Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 + x - 3$ et soit $\mathscr{P}$ la parabole représentant cette fonction.
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et des axes du repère.
2. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathscr{P}$.

2 Soit g la fonction polynôme du second degré définie par $g(x) = (x + 1)^2 - 9$.
1. Donner la forme factorisée puis la forme développée de $g(x)$.
2. Utiliser la forme la plus adaptée pour :
a. résoudre l'équation $g(x) = 0$;
b. donner le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$;
c. donner l'image de 0 par la fonction g.

3 Résoudre $(5 - 2x)(x + 1) > 0$.

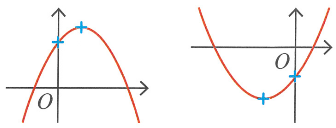
4 Justifier que le trinôme $3x^2 - 10x + 3$ admet deux racines inverses l'une de l'autre, et préciser leur signe.

5 Factoriser le trinôme $x^2 + 4x - 5$, après avoir détecté une racine évidente.

6 On donne deux fonctions f et g polynômes du second degré définies par :

$$f(x) = (6 - 2x)(x + 1)$$
$$\text{et } g(x) = 2x^2 + 4x - 3$$

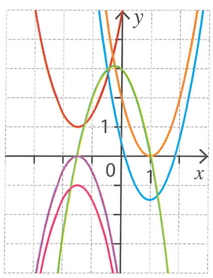
et leurs courbes représentatives.
• Associer chaque fonction à sa courbe, puis déterminer les coordonnées des points marqués.



DIAPORAMA
CALCUL MENTAL
EN PLUS

Automatismes

7 Les six courbes représentées sur le dessin ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions polynômes du second degré de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.



• Indiquer la courbe qui correspond à chacun des cas suivants.
a. $\Delta > 0$ et $a < 0$.
b. $\Delta < 0$ et $a > 0$.
c. $\Delta = 0$ et $a < 0$.

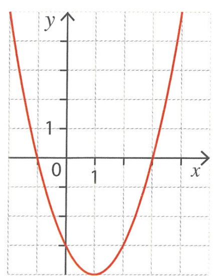
8 Dresser le tableau de variation des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
a. $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$
b. $g(x) = 4x - x^2$
c. $h(x) = (x - 1)(x + 7)$

9 QCM Donner la (ou les) réponse(s) correcte(s) parmi les trois proposées.
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 - 5x + 8$.
a. $f(x)$ admet deux racines de signes différents.
b. Une factorisation de $f(x)$ est $-3(x - 1)\left(x + \frac{8}{3}\right)$.
c. Une factorisation de $f(x)$ est $(1 - x)(3x + 8)$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5 - (1 + 7x)^2.$$

a. $g(x)$ est positif pour tout x réel.
b. $g(x)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
c. g admet un maximum positif sur $\mathbb{R}$.

10 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction polynôme du second degré f.
Compléter :
a. $f(x) = (x - \ldots)(x - \ldots)$
b. $f(x) = (x - \ldots)^2 + \ldots$
c. $f(x) = x^2 + \ldots x + \ldots$



Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions sont vraies ou fausses.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 1)(x + 7)$.
$f(\pi - \sqrt{2})$ est un réel positif.

2. Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(-1) = f(4)$ et admettant pour minimum -3.
$f(0{,}9) < f(0{,}95)$

Travail en groupe 45 min

**Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.**

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

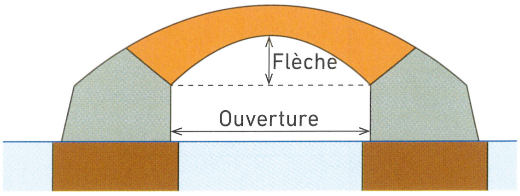
Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Les principaux éléments de l'Airbus A380 sont transportés sur des barges naviguant sur la Garonne jusqu'aux usines de Toulouse où ils sont assemblés. La barge *Le Breuil* passe alors sous le pont de Pierre à Bordeaux.

La barge a pour largeur 14 mètres et passe à marée basse sous la 9^e^ arche. La partie parabolique de cette arche possède une flèche de 6 mètres. Les piliers qui soutiennent la partie parabolique sont à découvert sur 4 mètres à marée basse. L'ouverture de la 9^e^ arche est de 20 mètres.



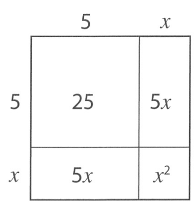
1. Des éléments de l'avion sont entreposés dans un conteneur de forme parallélépipédique de largeur 14 mètres posé au fond de la barge, fond que l'on suppose se trouver au niveau de l'eau. Sachant qu'on laisse une marge de sécurité de 50 cm, quelle doit être la hauteur maximale du conteneur pour passer sous l'arche sans encombre ?

