Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une écriture fractionnaire.

a. $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ **b.** $\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$

c. $\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}$ **d.** $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$

2 **1.** Par combien faut-il multiplier $\frac{\pi}{6}$ si l'on veut obtenir 2π ?

2. Par combien faut-il multiplier $\frac{\pi}{6}$ si l'on veut obtenir 6π ?

3. Par combien faut-il multiplier $\frac{\pi}{4}$ si l'on veut obtenir 2π ?

3 On sait que $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.
• Donner une valeur approchée à 0,1 près des nombres $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 **1.** Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?
2. Quelle est la longueur d'un quart du cercle trigonométrique ?
3. Quelle est la longueur du cercle trigonométrique parcouru trois fois intégralement ?

5 QCM
Donner la seule réponse correcte parmi les trois proposées.

1. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ est :

ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⓑ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⓒ $-\frac{1}{2}$

2. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ est :

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$

3. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)$ est :

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ –1

4. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{144\pi}{3}\right)$ est :

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ –1

6 En utilisant la périodicité des fonctions sinus et cosinus, calculer la valeur exacte de :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)$

b. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)$

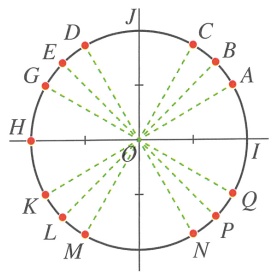
c. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)$

d. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-4\pi\right)$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

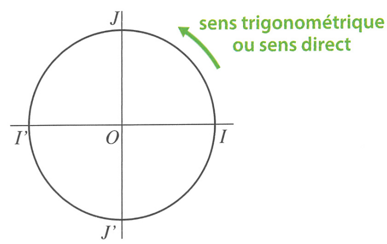
Automatismes

7 À partir de la figure ci-dessous, associer chaque point à la mesure d'angle qui lui correspond.



Point			Mesure d'angle
P	•	•	$-\frac{5\pi}{6}$
H	•	•	$\frac{-4\pi}{3}$
D	•	•	$\frac{5\pi}{2}$
K	•	•	$\frac{-\pi}{4}$
J	•	•	$\frac{3\pi}{3}$

8 VRAI OU FAUX
Préciser si chacune de ces affirmations est vraie ou fausse. Justifier la réponse par un dessin.



1. Pour tout $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geqslant 0$.

2. Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}\,;\pi]$, $\cos(x) \geqslant 0$.

3. Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;0]$, $\sin(x) \geqslant 0$.

4. Pour tout $x \in [\pi\,;\frac{3\pi}{2}]$, $\sin(x) \leqslant 0$ et $\cos(x) \leqslant 0$.

9 **1.** Exprimer $\sin(x+2\pi)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Exprimer $\cos(x+2\pi)$ en fonction de $\cos(x)$.
3. Exprimer $\sin(-x)$ en fonction de $\sin(x)$.
4. Exprimer $\cos(-x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le point-image du réel $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est aussi image du réel $\frac{11\pi}{2}$.
2. La valeur de $\sin\left(\frac{-5\pi}{2}\right)$ est égale à 0.
3. Le nombre $a = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ est égal à $-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
4. Si $\cos(x) = 0$, alors $\sin(x) = 1$.
5. La fonction sinus est négative sur $[-\pi\,;0]$.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants. Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

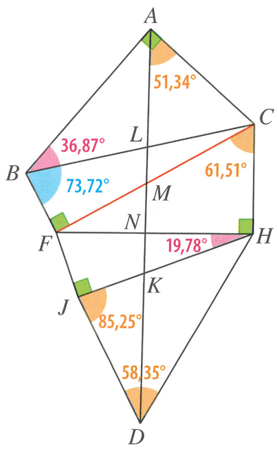
Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

- Chercher sur Internet les mille premières décimales du nombre π.
- Déterminer la fréquence des chiffres 0 à 9 dans la suite des mille décimales trouvées.
- Combien connaît-on actuellement de décimales du nombre π ? Sont-elles périodiques, c'est-à-dire peut-on prévoir la décimale d'un rang à l'avance ?
- Chercher des caractéristiques particulières sur les décimales du nombre π.

Exposé

voir p. 206

La technique de la triangulation plane ci-dessous a été employée par Delambre et Méchain pour mesurer un arc de méridien.
On part d'un point A situé sur le méridien à mesurer. On veut mesurer la portion du méridien notée AD.
On construit un réseau de points sur le terrain, situés à divers endroits comme le sommet d'une colline, le haut d'une tour ou de tout autre endroit accessible, de telle sorte à constituer des triangles rectangles.
On mesure les angles de tous les triangles rectangles avec un goniomètre.
On mesure sur le terrain une grandeur facilement accessible (par exemple $FC = 7{,}68$ km).



Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

On utilise une formule des sinus suivante dans un triangle quelconque, par exemple dans le triangle ALC : $\frac{AL}{\sin(\widehat{C})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{L})}$.
Déterminer une valeur approchée de la longueur AD en km.

