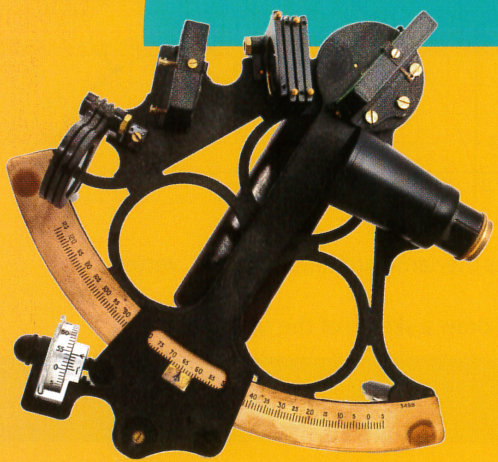
CHAPITRE

3 Fonctions trigonométriques

Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou



Prendre le bon angle avec les fonctions trigonométriques

Regiomontanus

Regiomontanus est le surnom de l'Allemand Johannes Müller, probablement le mathématicien le plus influent du XVe siècle. Astronome, il écrit *De triangulis omnimodis* qui donne à la trigonométrie, non plus un simple rôle utile à l'astronomie mais une place importante à l'étude des côtés, angles et aires des triangles.
La mort subite de Regiomontanus l'a empêché de publier son traité de trigonométrie, ce délai de publication a grandement affaibli son influence parmi ses contemporains.

On présente ci-dessous un exemple des problèmes que l'on rencontre dans l'ouvrage de Regiomontanus.

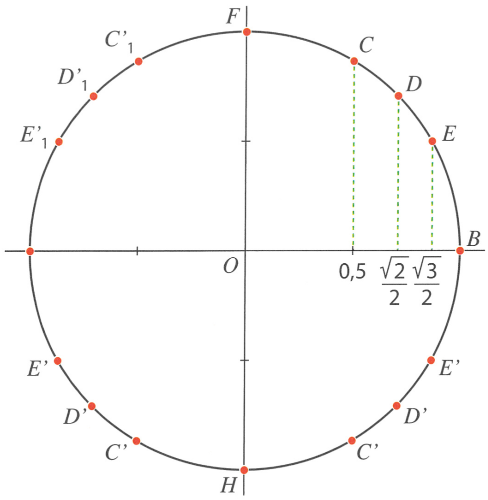
« Si la base d'un triangle et l'angle opposé sont connus, et si la hauteur sur la base ou l'aire est donnée, alors les côtés peuvent être trouvés. »

Regiomontanus disposait du cosinus, du sinus et de la tangente. Traduire l'énoncé du problème précédent par une figure, puis donner des valeurs arbitraires aux grandeurs connues avant de déterminer une valeur approchée des côtés.

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Symétries



Donner les abscisses de tous les points de la figure ci-dessus en utilisant les symétries implicites.

2 Écritures fractionnaires

Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ **b.** $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$

c. $\pi-\frac{2\pi}{3}$ **d.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$

e. $\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}$ **f.** $-\frac{3\pi}{4}+\pi$

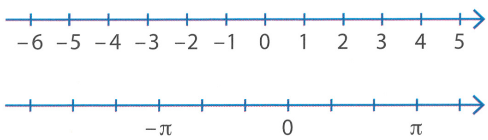
g. $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$ **h.** $-\pi-\frac{\pi}{5}$

3 Droites graduées

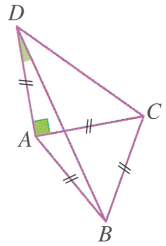
Reproduire les axes gradués ci-dessous et placer approximativement sur chacun d'eux les nombres suivants.

a. π **b.** 3 **c.** $\frac{\pi}{3}$

d. $\frac{\pi}{2}$ **e.** -2π **f.** $-\frac{\pi}{6}$



4 Nature des triangles

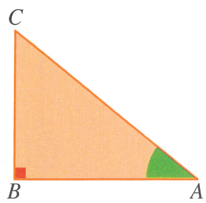


a. Quelle est la nature des triangles ADC, ABC et ABD ?

b. Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{ADB}$?

5 Cosinus et sinus

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B.



a. Indiquer l'hypoténuse.

b. Indiquer le côté adjacent à l'angle $\widehat{CAB}$.

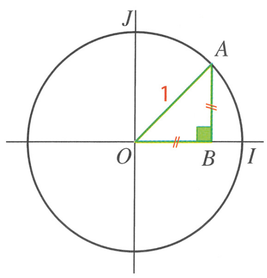
c. Indiquer le côté opposé à l'angle $\widehat{CAB}$.

d. Comment calcule-t-on $\cos(\widehat{CAB})$?

e. Comment calcule-t-on $\sin(\widehat{CAB})$?

6 Cercle particulier

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère le cercle de centre O et de rayon 1, un point A sur le cercle, et le point B sur l'axe des abscisses tel que le triangle OAB soit rectangle isocèle en B.



1. Calculer la longueur OB en utilisant le théorème de Pythagore.

2. Quelle est, en degré, la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$?

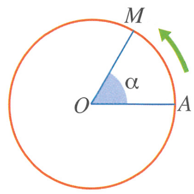
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(45°)$ et $\sin(45°)$.