2. Un article du journal *Sud-Ouest* indique que des éléments du fuselage de l'A380 mesurant 8 mètres de haut franchissent le pont de Pierre. Sachant qu'on laisse une marge de sécurité de 50 cm, quelle est la largeur maximale de ces éléments ?

Exposé

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

Le mathématicien Al-Khwarizmi valide son algorithme de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$ par une méthode géométrique. Elle consiste à découper un carré en plusieurs parties comme indiqué sur la figure ci-contre. Cette méthode s'appelle la « complétion du carré ».
Faire des recherches sur cette méthode et résoudre l'équation.



+ D'ENTRAÎNEMENT SUR kwyk voir rabats

Fonctions polynômes

1 On donne trois formes d'une même fonction polynôme.

Forme 1 : $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4}$

Forme 2 : $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$

Forme 3 : $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

1. Comment appelle-t-on chacune de ces formes ?

2. Vérifier que ces trois formes sont égales.

3. Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse à l'aide de l'une des formes précédentes de $f(x)$.

a. -6 est l'image de 0 par f.

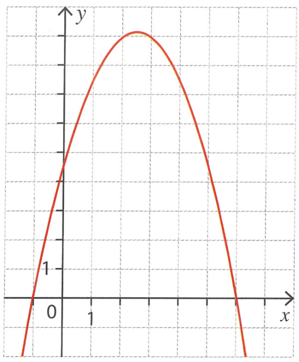
b. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

c. $-\frac{27}{4}$ est le minimum de la fonction.

d. $f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right)$

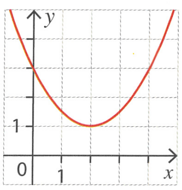
2 La parabole ci-dessous tracée dans un repère orthonormé, représente une fonction polynôme du second degré f.

• Utiliser le graphique pour déterminer la forme factorisée de $f(x)$.



3 La parabole ci-dessous représente une fonction polynôme du second degré f.

• Utiliser le graphique pour déterminer la forme canonique de $f(x)$.



4 **1.** Dresser le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré f, sachant que sa courbe représentative :

• est tournée vers le bas ;

• admet pour axe de symétrie, la droite d'équation $x = -2$;

• a son sommet sur l'axe des abscisses.

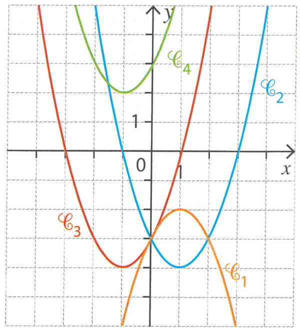
2. Proposer trois expressions de $f(x)$.

5 **Chercher, raisonner**

Sans utiliser la calculatrice, associer chaque fonction ci-dessous à la courbe qui lui correspond.

a. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **b.** $g(x) = x^2 + 2x - 3$

c. $h(x) = x^2 + 2x + 3$ **d.** $i(x) = -x^2 + 2x - 3$



6 Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 7$.

• Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

7 Dresser le tableau de variation de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 100 - 2(x - 50)^2$

2. $f(x) = -\frac{1}{4} + 3(x + 1)^2$

3. $f(x) = 0{,}6(x + 0{,}2)^2$

4. $f(x) = -2 - 6x^2 + \frac{1}{3}x$

5. $f(x) = x^2 + 7$

8 Une fonction polynôme du second degré g est telle que $g(0) = g(6)$ et admet pour minimum -2.

• Dresser son tableau de variation.

9 Le bénéfice (en millier d'euros) d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 3]$, par $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaine.

1. Donner les formes factorisée et canonique de $f(x)$.

2. En exploitant la forme la plus appropriée de $f(x)$, donner :

a. les quantités d'objets fabriqués et vendus pour lesquelles le bénéfice est positif ;

b. le bénéfice maximal ;

c. les quantités d'objets fabriqués et vendus sachant que l'entreprise a perdu 2 000 €.

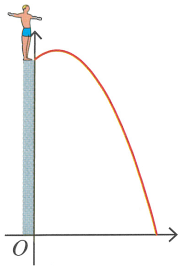
10 Une entreprise fabrique des produits qu'elle commercialise. Le coût de fabrication, en euro, de q produits (q exprimé en centaine) est donné par une fonction polynôme du second degré C dont on ne connaît pas les coefficients.

On sait que le coût maximal est égal à 2 000 € pour une fabrication de 1 000 produits et que les coûts fixes sont nuls. Les coûts fixes correspondent au coût de fabrication lorsqu'aucun produit n'est fabriqué.

• Déterminer l'expression de $C(q)$.

11 **Plongeon**

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par un arc de parabole qui, dans le repère ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}8x + 15{,}4$.



$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètre, du plongeur assimilé à un point, par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre.

Grâce à un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats ci-dessous.

```
1 forme_canonique(-0.2x^2+0.8x+15.4)
        -0.2*(x-2.0)^2+16.2                M
2 factoriser(-0.2x^2+0.8x+15.4)
        -0.2*(x-11.0)*(x+7.0)              M
```

En exploitant la forme la plus appropriée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes.