Exercices

Le radian

1 Recopier et compléter le tableau suivant.

Mesure en degré	90	210	…	…	15	…
Mesure en radian	…	…	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{55\pi}{2}$

2 Convertir en radian les mesures d'angles exprimées en degré.

a. 150° b. 12° c. 40° d. 195°

3 Convertir en degré les mesures d'angles exprimées en radian.

a. $\frac{2\pi}{9}$ b. $\frac{7\pi}{24}$ c. $\frac{5\pi}{12}$

4 Sur le cercle trigonométrique, placer le point M image de $\frac{9\pi}{4}$ et le point N image de $-\frac{7\pi}{3}$.

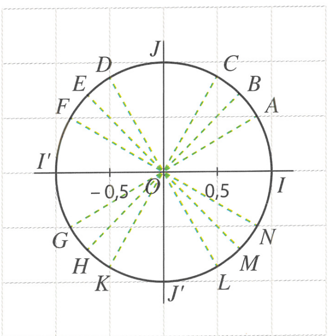
• Quelle est la longueur du « petit » arc de cercle d'extrémités M et N ?

5 Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels.

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $-\frac{3\pi}{4}$ c. $\frac{17\pi}{6}$ d. $\frac{5\pi}{2}$

Enroulement de la droite numérique

6



1. Sur le cercle ci-dessus, quels sont les points-images des réels suivants ?

a. $-\pi$ b. $\frac{\pi}{2}$ c. $-\frac{\pi}{2}$ d. 4π e. -3π.

2. Sur le cercle ci-dessus, quels sont les points-images des réels suivants ?

a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{\pi}{4}$ c. $\frac{\pi}{3}$

3. En déduire les points-images des nombres réels ci-dessous.

a. $\frac{\pi}{6}+\pi$ b. $\frac{\pi}{3}+2\pi$ c. $\frac{5\pi}{4}$ d. $\frac{13\pi}{3}$

4. Donner cinq nombres réels qui ont D comme point-image.

7 VRAI OU FAUX

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Les nombres $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

2. Les nombres $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

3. Les nombres $\frac{5\pi}{2}$ et $-\frac{7\pi}{2}$ ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

4. Les nombres $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

8 1. Placer sur le cercle trigonométrique le point-image du nombre $\frac{\pi}{3}$.

2. Donner deux nombres réels, l'un positif, l'autre négatif, qui ont ce même point pour point-image.

9 Associer entre eux les réels de la 1re et de la 2e ligne qui ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

• π • $\frac{\pi}{2}$ • $-\frac{\pi}{4}$ • 12π • $-\frac{7\pi}{4}$ • $\frac{3\pi}{2}$ • $\frac{\pi}{3}$ • $\frac{7\pi}{6}$

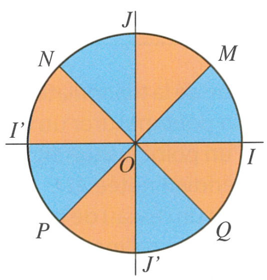
• 2π • $\frac{7\pi}{4}$ • $-\frac{5\pi}{6}$ • $\frac{7\pi}{3}$ • 3π • $\frac{\pi}{4}$ • $\frac{5\pi}{2}$ • $-\frac{5\pi}{2}$

10 1. Tracer un cercle trigonométrique en prenant comme unité 3 cm.

2. Placer les points-images des réels suivants.

• $\frac{3\pi}{2}$; • $-\frac{5\pi}{2}$; • 5π ; • -6π ; • $\frac{2\pi}{3}$; • $\frac{11\pi}{6}$; • $-\frac{7\pi}{4}$

11 Le cercle suivant est le cercle trigonométrique partagé en huit parts égales.



• Pour chacun des points I, M, J, N, I', P, J' et Q, déterminer un réel dont il est le point-image.

12 Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels de chaque couple ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1. $\frac{18\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$ 2. $-\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$

3. $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{19\pi}{6}$ 4. $-\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{17\pi}{4}$

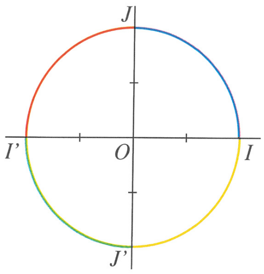
Cosinus et sinus d'un nombre réel

13 Sans utiliser une calculatrice, donner la valeur exacte des nombres suivants.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **2.** $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ **3.** $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

4. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **5.** $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ **6.** $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