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

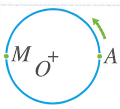
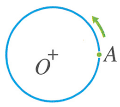
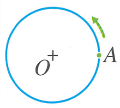
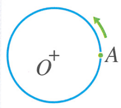
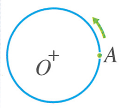
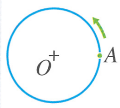
Situation 1 Piste de course

Objectif
Introduire le repérage sur le cercle trigonométrique.

Une course se déroule sur une piste circulaire de rayon 1 hm (hectomètre) et de centre O.
Le départ se fait toujours au point A. Le coureur se déplace sur la piste, toujours dans le sens indiqué et parcourt une distance égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, qui correspond à un angle au centre de α degrés, comme indiqué ci-contre.

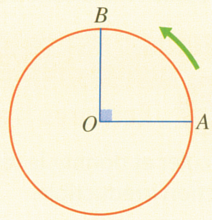


1. Recopier et compléter le tableau suivant, où M est la position d'un coureur sur la piste correspondant à l'angle, en degré, et L est la longueur exacte, en hectomètre, parcourue depuis le départ (c'est-à-dire la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$).
On rappelle que le périmètre P d'un cercle de rayon R est $P = 2\pi R$.

Angle en degré	180	360	90	45	60	210
Position de M						
Longueur L en hm	$\pi \times 1$	...	...	...	...	...

2. Si un coureur a fait, à partir de A, trois tours de piste, puis arrive en B (figure ci-contre), quelle est la longueur L parcourue ?
Quelle est la mesure de l'angle correspondant en degré ?

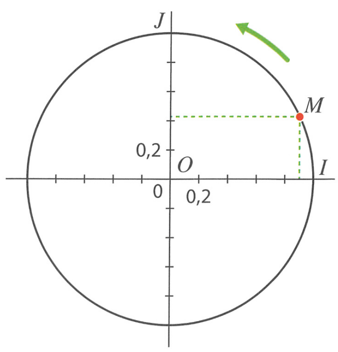
3. Un coureur parti de A a parcouru la distance $\frac{11\pi}{2}$ hm sur la piste : où est-il arrivé ?



Situation 2 Tourner pour chercher un signe

Objectif
Étudier le signe du sinus et du cosinus d'un nombre réel.

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$. Le cercle ci-contre a pour centre l'origine O du repère et pour rayon 1 unité.
On note M un point mobile qui se déplace sur le cercle en partant du point I dans le sens trigonométrique. On note α une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

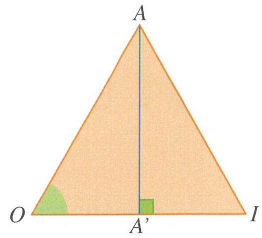


1. Quel est le point-image du réel $\alpha + 2\pi$? En déduire une comparaison entre $\cos(\alpha + 2\pi)$ et $\cos(\alpha)$, d'une part, et $\sin(\alpha + 2\pi)$ et $\sin(\alpha)$, d'autre part.
2. Donner le signe de l'abscisse de M au cours du déplacement. En déduire le signe de $\cos(\alpha)$.
3. Donner le signe de l'ordonnée de M au cours du déplacement. En déduire le signe de $\sin(\alpha)$.

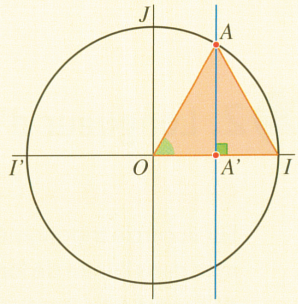
Situation 3 Unités de mesure d'un angle CALCULATRICE

Objectif
Introduire le radian.

On considère un triangle OIA équilatéral.
On suppose que $OA = 1$.



1. Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOA}$?
2. Soit A' le pied de la hauteur issue de A.
   a. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{AA'O}$.
   b. Quelle est la longueur du segment $[OA']$? En déduire que $AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. En utilisant la définition du sinus et du cosinus vue en classe de Troisième, retrouver les valeurs de cos(60°) et sin(60°).
4. On place le triangle OIA dans le cercle trigonométrique, comme indiqué sur la figure ci-contre. On note I' le point diamétralement opposé à I.
   a. Quelle est la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{IOI'}$?
   b. Recopier et compléter le tableau de proportionnalité suivant.



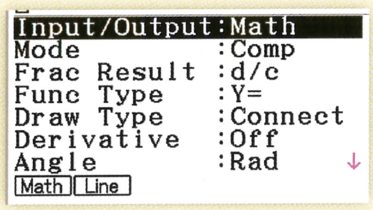
Angle en degré	$\widehat{IOI'}$ = ...	$\widehat{IOA}$ = ...
Longueur de l'arc de cercle	$\overset{\frown}{II'}$ = ...	$\overset{\frown}{IA}$ = ...