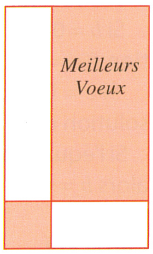
1. Quelle est la hauteur de la falaise ?

2. À quelle distance de la falaise le plongeur trouve-t-il la surface de l'eau ?

3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

12 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Une carte de vœux de forme rectangulaire, de dimensions 6 cm par 10 cm, comporte un carré et un rectangle colorés comme sur la figure.



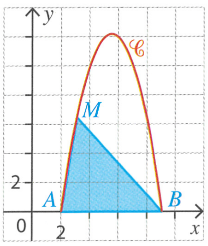
Comme ces cartes de vœux seront imprimées en grande quantité, on souhaite que la partie blanche soit la plus grande possible afin de minimiser la quantité d'encre pour la partie colorée.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer alors les dimensions du carré et du rectangle colorés qui répondent au problème.

2. Démontrer cette conjecture.

13 La parabole $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous a pour équation :

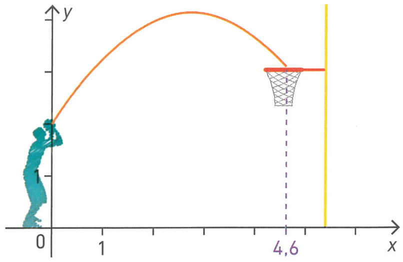
$$y = -x^2 + 11x - 18.$$



Le point M appartient à $\mathscr{C}$.

• Où placer le point M pour que l'aire du triangle ABM soit maximale ?

14 On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans le panier lors d'un lancer franc au basket.



Cette trajectoire est un arc de parabole d'équation :

$$y = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2,$$

où x et $f(x)$ sont exprimés en mètre.

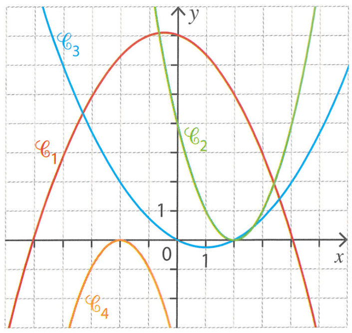
1. Donner la forme canonique de $f(x)$.

2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?

3. Sachant que la ligne de lancer franc est à 4,6 mètres du pied du panier, quelle est la hauteur du panier ?

Factorisation

15 Les courbes ci-contre sont les courbes représentatives de fonctions polynômes de degré 2.



• Retrouver la forme factorisée de chaque fonction.

16 f est une fonction polynôme de degré 2 qui vérifie les conditions suivantes :

• 0 admet pour antécédents 4 et 5 ;

• l'image de 1 par f est 24.

• Déterminer $f(x)$ sous forme factorisée.

17 **Calculer, raisonner**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 7$.

1. Déterminer les formes factorisée et canonique de $f(x)$.

2. En utilisant la forme la plus adaptée et en justifiant :

a. comparer $f(-5{,}5)$ et $f(-4{,}5)$;

b. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -7$;

c. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = -16$;

d. résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

18 Factoriser, si possible, les fonctions polynômes du second degré suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ **2.** $f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}8x - 4{,}25$

3. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}x + 1$ **4.** $f(x) = 2x^2 + x\sqrt{2} - 1$

19 CALCULATRICE

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2+7x-5}{x-1}.$$

• Tracer la représentation graphique de f et expliquer le phénomène.

Équations

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

1. $-5x^2 + 4 = 0$
2. $-x^2 + 6x = 0$
3. $(x-1)^2 - (x-1)(x-2) = 0$
4. $x^2 - 16 + 2(x-4) = 0$
5. $(x+1)^2 - (2x-3)^2 = 0$
6. $(2x+3)(x-7) = -21$
7. $4x^2 - 1 = (2x-1)(x-3)$
8. $9 + 4(x-2)^2 = 0$

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $-2x^2 + x - 1 = 0$
2. $2x^2 - 2x - 1 = 0$
3. $5x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $2x^2 + 4 = -6x$
5. $x(2x-1) = 1$
6. $x^2 = -5x - 1$
7. $-x + 3x^2 - 1 = 0$
8. $x(8-x) + 1 = 0$
9. $2x^2 + 6x + \frac{9}{2} = 0$
10. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$
11. $-3x^2 + x = -\frac{1}{4}$
12. $2x(5+2x) = 9 - 2x$

22 ALGO PYTHON

1. Écrire un algorithme en langage naturel qui renvoie les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels et $a \neq 0$, lorsqu'elles existent.
2. Le traduire en langage Python.
3. Le programmer et le tester sur les équations de l'exercice précédent.

23 **Démonstration**

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré admettant deux racines x_1 et x_2.

1. Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1\,x_2 = \frac{c}{a}$.
2. Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

a. Si $b = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions opposées.

b. Si $a = c$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions inverses l'une de l'autre.