14 On considère le cercle trigonométrique ci-contre.

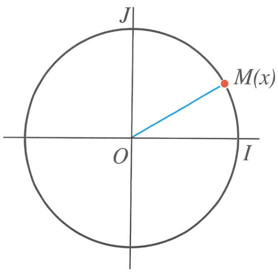


1. De quelle couleur est un point du cercle qui a une abscisse négative et une ordonnée positive ?

2. De quelle couleur est le point image de $-\frac{\pi}{6}$?

3. De quelle couleur est le point image de $-\frac{2\pi}{3}$?

15 On considère sur le cercle trigonométrique le point M image du réel x.



1. Reproduire le cercle.

2. Placer sur le cercle les points N et P images des réels $x+\frac{\pi}{2}$ et $x+\pi$.

3. En utilisant le cercle, donner la valeur de $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(x+\pi)$ et $\sin(x+\pi)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

16 CALCULATRICE

Communiquer

1. Le résultat ci-contre, affiché sur la calculatrice est-il une valeur exacte ? Justifier la réponse.

```
sin (π÷4)
                0.0137073546
```

2. Le résultat ci-contre, affiché sur la calculatrice est-il une valeur exacte ? Justifier la réponse.

```
cos (-2π÷3)
                          -1/2
```

17 **Raisonner, communiquer**

1. Peut-on trouver une valeur de x telle que : $\cos(x) = 1{,}4$? Justifier la réponse.

2. a. Tracer un cercle trigonométrique.

b. Placer sur l'axe des cosinus le nombre 0,8.

c. Peut-on trouver une ou plusieurs valeurs de x telles que $\cos(x) = 0{,}8$? On peut s'aider du cercle trigonométrique.

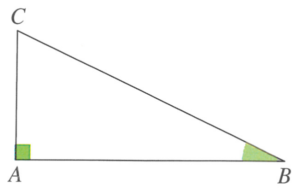
d. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée au dixième de x telle que $\cos(x) = 0{,}8$.

18 PRISE D'INITIATIVE

1. A-t-on $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$ pour tous nombres réels x et y ?

2. A-t-on $\cos(x+y) = \cos(x) + \cos(y)$ pour tous nombres réels x et y ?

19 **1.** Rappeler la définition de la tangente de l'angle aigu $\widehat{CBA}$ dans un triangle ABC rectangle en A, vue en classe de troisième.



2. On suppose que $\widehat{CBA} = 25°$.
Recopier et compléter le tableau de proportionnalité suivant.

Angle en degré	180	25
Angle en radian		

3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice réglée en mode radian, déterminer une valeur approchée de $\tan\left(\frac{5\pi}{36}\right)$ au centième près.

20 **1.** Quelle est la valeur d'un angle en radian dont la mesure appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et dont le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus vaut 0,5 ?

2. Quelle est la valeur du cosinus d'un angle en radian situé dans $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ dont le sinus vaut 0,2 ?

21 Donner la valeur exacte des nombres suivants.

a. $\cos(2014\pi)$ **b.** $\sin\left(\frac{125\pi}{2}\right)$

c. $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ **d.** $\sin\left(\frac{-95\pi}{4}\right)$

22 Donner la valeur exacte des deux expressions suivantes.

$$A = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

23 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3\pi\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

24 On admet le résultat suivant :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

• En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

25 Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

$$A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

VA PIANO

Exercices

26 ALGO PYTHON

1. Le résultat ci-dessous affiché dans la console de Python est-il une valeur exacte ? Justifier la réponse.

```
>>> from math import pi,sin
>>> sin(pi/4)
0.7071067811865475
```

2. Déduire de la question précédente une valeur approchée de $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

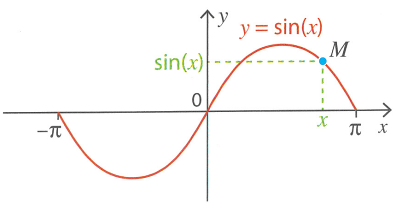
3. En utilisant la console Python, calculer une valeur approchée de $\cos\left(\frac{5567\pi}{4}\right)$.

27 PRISE D'INITIATIVE

Existe-t-il des réels a et b tels que $\cos(a+b) = \cos(a-b)$?

Fonctions sinus et cosinus

28



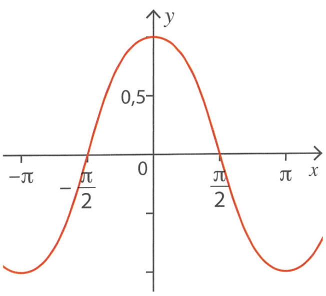
1. À l'aide de la courbe de la fonction sinus tracée ci-dessus, résoudre graphiquement les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$:

a. $\sin(x) = 0{,}5$ **b.** $\sin(x) = 1$ **c.** $\sin(x) = 0$

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide du cercle trigonométrique.