5. La valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une nouvelle mesure de l'angle $\widehat{IOA}$, exprimée en une nouvelle unité appelée le radian.
   En utilisant les résultats de la question **3**, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
6. Régler la calculatrice en mode radian à l'aide des instructions ci-dessous et vérifier les valeurs $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Casio

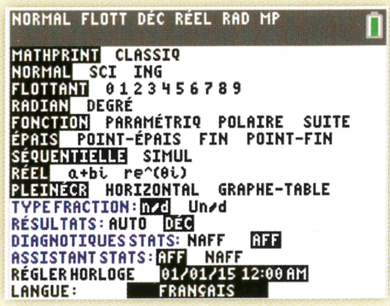
- Entrer dans le menu 

- Taper les instructions SHIFT MENU (SET UP)
- Dans le menu Angle, choisir l'unité degrés ou radians à l'aide des flèches



TI

- Entrer dans le menu mode
- Choisir RADIAN ou DEGRE à l'aide des flèches.



Connaître le cours

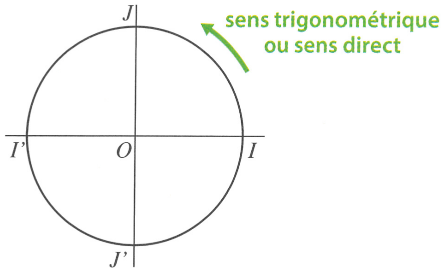
1. Lecture sur le cercle trigonométrique

1. Le cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru de I vers J dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé le **cercle trigonométrique**.

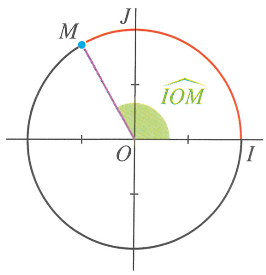
On note I le point de coordonnées (1 ; 0), et J le point de coordonnées (0 ; 1), ainsi que I' et J' les symétriques respectifs de I et J par rapport à O.



2. Longueur d'un arc

Propriété (admise)

Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ (exprimée dans l'unité de longueur du repère) est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.

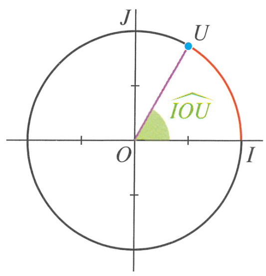


Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	270
Longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

3. Radian

Définition

Soit U le point du cercle trigonométrique tel que l'arc $\overset{\frown}{IU}$ ait pour longueur 1 unité (exprimée dans l'unité de longueur du repère).
On définit un radian (noté 1 rad) comme étant la mesure de l'angle $\widehat{IOU}$.



Propriété (admise)

Les mesures d'un angle en degré, d'une part, et en radian, d'autre part, sont proportionnelles.
On en déduit le tableau de conversion suivant.

Mesure en degré	30	45	60	90	180	1	$\frac{180}{\pi}$
Mesure en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{180}$	1

$\times \frac{180}{\pi}$ $\qquad$ $\times \frac{\pi}{180}$

Exemples

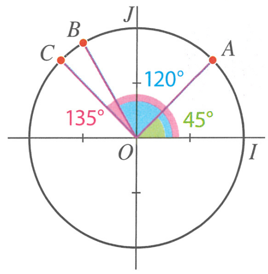
- L'arc $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur $\frac{\pi}{2}$. La mesure en degré de l'angle $\widehat{IOJ}$ est égale à 90°. La mesure en radian de l'angle $\widehat{IOJ}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

Exercice résolu 1 Déterminer la longueur d'un arc

Déterminer la longueur des arcs $\overset{\frown}{IA}$, $\overset{\frown}{IB}$ et $\overset{\frown}{IC}$ sur ce cercle de centre O et de rayon 1.

Solution commentée

La longueur du cercle est égale à 2π, ce qui correspond à un angle de 360°. Longueur d'arc et angle au centre sont des grandeurs proportionnelles, on obtient donc les résultats suivants en utilisant par exemple l'égalité des produits en croix.



Mesure de l'angle en degré	45	120	135
Longueur de l'arc	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$

EXERCICE 4 p. 100

Exercice résolu 2 Convertir des angles en radian

Convertir en radian les mesures d'angles de mesures suivantes données en degré.

1. 30° **2.** 0° **3.** 150° **4.** 210° **5.** 225°

Solution commentée

On utilise un tableau de proportionnalité sachant que 360° correspondant à 2π radians.

Mesure de l'angle en degré	30	0	150	210	225
Mesure de l'angle en radian	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

EXERCICE 2 p. 100

Exercice résolu 3 Convertir des angles en degré

Convertir en degré, les angles de mesures suivantes données en radian.

1. $\frac{3\pi}{2}$ **2.** $\frac{2\pi}{5}$ **3.** $\frac{3\pi}{4}$ **4.** $\frac{7\pi}{3}$ **5.** $\frac{\pi}{8}$

Solution commentée

On utilise un tableau de proportionnalité.

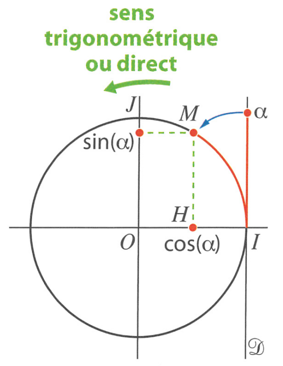
Mesure de l'angle en radian	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$
Mesure de l'angle en degré	270	72	135	75	22,5

EXERCICE 3 p. 100

Connaître le cours

3. Sinus et cosinus d'un nombre réel

1. Définitions



Définitions

Soit α un nombre réel et soit M le point-image de α sur le cercle trigonométrique. Dans le repère $(O\,;I, J)$:

- l'abscisse de M est appelée le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$;
- l'ordonnée de M est appelée le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$;
- le point M a pour coordonnées $M(\cos(\alpha)\,;\sin(\alpha))$.