24 Soit $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$.

1. Donner une racine évidente de $f(x)$.
2. En déduire la seconde racine et factoriser $f(x)$.

25 ALGO

1. Soient u et v deux réels.

a. Développer le produit $(x-u)(x-v)$.

b. En déduire que les réels u et v sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$ où $S = u + v$ et $P = uv$.

2. Existe-t-il deux nombres réels u et v :

a. dont le produit est 6 et la somme 4 ?

b. dont le produit est 6 et la somme 8 ?

3. Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de déterminer deux entiers dont la somme et le produit sont deux réels fixés et entrés par l'utilisateur.

26 Existe-t-il un rectangle d'aire 40 et de périmètre 40 ? Si oui, donner ses dimensions.

27 Déterminer deux nombres réels dont la somme est 15 et le produit est 4.

28 **Modéliser**

Le champ d'un agriculteur est un rectangle deux fois plus long que large. Si l'on ajoute 5 mètres à sa longueur et 20 mètres à sa largeur, on obtient une parcelle rectangulaire dont l'aire est un hectare, soit 10 000 m^2.

• Quelle est la superficie de ce champ ?

29 VRAI OU FAUX

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ l'expression d'une fonction polynôme du second degré. Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

a. Si $b = 0$ et si a et c sont de même signe, alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

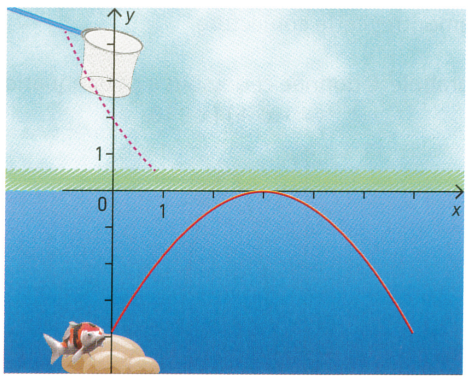
b. Si $c = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.

c. Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions opposées, alors $b = 0$.

30 **Carpe koï**

On souhaite attraper une carpe koï qui ne sort de sa cachette que pour manger.

On a établi que sa trajectoire est un arc de parabole d'équation $y = -x^2 + 4x - 4$.



L'épuisette suit la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 2$.

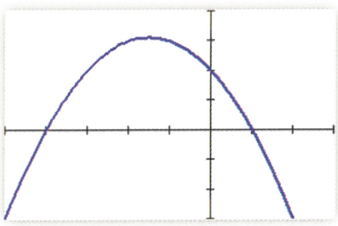
• Est-il possible d'atteindre la carpe ? Le cas échéant, combien de fois est-ce possible ?

31 **Lancer de micro-fusée**
Modéliser
Un collégien lance une micro-fusée depuis le sol d'un champ, fusée dans laquelle il a installé un altimètre. Il procède aux réglages pour un lancement afin de déterminer au bout de combien de secondes doit sortir le parachute qui ralentira la chute. Il dispose des informations suivantes : la micro-fusée effectue une trajectoire parabolique, elle atteint une altitude maximale de 180 mètres au bout de 6 secondes. Le parachute doit sortir à 100 m d'altitude, lors de la phase de descente.
• Combien de secondes après le décollage la trappe du parachute doit-elle s'ouvrir ?

32 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Cadre photo**
Chercher, raisonner
On veut encadrer une photographie de dimensions 8 cm × 15 cm. On souhaite un cadre rectangulaire de largeur constante tout autour de la photographie, et de sorte que l'aire du cadre soit égale à l'aire de la photographie elle-même.
On souhaite déterminer la largeur de ce cadre.
1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une valeur approchée de cette largeur.
2. Déterminer la valeur exacte de cette largeur.

Signe

33 CALCULATRICE
On a représenté, sur l'écran d'une calculatrice, une fonction f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.



• En sachant que, sur chaque axe, une graduation correspond à une unité, lire graphiquement le signe de $f(x)$.

34 Étudier le signe des fonctions dans chacun des cas suivants.
1. $f : x \mapsto 2x^2 + 5x + 4$
2. $g : x \mapsto 4x^2 - 7x + 3$
3. $h : x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{4}$
4. $i : x \mapsto 2x^2 - 2x - 1$
5. $j : x \mapsto -7x^2 + 12x - 6$
6. $k : x \mapsto 4x^2 - 2{,}4x + 0{,}36$

35 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser le discriminant.
1. $(4x + 1)(x + 3) > 0$
2. $2x \geqslant 1 + x^2$
3. $4 + (2x - 5)^2 \leqslant 0$
4. $-5(x + 1)^2 \geqslant 0$
5. $x^2 < x$
6. $x^2 - \sqrt{3}x > 0$

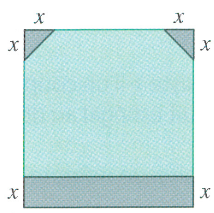
36 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
1. $x^2 - 0{,}4x + 0{,}04 \leqslant 0$
2. $-x^2 + 5x < 7$
3. $\frac{2}{3}x^2 \geqslant 4x - 6$
4. $11x^2 + 16x - 9 < 10x + 8$

37 VRAI OU FAUX
Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
1. $x^2 > 4$ si et seulement si $x > 2$.
2. $x^2 - 2x - 2 < 0$ si et seulement si $x \in \left]1-\sqrt{3} ; 1+\sqrt{3}\right[$.
3. L'inéquation $-x^2 + x - 1 < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
4. Pour tout nombre réel x, $2x^2 - 12x + 18 > 0$.