29 **1.** À l'aide de la courbe de la fonction cosinus tracée ci-dessous, résoudre graphiquement les inéquations suivantes sur $]-\pi\,;\pi]$.

a. $\cos(x) \geqslant 0$ **b.** $\cos(x) < 0{,}5$ **c.** $\cos(x) \leqslant 1$



2. Retrouver les résultats précédents à l'aide du cercle trigonométrique.

30 PRISE D'INITIATIVE

Résoudre l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

a. sur l'intervalle $[0\,;\pi]$;

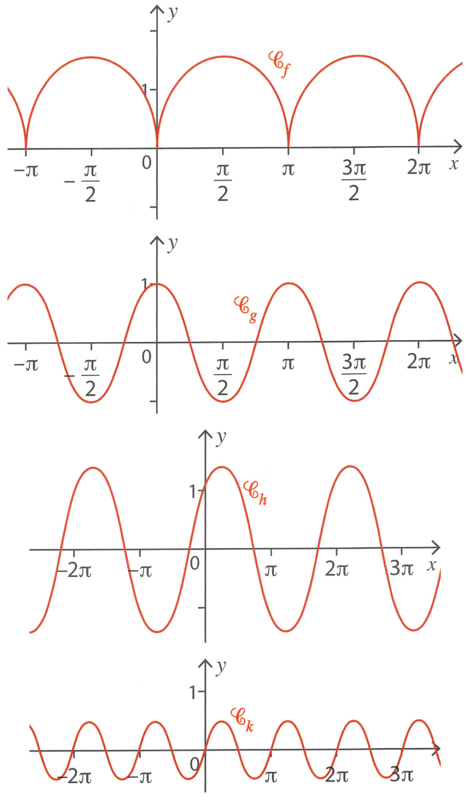
b. sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

31 À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes.

a. $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\sin(x) < -\frac{1}{2}$ **c.** $2\cos(x) - \sqrt{2} \leqslant 0$

32 Chacune des courbes tracées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction.

• Dans chaque cas, conjecturer la périodicité et la parité des fonctions.



33 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2+\cos x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que la fonction f est paire.

3. Montrer que la fonction f est périodique et de période 2π.

34 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x).$$

1. Montrer que la fonction f est périodique et de période π.

2. Déterminer la parité de la fonction f.

35 CALCULATRICE

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) - \cos(x).$$

1. En utilisant la calculatrice, conjecturer la période de la fonction f.

2. Démontrer le résultat précédent.

3. Déterminer la parité de la fonction f.

36 **1.** Tracer un cercle trigonométrique.
2. Placer sur le cercle les points images des réels donnés.
a. $A(\pi)$ **b.** $B\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **c.** $C\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
d. $D\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **e.** $E\left(\frac{15\pi}{6}\right)$ **f.** $F\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
3. Déterminer le sinus et le cosinus de chaque réel précédent.

37 VRAI OU FAUX
Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses et justifier par un dessin.
1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **2.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(\pi)$ **4.** $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

38 **Modéliser, communiquer**
1. Déterminer deux entiers consécutifs a et b tels que 1 appartienne à $\left[\frac{\pi}{a} ; \frac{\pi}{b}\right]$.
2. Placer approximativement sur un cercle trigonométrique le point C, point image du nombre 1.

39 Compléter les tableaux suivants par lecture graphique sur le cercle trigonométrique.
1.

x	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					

2.

x	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					

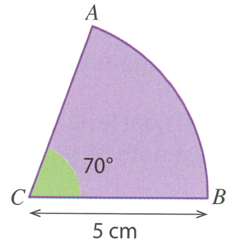
40 **1.** Placer sur le cercle trigonométrique les points images des nombres réels suivants.
$$\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4}.$$
2. Rappeler les valeurs des cosinus et sinus des réels $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.
3. En utilisant des symétries, déterminer les nombres suivants.
$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) ; \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) ; \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) ; \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

41 CALCULATRICE
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} du nombre $\cos(5)$ avec la calculatrice réglée en mode radian.

42 PRISE D'INITIATIVE
1. Donner trois valeurs telles que l'égalité $\sin(2x) = 2\sin(x)$ soit vraie.
2. Est-elle vraie pour tout réel x ?

43 VRAI OU FAUX
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.
1. Pour tout nombre réel x, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
2. Il existe un unique nombre réel x qui vérifie $\sin(x) = 0$.
3. Il existe un unique nombre réel a qui vérifie $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a$.
4. Pour tout réel x, on a $\cos(x) = \sin(x)$.

44 Le secteur angulaire ci-dessous a un angle $\widehat{BCA}$ égal à 70° et un rayon égal à 5 cm.



1. Quelle est son aire ?
2. Quel est son périmètre ?

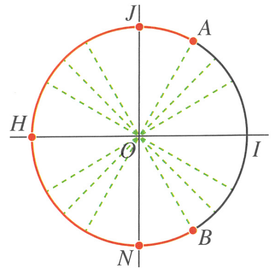
45 **Calculer, raisonner**
1. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ tel que $\cos(x) = 0{,}15$.
a. Réaliser un dessin.
b. Quelle est la valeur exacte de $\sin(x)$?
2. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -0{,}4$.
a. Réaliser un dessin.
b. Quelle est la valeur exacte de $\cos(x)$?

