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1 **a.** Écrire une fonction en Python qui renvoie le taux de variation de f entre a et $a + h$, avec a et h donnés.

b. Quelles valeurs choisir en arguments afin de déterminer une valeur approchée de $f'(4)$?

2 Certaines calculatrices déterminent le nombre dérivé à l'aide d'une méthode décrite par la fonction en Python ci-dessous.

a. Recopier ou ouvrir ce script et tester cette fonction pour différentes valeurs de a et de précision.

b. Expliquer la méthode utilisée.

c. Modifier la fonction pour vérifier le nombre dérivé affiché par ce type de calculatrice en 0 pour la fonction qui à tout réel x associe $|x|$. Que penser du résultat ?

```python
def moyenne(a,precision):
    ecart=1
    h=1
    i=1
    nd=0
    while ecart>=precision and i>1e-10:
        vg=((a-i)**2-a**2)/(-i)
        vd=((a+i)**2-a**2)/i
        ecart=abs(vd-vg)
        i=i/10
        nd=(vg+vd)/2
    return nd
```

TP 2 Test de médicament

Objectif
Travailler sur des listes.

Lors du test d'un nouveau médicament, on modélise la présence du médicament injecté dans le sang par intraveineuse par la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par $f(t) = \dfrac{2}{1+t}$, où t est exprimé en h et $f(t)$ est exprimé en mg.

On admet que le médicament se diffuse presque instantanément dans le sang lors de son introduction et on considère que le médicament produit un effet si l'organisme en assimile au moins 0,01 mg$\cdot$h^{-1}.

1 **a.** On a écrit le programme ci-contre. Recopier ou ouvrir ce programme. Qu'obtient-on ?

b. Expliquer l'allure de la courbe obtenue. Comment modifier le script pour obtenir une courbe plus régulière ?

c. Que représentent les coefficients directeurs des sécantes à la courbe correspondant aux segments obtenus ?

```python
import matplotlib.pyplot as plt
def f(t):
    return 2/(1+t)
a=0
b=10
n=5
h=(b-a)/n
abs=[a+i*h for i in range (n+1)]
ord= [f(t) for t in abs]
plt.plot(abs,ord,'b')
plt.show()
```

2 **a.** Écrire une fonction en Python qui renvoie la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

b. Obtenir cette liste pour un pas de 2 h. Puis pour un pas de 0,5 h.

c. Interpréter les valeurs des éléments de la liste dans le contexte de l'exercice.

TP 3 Méthode de Newton-Raphson

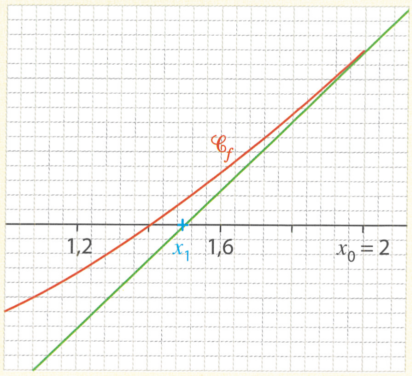
Objectif
Déterminer une valeur approchée d'un nombre réel avec un algorithme.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ pour } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $\sqrt{2}$.
On va utiliser une méthode pour calculer une valeur approchée de la solution de cette équation $f(x) = 0$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 > 1$.
2. Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et T_0 vérifie $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
   On réitère ce procédé en remplaçant x_0 par x_1 pour obtenir une abscisse x_2 puis ainsi de suite.



3. On considère $x_0 = 2$.
   Calculer x_1 et x_2.
4. Recopier ou ouvrir le script suivant puis le compléter.

```
def f(x):
    return x**2-2

def nombre_dérivé(f,a):
    h=1e-10
    return(f(a+h)-f(a))/h

def méthode_Newton(n):
    x=2
    for i in range(n):
        x=x-...
    return ...
```

5. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtenue après 10 étapes.
   La comparer avec la valeur affichée par sqrt(2).