38 CALCULATRICE
Dans un repère, soient $\mathscr{P}$ la parabole représentant la fonction carré (notée f) et $\mathscr{D}$ la droite représentant la fonction affine g définie par $g(x) = -x + 2$.
1. Représenter les deux courbes sur la calculatrice et conjecturer leur position relative.
2. Étudier le signe du polynôme $f(x) - g(x)$ puis valider ou infirmer les conjectures de la question **1**.

39 Dans un repère, on considère les fonctions polynômes du second degré dont les expressions sont données ci-dessous.
$f_1(x) = -x^2 + 3x + 2$ et $f_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$.
$f_3(x) = -x^2 - 4x + 2$ et $f_4(x) = 2x^2 - x + 5$.
1. Représenter sur la calculatrice les courbes des fonctions f_1 et f_2 et conjecturer leur position relative.
2. Étudier le signe du polynôme $f_1(x) - f_2(x)$ puis valider ou infirmer les conjectures de la question **1**.
3. Reprendre les questions **1** et **2** avec les fonctions f_3 et f_4.

40 **Chercher, raisonner**
Un verrier souhaite tailler une vitre. Il utilise un carré de verre de 3 mètres de côté. Dans le carré, il découpe un rectangle de largeur x et deux triangles rectangles isocèles comme sur la figure ci-contre.



Il souhaite que la vitre obtenue ait une aire supérieure à 5 m².
• Comment doit-il choisir les dimensions de sa découpe ?

MODERATO

Exercices

41 Déterminer la forme canonique des fonctions dont les expressions sont les suivantes.
1. $f(x) = x^2 + 2x + 9$ **2.** $f(x) = -x^2 - 6x + 7$
3. $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ **4.** $f(x) = 3x^2 + 9x - 1$
5. $f(x) = -5x^2 + 7x + 4$

42 Démontrer le **théorème** énoncé ci-dessous.

> Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
> • Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$ où x_1 et x_2 sont les racines ($x_1 < x_2$).
> • Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ s'annule en son unique racine x_0 et est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
> • Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

43 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $\dfrac{2x}{x^2+1} = 3$
2. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x-1} = 2$
3. $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{2x} = 1$

44 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $(x-1)(x^2-5x+6) = 0$
2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5} = 0$
3. $x^3 - x^2 + 4x = 0$

45 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
1. $\dfrac{x}{2x^2+3} < -1$
2. $\dfrac{3x}{x+1} \geqslant 5x$
3. $\dfrac{1}{4x} + \dfrac{2}{3-x} > 3$

46 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
1. $(x-1)(x^2-5x+6) > 0$
2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5} \leqslant 0$
3. $x^3 - x^2 + 4x \geqslant 0$

47 Soient deux réels S et P.
• Démontrer qu'il existe deux réels dont la somme est S et le produit P si et seulement si $S^2 \geqslant P$.

48 Existe-t-il un couple d'entiers consécutifs dont le produit est égal au double de la somme ?

49 Soit p un nombre réel et soit l'équation (E) :
$$-2x^2 + 5x = p.$$
• Déterminer les valeurs de p pour lesquelles :
a. (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
b. (E) admet une seule solution dans $\mathbb{R}$.
c. (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

50 **Équations bicarrées**
On veut résoudre l'équation suivante, appelée équation bicarrée.
(E) : $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$.
1. On pose $X = x^2$.
Écrire l'équation (E) en fonction de X.
2. Résoudre l'équation en X.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Appliquer cette méthode pour résoudre les équations bicarrées suivantes.
a. $-2x^4 + 7x^2 - 5 = 0$
b. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
c. $2x^4 - 13x^2 - 7 = 0$
d. $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 0$

51 ALGO
Écrire, en langage naturel, un algorithme qui permet de résoudre une équation bicarrée.

52 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
et telle que $f(0) = \dfrac{9}{2}$, $f(2) = 0$ et $f(-3) = \dfrac{39}{4}$.
• Déterminer les réels a, b et c.

53 CALCULATRICE
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :
$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$$
et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 5$.
1. À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la position relative des courbes de f et de g.
2. Valider ou invalider les résultats par le calcul.