Exemple

Le réel $\frac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0\,;1)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

DÉMO p. 90

Propriétés

Pour tout réel α, on a :

- $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$.
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

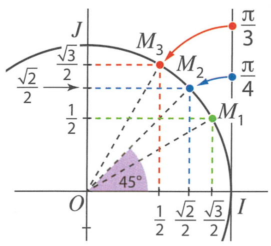
$(\cos(\alpha))^2$ peut se noter $\cos^2(\alpha)$.

2. Valeurs remarquables du sinus et du cosinus

Certaines valeurs remarquables de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont à connaître pour des valeurs de α données. Elles correspondent à des positions remarquables du point M sur le cercle trigonométrique.

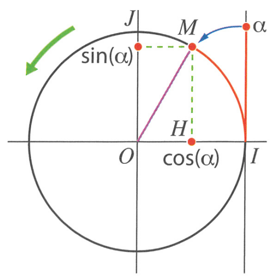
DÉMO p. 90 et 91

- I est le point-image de 0.
- M_1 est le point-image de $\frac{\pi}{6}$.
- M_2 est le point-image de $\frac{\pi}{4}$.
- M_3 est le point-image de $\frac{\pi}{3}$.
- J est le point-image de $\frac{\pi}{2}$.



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	0	30	45	60	90
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle



On considère le cercle trigonométrique et la tangente $\mathscr{D}$ au cercle.

Pour tout nombre $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, d'image M, on considère le point H de l'axe des abscisses tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).

On a :

- $\cos(\alpha) = \text{abscisse de } M = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \cos\left(\widehat{HOM}\right)$
- $\sin(\alpha) = \text{ordonnée de } M = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \sin\left(\widehat{HOM}\right)$

Exercice résolu 1 Utiliser le cercle trigonométrique

Donner, sans calculatrice, le signe des nombres réels suivants.

1 $a = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ **2** $b = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1$

Solution commentée

1 On sait que $-1 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1$. On utilise la deuxième inégalité :

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1$ donc $1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \geqslant 0$. $1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est donc un réel positif.

2 On sait que $-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leqslant 1$. On utilise la première inégalité :

$-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ donc $-1 - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leqslant 0$. $-1 - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ est donc un réel négatif.

EXERCICE 22 p. 101

Exercice résolu 2 Déterminer des valeurs du sinus et du cosinus

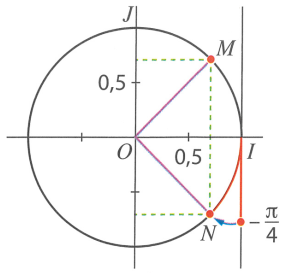
En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $-\frac{\pi}{4}$.

Solution commentée

On place les images de ces réels sur le cercle trigonométrique.
Le point-image de $-\frac{\pi}{4}$ est le point N.
N est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point M image de $\frac{\pi}{4}$.

On sait que M a pour coordonnées $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



EXERCICE 13 p. 101

Exercice résolu 3 Utiliser les valeurs remarquables du sinus et du cosinus

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction.

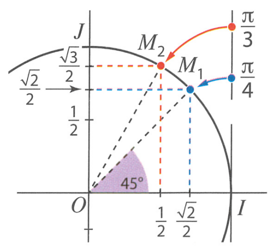
1 $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **2** $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Solution commentée

En utilisant le cercle trigonométrique, et avec les valeurs remarquables à connaître, on trouve que :

1 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc $A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.



EXERCICE 25 p. 101

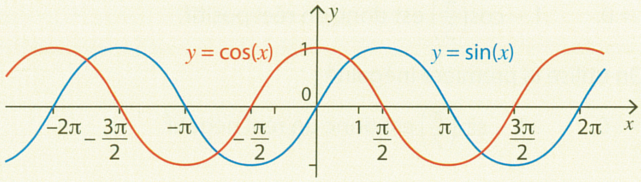
Connaître le cours

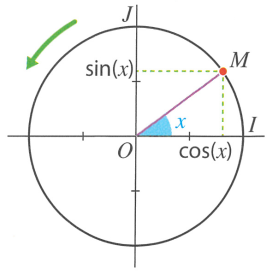
4. Fonctions sinus et cosinus

1. Définition

Définition

La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.
La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
Leurs courbes représentatives sont appelées des **sinusoïdes**.





Remarque

Pour tout x réel, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2. Périodicité et parité

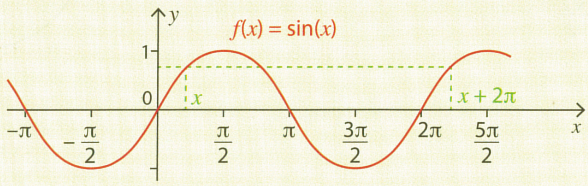
Définition

Une fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** si et seulement si, pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$.