46 Donner les valeurs exactes des nombres réels suivants.
a. $\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ **b.** $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$
c. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ **d.** $-\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$
e. $\sin(14\pi)$ **f.** $\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right)$

47 Sur le cercle trigonométrique, placer le point M image de $\frac{17\pi}{6}$ et le point N image de $\frac{13\pi}{4}$.
• Quelle est la longueur du « petit » arc de cercle d'extrémités M et N ?

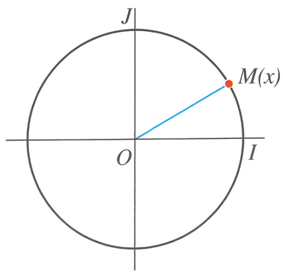
48 CALCULATRICE
Déterminer la valeur exacte des nombres suivants et vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.
1. $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
2. $B = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
3. $C = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

49 Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on s'intéresse aux points situés sur la partie rouge.
Soit x un réel associé à un de ces points en rouge.



• Déterminer le signe de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de la position du point image associé au réel x.

50 Soit x un nombre réel dont le point image sur le cercle trigonométrique est noté M comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Reproduire le cercle trigonométrique et placer le point N image de $x + \pi$. Quelle est la position relative de N par rapport à M ?
2. En déduire $\cos(x + \pi)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x + \pi)$ en fonction de $\sin(x)$.
3. Reprendre les mêmes questions avec le point P, point image de $-x$.
4. Reprendre les mêmes questions avec le point Q, point image de $x + \frac{\pi}{2}$.

51 1. On donne $\cos(x) = -0{,}8$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.
Déterminer $\sin(x)$.
2. On donne $\sin(x) = \frac{2}{3}$ et $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Déterminer $\cos(x)$.
3. On donne $\cos(x) = 0{,}6$ et $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$.
Déterminer $\sin(x)$.

52 Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes.
1. $\sin(-x) + \cos(-x)$
2. $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
3. $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$.

53 CALCULATRICE **Signal sinusoïdal**

Un signal sinusoïdal est caractérisé par la formule $g(t) = G\sin(\omega t + \phi)$, où t désigne le temps en seconde. La nature du signal peut correspondre à une pression (son), à un déplacement (corde qui vibre), à une quantité d'électrons en déplacement (courant électrique) ou encore à une onde électromagnétique.
G est l'amplitude du signal, appelée aussi valeur de crête. ω est la pulsation de la grandeur, exprimée en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. ϕ est la phase à l'origine et est exprimée en radian.
Le nombre $\omega t + \phi$ est la phase instantanée et est exprimée en radian.
Par exemple, si on mesure une pression sonore, l'unité du signal est le décibel (db). Les précédentes grandeurs sont inchangées.
1. Exprimer la fonction g d'un signal sonore dont l'amplitude vaut 15 db, la pulsation 2 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et la phase $\frac{\pi}{6}$ rad ?
2. Quelle est, au bout d'une durée de 120 s, la valeur (en db) du signal sonore ?
3. Montrer que la fonction g est périodique de période π.
4. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de la fonction g.
5. g est-elle paire ? impaire ? Justifier la réponse.

54 ALGO PYTHON
En Inde aux VIᵉ et VIIᵉ siècles, la trigonométrie a connu une grande avancée théorique, en particulier grâce au mathématicien Bhaskara I, qui a proposé la formule suivante pour calculer une valeur approchée du sinus d'un angle a donné en degré :
$$\sin(a) = \frac{4 \times (180 - a) \times a}{40\,500 - (180 - a) \times a}$$
1. Écrire une fonction `sinus` en Python qui calcule le sinus d'un angle a exprimé en degré avec la formule ci-dessus.
2. Écrire une fonction `compare` qui calcule l'erreur entre la valeur de $\sin(a)$ calculée avec la formule de Bhaskara I et la valeur de $\sin(a)$ calculée avec la fonction sinus de l'ordinateur.

55 **1. a.** Résoudre l'équation $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

b. Résoudre l'équation $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{2} = 0$.

c. Résoudre l'équation $x^2 - 1 = 0$.

2. Soit a un réel. Résoudre l'équation :
$\sin(a)x^2 - 2\cos(a)x - \sin(a) = 0$.

3. En quoi cette dernière équation généralise les équations de la question **1**.

56 Résoudre l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$.

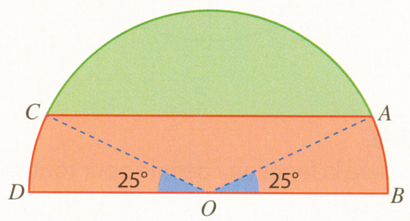
57 **1.** Montrer que 1 est racine du polynôme :
$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8.$$

2. Vérifier que $(X-1)(2X^2 - 15X - 8) = 2X^3 - 17X^2 + 7X + 8$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$2\sin^3(x) - 17\sin^2(x) + 7\sin(x) + 8 = 0.$$

58 PRISE D'INITIATIVE

On considère la figure suivante constituée d'un demi-cercle de rayon 5 cm.