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour déterminer le nombre de subdivisions d'un intervalle avec un pas donné, on utilise la partie entière.
  La commande en Python est `floor` et se trouve dans la bibliothèque math.
  On commence le programme par
  `from math import floor`
- Pour déterminer une racine carrée, on utilise la commande `sqrt`. Elle se trouve dans la bibliothèque math.
  On commence le programme par
  `from math import sqrt`
- Notation scientifique : 3×10^5 s'écrit : `3e-05`

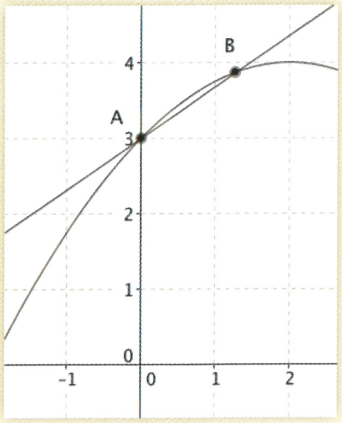
TP Outils numériques

TP 4 Sécantes et tangentes LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Travailler sur la position limite d'une sécante.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

1. Dans un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique de f.
2. Placer sur la courbe le point A, d'abscisse 0 ainsi qu'un point B quelconque distinct de A puis tracer la droite (AB). Afficher la pente de la droite (AB).
3. Rapprocher le point B du point A. En déduire une conjecture sur la valeur du nombre dérivé de f en 0.
4. Tracer la tangente à la courbe représentative de f. Confirme-t-elle la conjecture ? Argumenter.
5. Reprendre la démarche précédente au point d'abscisse 2 puis au point d'abscisse 6.



TP 5 Calcul formel de taux de variation LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Comprendre le lien entre taux de variation et nombre dérivé.

1. On considère la fonction cube :

$$f : x \mapsto x^3 \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie, définir la fonction f et déterminer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ où h est un nombre réel.
En déduire le nombre dérivé de f en 1.

b. Déterminer, s'il existe, le nombre dérivé de f en 3. Puis en -2.

c. De façon générale et en utilisant le calcul formel, déterminer le taux de variation de f entre a et $a + h$.
En déduire le nombre dérivé de f en a réel.

d. Vérifier l'expression à l'aide du calcul formel.

2. On considère maintenant la fonction racine carrée :

$$g : x \mapsto \sqrt{x} \text{ définie sur } [0 ; +\infty[.$$

a. Avec le calcul formel, déterminer le taux de variation de g entre 2 et $2 + h$ où h est un nombre réel positif.
Permet-il de conclure ?

b. Déterminer directement $g'(2)$ à l'aide du calcul formel.

c. On veut retrouver par le calcul la valeur de $g'(2)$ trouvée par calcul formel.
Calculer $(\sqrt{h+2} - \sqrt{2})(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})$ et en déduire une simplification du taux de variation.
Conclure.

d. De façon générale, déterminer le nombre dérivé de g en $a \in]0 ; +\infty[$ puis vérifier à l'aide du calcul formel.

TP 6 Approximation affine et évolutions successives

Objectif
Travailler sur l'équation de la tangente.

Un journaliste affirme que deux hausses successives des prix de x % donnent au final une hausse des prix d'environ $2x$ %.
On veut vérifier ses propos.

1 Point de vue numérique TABLEUR

a. Rappeler comment déterminer le taux d'évolution global T de deux évolutions successives de même taux t.

b. Reproduire la ligne 1 du tableau ci-dessous puis remplir la colonne A constituée de 100 taux d'évolution.
On prendra un incrément de 0,01 jusqu'à la cellule A101.

	A	B	C	D	E
1	Taux d'évolution t	Coefficient multiplicateur sur une période	Coefficient multiplicateur global sur deux périodes	Taux global sur deux périodes	Double du taux t
2	0,01	1,01			
3	0,02	1,02			
4					

c. Quelles formules doit-on entrer dans les cellules B2, C2, D2 et E2 pour compléter les colonnes B, C, D et E jusqu'à la ligne 101 par recopie vers le bas ?

d. Compléter ainsi le tableau jusqu'à la ligne 101.

e. Que peut-on en déduire sur les propos du journaliste ?

2 Point de vue graphique LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a. Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et tracer la représentation graphique de f.

b. Placer sur cette courbe le point A d'abscisse 1 puis tracer la tangente à la courbe représentative de f.
Lire l'équation réduite de cette tangente puis montrer que son équation peut aussi s'écrire sous la forme $y = 1 + 2(x - 1)$.

c. En notant $h = x - 1$ et en développant $(1 + h)^2$, faire le lien avec ce qui a été observé à la question précédente.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie dynamique

- Pour construire une tangente Tangentes
- Pour afficher la pente Pente

Calcul formel avec un logiciel de géométrie

- Pour calculer un nombre dérivé en a : définir la fonction f dans la fenêtre *Saisie*.
- Dans *Affichage*, sélectionner *Calcul formel* puis dans cette fenêtre, taper $f'(a)$ et le taux de variation de la fonction en a.
- $\sqrt{x}$: sqrt(x)