Propriété

DÉMO en ligne

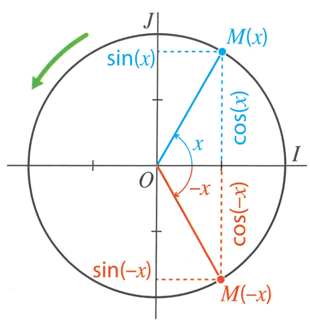
Pour tout x réel, on a $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π – périodiques.

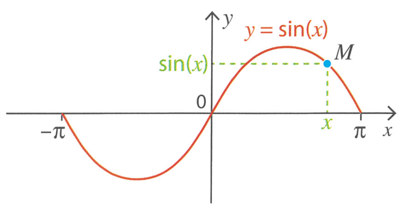


Propriété

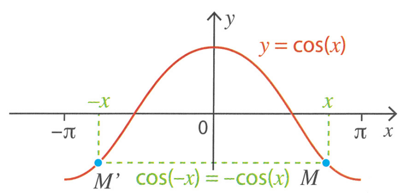
DÉMO en ligne

Pour tout x réel, on a :
- $\sin(-x) = -\sin(x)$: on dit que la fonction sinus est impaire ;
- $\cos(-x) = \cos(x)$: on dit que la fonction cosinus est paire.





La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à 0.

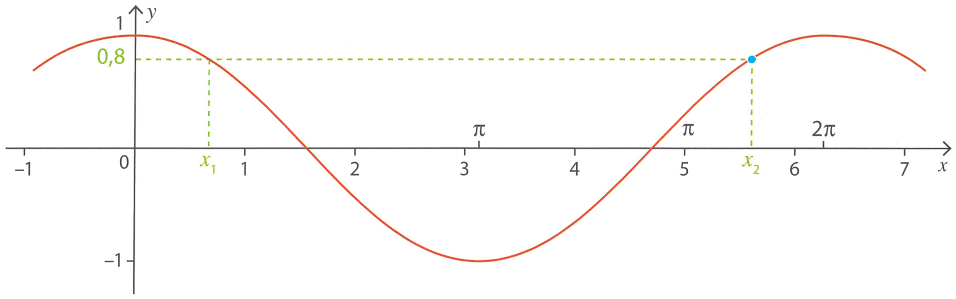


La courbe de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice résolu 1 Utiliser la courbe représentative de la fonction cosinus

En utilisant la courbe représentative de la fonction cosinus, résoudre graphiquement l'équation $\cos(x) = 0{,}8$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$. Donner les valeurs approchées des solutions au dixième.

Solution commentée



On trace la droite d'équation $y = 0{,}8$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe représentative de la fonction cosinus.
On trouve deux valeurs approchées : $x_1 \approx 0{,}6$ et $x_2 \approx 5{,}6$.

EXERCICE 28 p. 102

Exercice résolu 2 Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π.

Solution commentée

Pour tout réel x, on calcule $f(x + 2\pi)$.
$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin(x) + \cos(x)$ car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
On a donc $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel. La fonction f est périodique de période 2π.

EXERCICE 33 p. 102

Exercice résolu 3 Montrer qu'une fonction est paire ou impaire

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sin(x) + x$.

1. Montrer que la fonction est impaire.
2. Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative dans un repère orthonormé ?

Solution commentée

1. On calcule $f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin(x) - x$ car la fonction sinus est impaire.
On a alors $f(-x) = -(\sin(x) + x) = -f(x)$ pour tout x réel.
La fonction f est impaire.

2. La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

EXERCICE 33 p. 102

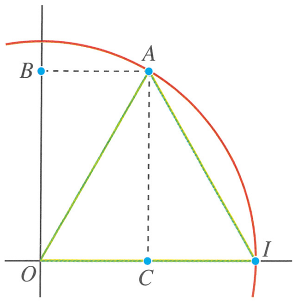
Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Démonstration

- On considère le point A image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1).



Le triangle AOI est par conséquent un triangle équilatéral.
Soit C le milieu de $[OI]$. La droite (AC) est une hauteur du triangle.
Donc OC est l'abscisse de A.

On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

- D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle OAC rectangle en C, on a :

$OA^2 = OC^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = OA^2 - OC^2$.

On trouve donc $AC^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

On en déduit $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, car AC est une longueur, donc est un réel positif.

Comme $AC = OB$, l'ordonnée du point A est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{IOA}$ en degré ? en radian ?
2. Expliquer pourquoi le triangle AOI est équilatéral.
3. Expliquer pourquoi C est le milieu du segment $[OI]$.
4. Expliquer pourquoi $AC = OB$.

Rédiger une démonstration

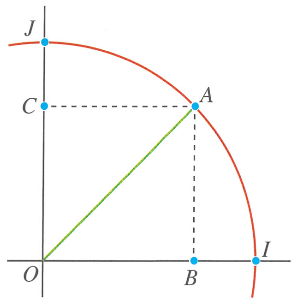
1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

On a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger une démonstration de la propriété.