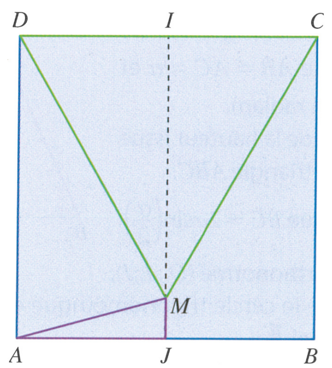


1. Laquelle des surfaces rouge ou verte a l'aire la plus grande ?

2. Cela est-il vrai quel que soit le rayon du cercle ?

59 **Sinus et cosinus de $\frac{\pi}{12}$**

Dans un carré $ABCD$ de côté a, on trace le triangle équilatéral DMC.
I et J sont les milieux respectifs de $[DC]$ et $[AB]$.



1. Montrer que $\widehat{MAJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{12}$.

2. Calculer IM, MJ puis AM en fonction du côté a.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

60 ALGO PYTHON

Lorsqu'un angle a une mesure x (exprimée en radian) estimée proche de 0, on peut avoir une assez bonne approximation de la valeur de $\cos(x)$ en utilisant le polynôme du second degré $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. On a alors :
$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

1. On appelle erreur d'approximation la différence $\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$.

Écrire une fonction erreur en Python qui calcule l'erreur d'approximation pour une valeur de x donnée.

2. Quelle est la valeur de l'erreur pour $x = 0{,}1$ et pour $x = 0{,}001$.

3. On admet que, pour tout réel x, on a :
$$\cos(x) \geqslant f(x)$$

On donne le script suivant.

```python
x=0
while erreur(x)<0.01:
    x=x+0.1
```

a. Recopier le programme dans un éditeur Python.

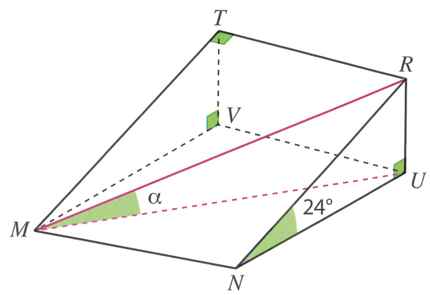
b. Quelle est la valeur de la variable x après l'exécution de ce programme ?

c. Expliquer le rôle de ce programme.

4. Modifier le programme précédent pour pouvoir choisir la précision de l'erreur.

61 **Une rampe d'accès**

La figure ci-dessous est le dessin en perspective d'une rampe d'accès pour véhicules.



$MN = 8$ m ; $NU = 10$ m ; $MNRT$ et $MNUV$ sont des rectangles. L'angle $\widehat{UNR}$ mesure 24°.

1. Calculer la valeur exacte de RN et donner une valeur approchée au cm près.

2. En utilisant le triangle MNR, calculer la valeur exacte de MR et une valeur approchée au cm près.

3. Calculer la longueur exacte de MU.
En donner une valeur approchée au cm près.

4. Déduire de la question **3** une valeur approchée de $\cos(\alpha)$ à 10^{-1} près.

5. Donner une valeur approchée de l'angle α au degré près.

VERS
L'épreuve écrite

62 La valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. À l'aide du cercle trigonométrique, en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

63 La valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des réels $\frac{7\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}$.

3. On considère l'expression :

$$A = \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - 3\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

Déterminer une écriture de A en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

64 QCM

Pour chacune des propositions, donner la bonne réponse sans justifier.

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ a pour valeur :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Si $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ alors $\sin(\pi - \alpha)$ vaut :

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Si $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ alors $\cos(\alpha)$ vaut :

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. L'équation $\cos(x) = -1$ a pour solution :

a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$.

5. L'équation $\sin(x) = 1$ a pour solution :

a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$.

65 On considère l'égalité suivante :

$(\cos(x) + 2\sin(x))^2 + (2\cos(x) - \sin(x))^2 = 5$.

1. L'égalité est-elle vraie pour $x = \frac{\pi}{2}$?

Pour $x = \frac{\pi}{4}$?

2. Démontrer que cette égalité est vraie pour tout nombre réel x.

66 **1.** Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation :

$$\cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation $4\sin^2(x) - 3 = 0$.

67 $IBCDEF$ est un hexagone régulier noté $\mathscr{H}$ inscrit dans le cercle trigonométrique.

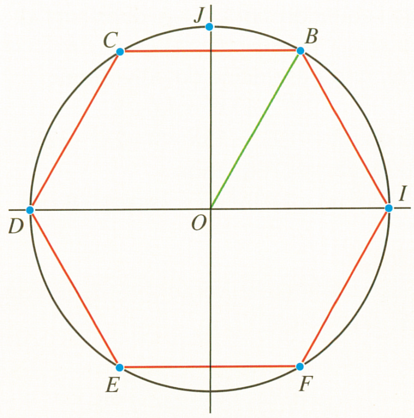
1. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des sommets de $\mathscr{H}$ dans le repère $(O ; I, J)$.

2. Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOB}$?

3. En déduire la nature du triangle IOB.

4. Déterminer le périmètre puis l'aire de $\mathscr{H}$.

5. Quel serait le périmètre d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 5 cm ?



68 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2\cos(x) - 1$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique. Quelle est sa période ?

2. a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la parité de f.

b. Prouver la conjecture précédente.

3. Démontrer que, pour tout réel x, $-3 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

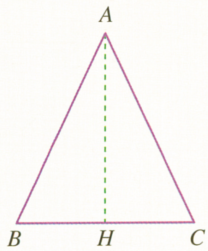
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation $f(x) = -2$ et comparer avec le résultat précédent.

69 **1.** ABC est un triangle isocèle en A, tel que $AB = AC = a$ et $\widehat{BAC} = \alpha$ (en radian).

H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Démontrer que $BC = 2a\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.



2. Dans un orthonormé $(O ; I, J)$, on considère le cercle trigonométrique et le point M associé au réel $\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O ; I, J)$.

b. Calculer IM.

c. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis celle de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

70 ALGO PYTHON CALCULATRICE

1. a. Comparer les nombres $\frac{22}{7}$ et π en utilisant la calculatrice.
b. Montrer que $\frac{179}{57}$ est une meilleure approximation de π que $\frac{22}{7}$.

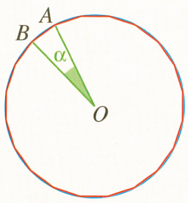
2. On veut déterminer toutes les fractions $\frac{N}{D}$ telles que $\frac{N}{D}$ soit une meilleure approximation de π que $\frac{22}{7}$ pour tous les entiers N et D compris entre 1 et 1 000.
On a écrit le script ci-dessous.

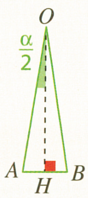
```
1 from math import pi
2 EcartMax=22/7-pi
3 for N in range(1,1001):
4     for D in range(1,1001):
5         if abs(N/D-pi)<EcartMax:
6             print(N,D)
```

a. Expliquer pourquoi il y a deux boucles bornées for.
b. Expliquer l'instruction conditionnelle de la ligne 5 et l'utilisation de la fonction abs (valeur absolue).
3. Modifier le script pour qu'il renvoie le nombre de fractions qui répondent au problème.

71 CALCULATRICE

On construit un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.





1. Combien de triangles identiques au triangle AOB reproduit ci-contre ont été construits ?
2. Quelle est la mesure de l'angle α ?
3. Quelle est la nature du triangle AOB ?
4. Montrer que l'aire du triangle AOB est :

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

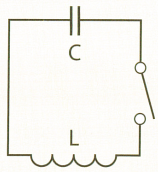
On pourra s'aider de la figure ci-contre.
5. Quelle est alors l'aire a_n du polygone ?
6. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, reproduire puis compléter le tableau suivant.

n	a_n
6	
12	
20	
50	
100	

7. Vers quelle valeur semble tendre l'aire du polygone lorsque n devient grand ?
Interpréter ce résultat.

72 CALCULATRICE **Charge d'un condensateur**

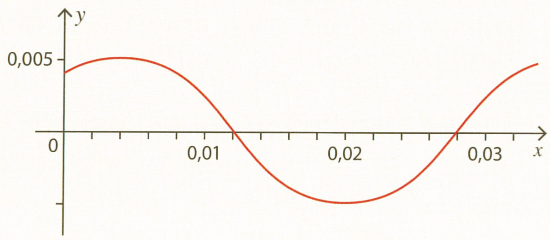
On considère le circuit électrique ci-contre comprenant :
- un condensateur dont la capacité, exprimée en farad, a pour valeur C ;
- une bobine dont l'inductance, exprimée en henry, a pour valeur L ;
- un interrupteur.



Le temps t est exprimé en seconde.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant t.
On admet que la fonction q est définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$q(t) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right).$$

1. Calculer $q\left(t + \frac{\pi}{100}\right)$. En déduire que la fonction q est périodique.
2. Montrer que la fonction q n'est ni paire ni impaire.
3. On a tracé la courbe représentative de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{100}\right]$.



Conjecturer les variations de la fonction q sur cet intervalle. Interpréter le résultat.
4. Quelle était la charge du condensateur à l'instant 0 ?

73 À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.
1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, avec $x \in [-\pi\,;\pi[$.
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, avec $x \in [-\pi\,;\pi[$.
3. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{-1}{2}$, avec $x \in [-\pi\,;3\pi]$.
4. $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = -1$, avec $x \in [-2\pi\,;3\pi]$.