54 Dans un repère, on donne les courbes d'équations :
$$y = x - 1 \text{ et } y = \frac{1}{x-1}.$$
• Quelle est la position relative de ces deux courbes ?

55 Dans un repère, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ et le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 5$.
• Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

56 Soient un repère du plan et m un réel.
• Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation $y = mx + 7$ ne coupe pas la parabole $\mathscr{P}_m$ d'équation $y = mx^2 + 7x + 11$.

57 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$.
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout x réel, $0 \leqslant f(x) < 2$.

58 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c réels et $a \neq 0$, et S son sommet.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la nature de la courbe décrite par le point S lorsque b varie.

2. Démontrer cette conjecture.

59 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Raisonner

Soit m un réel.

On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (E) : $4mx^2 - 4(m+2)x + 2m + 1 = 0$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation (E) en fonction des valeurs de m.

2. a. Résoudre (E) pour $m = 0$.

b. Soit $m \neq 0$. Exprimer le discriminant de l'équation (E) en fonction de m.

Étudier son signe et répondre alors au problème posé.

3. L'équation (E) peut-elle admettre deux racines opposées ?

60 CALCULATRICE

Florent propose le jeu suivant à Manu :

« Pense à deux nombres. Donne-moi la somme, puis le produit de ces deux nombres. »

Manu propose : « La somme de ces deux nombres est 56 et leur produit 663. »

Après un petit moment, Florent répond : « Tu as pensé à 17 et 39. »

Manu conclut : « Exact ! »

• Expliquer comment Florent a trouvé la solution.

61 Voitures moins chères

Un constructeur automobile décide de commercialiser des automobiles à bas coût : chaque voiture doit être vendue 6 000 euros. Sa production q peut varier entre 0 et 100 000 voitures. Suite à une étude réalisée, les coûts de production sont donnés par la formule suivante : $C(q) = 0{,}05q^2 + q + 80$ (q exprimé en millier et $C(q)$ exprimé en millier d'euros).

On appelle coût fixe le coût que supporte l'entreprise même si la production est nulle.

1. Quel est le coût fixe supporté par cette entreprise de construction automobile ?

2. Déterminer la quantité à partir de laquelle le coût de production est supérieur à 200 000 €.

3. À combien s'élève la recette pour une telle production ?

4. Exprimer, en fonction de q, la recette notée $R(q)$, en millier d'euros.

5. En déduire la fonction polynôme du second degré qui donne les bénéfices réalisés par l'entreprise.

6. Dans quel intervalle doit se situer la quantité de voitures produites pour réaliser un bénéfice ?

7. Quel est le nombre d'automobiles à produire pour obtenir un bénéfice maximal et quel est ce bénéfice ?

62 Lancer de javelot

Une athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$.

La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t, en seconde, du centre de gravité est :

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2.$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

1. À quel instant le javelot est-il au plus haut ?

2. Le javelot atteindra-t-il une hauteur de 32 m ? À quels instants ?

3. Le javelot atteindra-t-il une hauteur de 35 m ?

4. À quel instant le javelot touchera-t-il le sol ?

63 Un projectile est lancé d'une hauteur de 2 mètres avec une vitesse initiale v_0 exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On néglige les frottements de l'air, le projectile n'est soumis qu'à une seule force, son poids ; son mouvement est parabolique et dépend de v_0.

La hauteur du projectile en mètre est :

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + 2,$$

avec h fonction du temps, g l'intensité de la pesanteur terrestre et t la durée en seconde.

On prend $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ dans la suite de l'exercice.

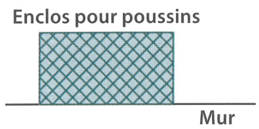
1. Pour quelle(s) valeur(s) de v_0 le projectile atteindra-t-il une hauteur de 4 m au moins ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de v_0 le projectile ne touchera-t-il pas terre avant 2,5 secondes ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de v_0 le projectile atteindra-t-il une hauteur de 4 m au moins et ne touchera-t-il pas terre avant 5 secondes ?

64 Modéliser

Un fermier veut délimiter une zone rectangulaire dans son enclos pour isoler une poule et ses poussins des autres volatiles. Il possède un grillage de 460 cm de longueur.



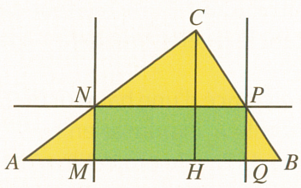
• En supposant qu'il utilise un des murs de la ferme pour matérialiser l'enclos, quelle surface maximale peut-il prévoir pour la poule et ses poussins ?

65 Déterminer tous les triplets d'entiers consécutifs dont le produit est égal à la somme.

66 Soit x un nombre réel.
Dans un repère orthonormé, on donne $A(2\,;1)$, $B(x\,;3)$ et $C(-1\,;3)$.
• Pour quelle (s) valeur (s) de x le triangle ABC est-il rectangle en B ?