Le point A est l'image de $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

- Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$ en degré, puis en radian.
- Montrer que le triangle BOA est rectangle et isocèle en B.
- Conclure en utilisant le théorème de Pythagore.

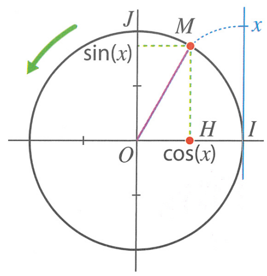


2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

Pour tout nombre réel x, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger une démonstration de la propriété.
Soit M un point-image du réel x sur le cercle trigonométrique.

- Exprimer la longueur HM à l'aide de $\sin(x)$.
- Exprimer la longueur OH à l'aide de $\cos(x)$.
- Que vaut la longueur OM ?
- Utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle OHM pour conclure.



Utiliser différents raisonnements

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$, on a :

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

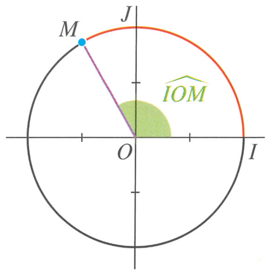
Démontrer des équivalences

Pour démontrer plusieurs équivalences, il faut s'assurer que chaque équivalence est vraie.
Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on démontre dans un premier temps $P \Rightarrow Q$ puis dans un second temps $Q \Rightarrow P$.

Apprendre par le texte & la vidéo

6 VIDÉOS DE COURS

Mesure des arcs et radians



Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	270
Longueur de l'arc $\widehat{IM}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

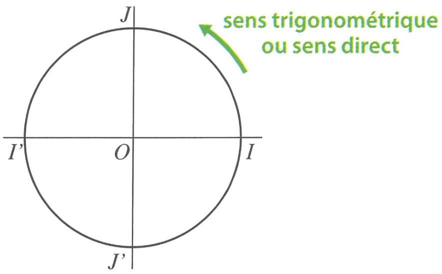
Le radian

Mesure en degré	180	1	$\frac{180}{\pi}$
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{180}$	1

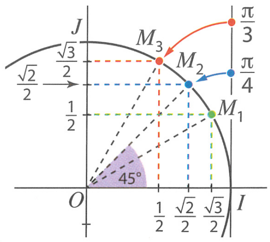
$\times \frac{180}{\pi}$; $\times \frac{\pi}{180}$

Cercle trigonométrique

Cercle de centre O et de rayon 1.

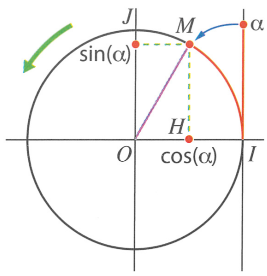


Valeurs remarquables



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	0	30	45	60	90
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

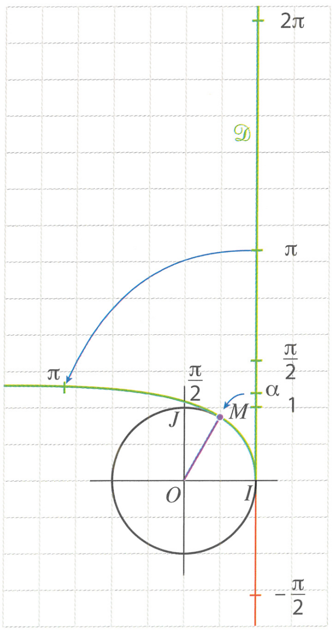
Sinus, cosinus d'un nombre réel



- $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Enroulement de la droite des réels

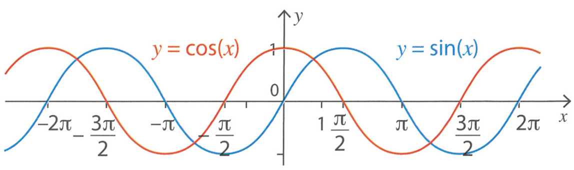
M est le point-image du réel α. À tout point M du cercle correspondent une infinité de valeurs $\alpha + 2k\pi$.



Fonctions cosinus et sinus

- sinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$
- La fonction sinus est **impaire**.
- Elle a pour période 2π :
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

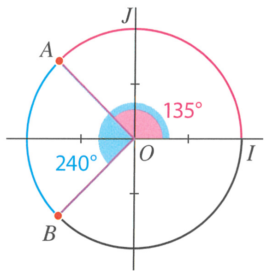
- cosinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$
- La fonction cosinus est **paire**.
- Elle a pour période 2π :
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$



Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 4 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

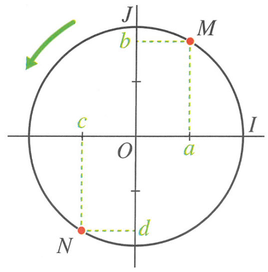
1 **1.** Déterminer la longueur des arcs $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$.



2. Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants.

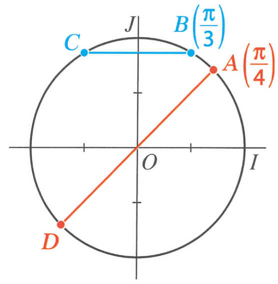
a. $\frac{\pi}{6}$ **b.** $-\frac{\pi}{4}$ **c.** $\frac{7\pi}{4}$

2



Le point M est l'image d'un réel α et le point N celle du réel β.
Indiquer la lettre correspondant à :
- $\cos(\alpha)$;
- $\cos(\beta)$;
- $\sin(\alpha)$;
- $\sin(\beta)$.