74 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$
2. $2\sin^2(x) + 9\sin(x) + 4 = 0$

75 Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

DIFFÉRENCIATION

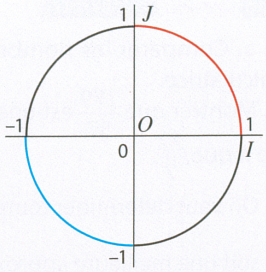
Exercices AP

76 Déterminer le cosinus connaissant le sinus et inversement

On considère le cercle trigonométrique dans un repère $(O\,;I,J)$.

On note a et b deux réels tels que $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, avec :

$$\cos(a) = \frac{1}{4} \text{ et } \sin(b) = -0{,}3.$$



Questions Va piano

1. Dessiner un cercle trigonométrique.
2. Placer le nombre $\frac{1}{4}$ sur l'axe des cosinus.
3. Construire le point image du réel a.
4. Reprendre les mêmes questions pour le réel b.

Questions Moderato

1. Construire le point image du réel a. Quel est le signe de $\sin(a)$?
2. En utilisant le théorème de Pythagore, calculer $\sin(a)$.
3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de a arrondie au dixième.

Questions Allegro

1. Calculer $\cos(b)$.
2. Soit x un réel quelconque tel que $\sin(x) = 0{,}3$.
   a. À combien de points images sur le cercle trigonométrique le réel x peut-il correspondre ?
   b. Déterminer toutes les valeurs possibles du réel x.

77 La formule des sinus

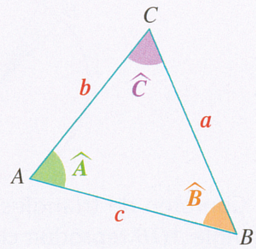
On considère un triangle quelconque ABC.

On note $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ l'angle $\widehat{CBA}$ et $\widehat{C}$ l'angle $\widehat{ACB}$, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On note également $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On admet la formule suivante pour tout triangle, appelée formule des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}.$$



Questions Va piano

1. Vérifier que la formule des sinus est vraie dans le cas où ABC est un triangle équilatéral.
2. On donne à présent $\widehat{A} = 45°$, $a = 5$ cm et $\widehat{B} = 30°$.
   Déterminer les valeurs de $\widehat{C}$ et de c.

Questions Moderato

1. On suppose que le triangle est rectangle isocèle en B et que $AB = 4$ cm.
   Déterminer les nombres a, b et c.
2. Vérifier la formule des sinus pour ce triangle.

Questions Allegro

1. On donne $\widehat{A} = 34°$, $a = 4$ cm et $\widehat{B} = 60°$.
   Déterminer $\widehat{C}$, b et c.
2. On donne $\widehat{A} = 60{,}3°$, $a = 5$ cm, $b = 5{,}75$ cm et $c = 3$ cm.
   Déterminer $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

No problem!

1 Unit circle

A unit circle is a circle whose radius is equal to one. The centre of the circle is the origin O of the coordinate axes.

1. Draw a unit circle. This circle crosses the x-axis in points A and B (x_A is positive.)

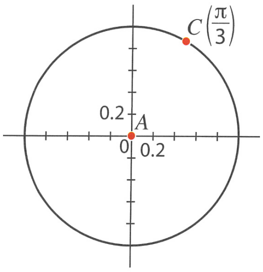
2. Plot one point M on this circle. Let's define the angle $\theta = \widehat{AOM}$.

What is the relationship between the sine and cosine of θ and the coordinates of point M?

2 Target

1. Plot on this unit circle points B, E and D such as $EBCD$ is a square.

2. Give in radian the angles associated to each of these points.



3 Matching

Four graphs, A, B, C and D are shown below. Match the graphs with each of the following equations.

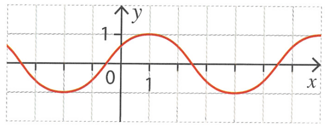
1. $\frac{1}{2}\cos(x)$

2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

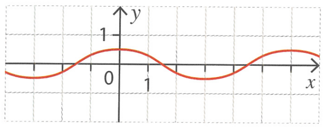
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

4. $\sin(4x)$

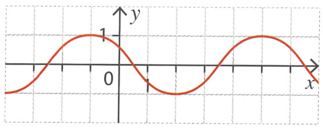
A.



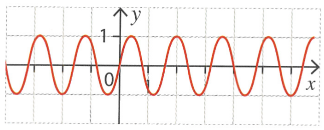
B.



C.



D.



4 A trigonometric function

Let's consider the function defined for any real number by $f(x) = x + \sin(x)$.

1. Sketch the graph of this function in a rectangular coordinate system.

2. Using the graph, solve the equation $f(x) = 0{,}5$.

3. Prove that $f(x) \leqslant x + 1$ for all real x.

Individual work — Dominoes

Make a chain of dominoes placing them end to end. Then create your own game.

$\cos(x+\pi)$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos(x)$	$\cos(\pi - x)$	$-\cos(x)$	1
$\frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos^2(x) + \sin^2(x)$	$\cos(2x)$	$2\cos^2(x) - 1$	$-\cos(x)$