67 PRISE D'INITIATIVE
Modéliser, raisonner
Existe-t-il des triangles rectangles et isocèles dont l'hypoténuse mesure trois unités de longueur de plus que l'un des autres cotés ?

68 PRISE D'INITIATIVE
Communiquer
Soit ABC un triangle tel que $AB = 12$ et tel que la hauteur issue de C coupe $[AB]$ en H avec $CH = 6$ et $AH = 8$.
Pour chaque point M du segment $[AH]$ on construit le rectangle $MNPQ$ comme sur la figure ci-dessous.



• Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale et calculer cette aire.

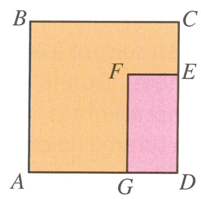
69 **Palais Güell**
Modéliser

Les portes d'entrée du palais Güell, construit à Barcelone par Gaudi, ont une forme que l'on peut modéliser par une parabole (c'est en réalité un arc caténaire, non modélisable en classe de Première). Paul veut connaître leur hauteur. Il mesure la largeur au sol (4 mètres) ; en se plaçant sur le seuil à 0,5 mètre d'une extrémité, il constate que sa tête frôle l'arche (Paul mesure 1,75 m).
• Calculer la hauteur de l'arche.

70 Mme Leroy place 5 000 euros de capital sur un compte rémunéré à x % la première année. La deuxième année, le taux de rémunération augmente de 1 % et Mme Leroy réalise sur ces deux années un bénéfice de 335,32 euros.
• Quelle était la valeur du taux de rémunération initial x ?

71 PRISE D'INITIATIVE
Fin 2018, suite aux très bons résultats de l'entreprise, le directeur décide de distribuer une prime exceptionnelle de 39 000 euros à répartir équitablement entre les salariés.
Cinq cadres dirigeants de l'entreprise, s'estimant suffisamment rémunérés, refusent cette prime. Ainsi, chaque employé de l'entreprise touche 13 euros de plus que prévu.
• Quel est le nombre de salariés de l'entreprise et quel est le montant de la prime qu'ils devaient percevoir initialement ?

72 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE
Modéliser
Un prospectus a la forme d'un carré $ABCD$ de côté 6 cm.

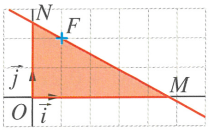


La partie consacrée aux illustrations doit être un rectangle $DGFE$ respectant la condition $CE = GD$ et dont l'aire est comprise entre 6 cm^2 et 7 cm^2.
1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une réponse au problème posé.
2. Démontrer cette conjecture.

73 PRISE D'INITIATIVE
Une fusée à eau est lancée depuis le deuxième étage d'un immeuble à 10,8 mètres de hauteur avec une vitesse initiale de 19,2 m·s^{-1}.
La fonction h, telle que $h(t) = -\dfrac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$, modélise l'altitude de la fusée en fonction du temps t exprimé en seconde.
$h(t)$ est exprimée en mètre, l'accélération a est estimée à 9,6 m·s^{-2}, et h_0 est l'altitude en mètre à laquelle est lancée la fusée.
Une seconde fusée est lancée du même endroit avec une vitesse initiale et une accélération constante, différentes des précédentes. On constate que cette fusée met 1 seconde de plus pour revenir à l'altitude de départ et touche le sol 1 seconde plus tard que la première fusée.
• Quelles sont les vitesse et accélération de cette deuxième fusée ?

74 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère le point $F(1\,;\,2)$, un point M mobile sur l'axe des abscisses d'abscisse a, avec $a > 0$ et le point N sur la droite (FM) d'abscisse nulle.



On cherche à déterminer l'ensemble E des points M tels que $Aire_{OMN} > 6$.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

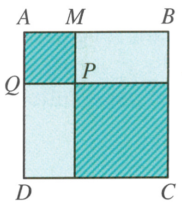
Pour cela, utiliser les outils

Curseur :  et Aire : 

2. Conjecturer l'ensemble E puis démontrer cette conjecture.

75 **Modéliser**

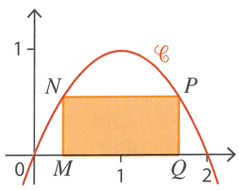
$ABCD$ est un carré de côté 4. Étant donné un point M mobile sur le côté $[AB]$, on construit le carré $AMPQ$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



• Où placer le point M pour que l'aire hachurée soit inférieure ou égale à 3 ?

76 La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous représente la fonction polynôme f définie par $f(x) = -x^2 + 2x$.

Le point M a pour coordonnées $(x\,;0)$ où $x \in [0\,;1]$.