3



Les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Les points A et D sont symétriques par rapport à O.
1. Donner la valeur des nombres suivants.

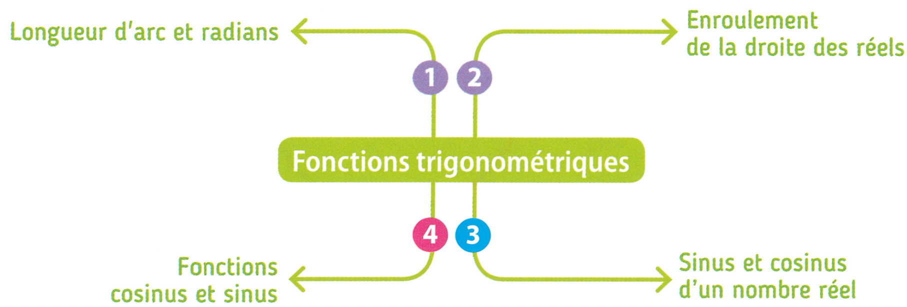
a. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **b.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **c.** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2. Donner ensuite la valeur des nombres suivants.

a. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **b.** $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ **c.** $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

4 **1.** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.
Montrer que la fonction n'est ni paire ni impaire.
2. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \cos(x) + x^2$.
Montrer que la fonction g est paire.

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Construction du cercle trigonométrique

Objectif
Utiliser les fonctions trigonométriques.

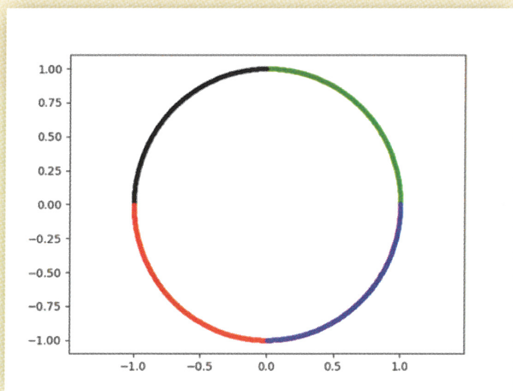
On considère la fonction cercle suivante.

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2  from math import pi,cos,sin
3
4  def cercle(n):
5      for i in range(n+1):
6          angle=2*i*pi/n
7          X=cos(angle)
8          Y=sin(angle)
9          plt.plot(X,Y,"b.")
10     plt.axis("equal")
11     plt.show()
```

1. Recopier et tester la fonction pour $n = 6$. Qu'obtient-on ?
2. Que calcule-t-on à la ligne 6 ?
3. Combien de mesures d'angles calcule-t-on avec l'instruction de la ligne 5 ?
4. Quelle instruction faut-il écrire dans la console pour afficher une approximation du cercle trigonométrique ?
5. Recopier et compléter la fonction cercle2 ci-dessous pour qu'elle affiche le cercle avec les quarts en couleur comme indiqué sur la figure ci-dessous.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import pi,cos,sin

def cercle2(n):
    for i in range(n+1):
        angle=2*i*pi/n
        X=cos(angle)
        Y=sin(angle)
        if 0<X<1 and 0<Y<1:
            plt.plot(X,Y,"g.")
        elif ...:
            ...
        ...
            ...
        ...
            ...
    plt.axis("equal")
    plt.show()
```



TP 2 Étudier un polygone régulier

Objectif
Utiliser des listes.

Dans un repère $(O\,;I,J)$, on considère le polygone régulier à n côtés $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$, avec $A_0 = I$. Pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, on note α_i l'angle $\widehat{IOA_i}$.

1 On souhaite déterminer les coordonnées des points A_i.

a. Expliquer pourquoi $\alpha_i = \frac{2\pi}{n}$.

b. Quelles sont les relations entre les coordonnées des points A_i et l'angle α_i ?

c. Recopier et compléter la fonction `coordonnees_polygone` ci-contre, qui prend en argument le nombre de sommets du polygone et renvoie la liste des abscisses et des ordonnées de chaque sommet, et la tester avec $n = 6$.

```python
from math import pi,sin,cos
def coordonnees_polygone(n):
    LX=[]
    LY=[]
    p=0
    for i in range(n):
        angle=2*i*pi/n
        LX.append(...)
        LY.append(...)
    return LX,LY
```

2 On souhaite maintenant calculer le périmètre des polygones précédents.

a. À l'aide des coordonnées des points A_0 et A_1, déterminer la distance A_0A_1 en fonction de n.

b. En déduire la valeur du périmètre du polygone en fonction de n.

c. Écrire une fonction `p_polygone(n)` qui renvoie le périmètre du polygone régulier à n côtés.

3 On a écrit la fonction ci-dessous.

```python
def archimede(n):
    p=p_polygone(n)
    LX,LY=coordonnées_polygone(n)
    LX.append(LX[0])
    LY.append(LY[0])
    plt.plot(LX,LY,"r")
    plt.axis("equal")
    plt.title('Le demi-périmètre du polygone est '+str(p/2))
    plt.show()
```

Tester cette fonction pour différentes valeurs de n.
Vers quel nombre se rapproche le demi-périmètre du polygone lorsque n augmente ?
Expliquer le résultat.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour tracer le nuage de points, on utilise la bibliothèque : `import matplotlib.pyplot as plt`
- Pour créer un nuage de points où les abscisses des points sont dans la liste X et les ordonnées dans la liste Y : `plt.plot(X,Y)`
- Pour afficher un point : en vert, on écrit « g. » ; en noir, on écrit « k. » ; en rouge, on écrit « r. » et en bleu, on écrit « b. ».
- Pour ouvrir la fenêtre et afficher la courbe : `plt.show()`
- Pour créer une liste vide : `L = [ ]`
- Pour ajouter « objet » à la fin de la liste L : `L.append(objet)`

TP 3 Vers un nombre connu TABLEUR

Objectif
Déterminer une valeur approchée en utilisant le tableur.

On considère la formule suivante, où n est un entier naturel : $a_n = n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

On a entré les premiers éléments dans une feuille de calcul ci-dessous.

B2 f_x =A2*COS(PI()/A2)*SIN(PI()/A2)

	A	B	C
1	*n*	*a n*	
2	1	-1,22515E-16	
3			

1. En recopiant vers le bas les colonnes A et B, conjecturer la valeur exacte du nombre réel pour lequel a_n est une valeur approchée.
2. Déterminer, avec le tableur, la plus petite valeur de l'entier n tel que a_n soit une valeur approchée à 0,1 près du réel trouvé à la question 1.
3. Représenter, à l'aide du tableur, les premiers termes de la suite sous la forme d'un nuage de points

TP 4 Une suite de cosinus TABLEUR CALCULATRICE

Objectif
Résoudre une équation trigonométrique.

Les mesures des angles sont exprimées en radian.
Dans la cellule A1, on a calculé la valeur de cos(1). Dans la cellule A2, on a calculé cos(cos(1)) puis dans la cellule A3 cos(cos(cos(1))) et ainsi de suite.

	A
1	0,54030231
2	0,85755322
3	0,65428979
4	0,79348036

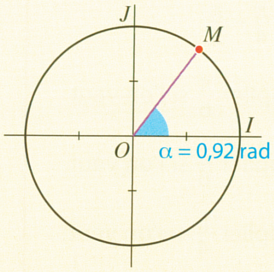
1. Réaliser les calculs au tableur en arrondissant les valeurs à 10^{-8} près.
Quelle formule faut-il entrer dans la cellule A2 puis recopier vers le bas pour obtenir les différents résultats ?
2. Afficher les résultats successifs jusqu'à obtenir une valeur qui ne change pas.
Quelle est la valeur obtenue ?
3. Choisir un nombre différent de 1 dans la cellule A1 et réitérer le processus précédent.
Que peut-on conjecturer ?
4. Tracer sur la calculatrice la courbe de la fonction cosinus et la droite d'équation $y = x$.
Déterminer, avec la calculatrice, les coordonnées de leur point d'intersection. Quelle valeur retrouve-t-on ?

TP 5 Des angles associés LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer des angles associés.

Dans un repère orthonormé $(O\,;I, J)$, on trace le cercle trigonométrique et on considère un point M appartenant à ce cercle.

1. Réaliser la figure suivante à l'aide d'un logiciel de géométrie.



t est un curseur compris entre -2π et 2π avec un incrément de 0,01. Dans la barre de saisie, entrer les formules « $x = \cos(t)$ » puis « $y = \sin(t)$ » et créer l'angle $\widehat{IOM}$ en radian.
Que représente la valeur 0,92 ?

2. On souhaite maintenant conjecturer certaines formules trigonométriques.
On représente le point M' correspondant au point-image du nombre $\pi+t$.
Pour cela, on utilise le bouton Rotation et on trace le point M', image de M par la rotation d'angle π dans le sens trigonométrique. Lire les coordonnées de M' et les comparer avec celles de M, puis conjecturer les relations entre $\cos(t)$ et $\cos(\pi + t)$ ainsi que celles entre $\sin(t)$ et $\sin(\pi + t)$.

3. De même, conjecturer à l'aide du logiciel de géométrie, les valeurs suivantes en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ et compléter le tableau ci-dessous.
On peut utiliser Boîte de sélection des objets à Afficher/Cacher pour rendre la figure plus lisible.

$\cos(-t) =$	$\cos(\pi - t) =$	$\cos(\pi + t) =$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) =$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$
$\sin(-t) =$	$\sin(\pi - t) =$	$\sin(\pi + t) =$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) =$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) =$

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Pour créer un curseur : a=2 et compléter la boîte de dialogue.
- Pour créer l'arc $\widehat{IM}$:
- Pour régler les angles en radians :
Options | Avancé ...

Tableur

- Écrire une formule mathématique en tapant « = » dans la cellule : =
- Écrire le nombre π : PI()
- Recopier des formules vers le bas : on sélectionne le petit carré en bas à droite de la cellule et on étire vers le bas :

2	1	-1,22515E-16