1. Déterminer les coordonnées des trois sommets du rectangle autres que M.

2. Démontrer que le périmètre du rectangle $MNPQ$ est inférieur à 4.

77 On appelle F l'ensemble des polynômes $p_c(x) = 3x^2 - x + c$, où c est un entier de l'intervalle $[-5\,;5]$.

1. Quel est le nombre d'éléments de F ?

2. Combien existe-t-il d'éléments de F strictement positifs sur $\mathbb{R}$?

3. Confirmer ou infirmer la phrase : « $p_c(x)$ admet deux racines distinctes si et seulement si c est négatif ou nul. »

78 PRISE D'INITIATIVE

Modéliser

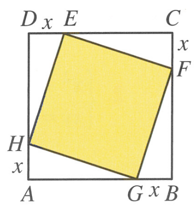
La distance à vol d'oiseau entre Bordeaux et Paris est de 500 km. Un avion parcourt cette distance à une vitesse constante V.

Un pilote a reçu des informations de la tour de contrôle indiquant qu'à son départ de Bordeaux, l'avion aura un vent favorable et constant d'une vitesse de 30 km·h^{-1} (sur l'ensemble de son trajet aller). Pour son vol retour, le vent sera défavorable et d'une vitesse de 30 km·h^{-1} (sur l'ensemble de son trajet retour). Le pilote sait qu'il lui faudra deux heures de vol au total pour réaliser cet aller-retour.

• Quelle est la vitesse de l'avion sur chaque parcours ?

79 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

$ABCD$ est un carré de côté 8 unités. On définit, sur les côtés de $ABCD$, les sommets d'un quadrilatère $EFGH$ tel que $DE = CF = BG = AH = x$ unités de longueur, comme l'indique la figure ci-dessous.



On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère jaune est minimale.

1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Définir, en particulier, un curseur qui fera varier la position des points E, F, G et H. Émettre une conjecture sur la nature du quadrilatère jaune et sur la réponse au problème posé.

2. Démontrer cette conjecture.

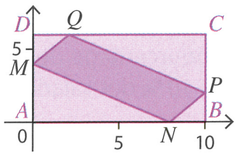
80 Est-il vrai que, parmi tous les rectangles de périmètre 20, celui qui a l'aire la plus grande est un carré ?

81 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Modéliser

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 10$ cm et de largeur $AD = 6$ cm.

On inscrit un parallélogramme $MNPQ$ dans le rectangle $ABCD$ tel que : $M \in [AD]$ et $DM = DQ = BN = BP$.



1. Conjecturer, avec un logiciel de géométrie dynamique, la position du point M pour que l'aire du parallélogramme $MNPQ$ soit maximale.

2. Conjecturer la position du point M pour que l'aire du parallélogramme $MNPQ$ soit égale à 30 cm^2.

3. Démontrer ces conjectures.

82 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{-2x}{x+2} \leqslant \dfrac{3x+2}{x-1}$

2. $\dfrac{3-x}{2-x} \leqslant \dfrac{x+2}{2x-1}$

83 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(x^2+4x-5)(-x^2+5x-7) > 0$

2. $\dfrac{x^2-10x+25}{-5x^2-3x+8} \leqslant 0$

3. $(-x^2-5x+6)(-3x^2+5x+2) \geqslant 0$

4. $(-x^2+10x-25)(4x^2+12x+9) > 0$

84 **Approfondissement**

Résoudre les systèmes suivants où x et y sont des réels.

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=18 \end{cases}$

85 **Approfondissement**

Résoudre les systèmes suivants où x et y sont des réels non nuls.

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ xy=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=-2 \end{cases}$

86 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en utilisant un changement de variable judicieux.

1. $x-3\sqrt{x}-2=0$ 2. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}+2=1$

87 Soit un repère du plan.
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x+1$ et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\sqrt{x+3}$ sont-elles sécantes ?

88 **Courbe de Lorenz**

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :
$$f(x)=0{,}96x^2+0{,}04x.$$
Une courbe de Lorenz peut modéliser, par exemple, la répartition des salaires dans une entreprise : x représente le pourcentage cumulé des personnes ayant les plus faibles salaires par rapport à l'effectif de l'entreprise ; $f(x)$ représente le pourcentage de la masse salariale de l'entreprise, c'est-à-dire la somme de tous les salaires. On suppose que la courbe représentative de f est une courbe de Lorenz.
a. Calculer $f(0{,}5)$ et interpréter le résultat.
b. Déterminer le pourcentage de la masse salariale totale affectée aux 10 % des salariés les mieux payés dans l'entreprise.
c. Calculer le pourcentage des salariés les moins bien payés dont la masse des salaires représente 50 % de la masse salariale totale.
Arrondir au pourcentage entier.
2. Que peut-on dire d'une entreprise dont la répartition des salaires serait modélisée par la courbe de la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=x$?

89 **Pour une meilleure écoute…**

Une entreprise produit et commercialise des casques audios au prix unitaire de 120 €.
On note x le nombre de dizaines de casques produits avec $0 \leqslant x \leqslant 16$.
Le coût total de production, en millier d'euros, de ces x dizaines d'unités est donné par :
$$C(x)=0{,}08x^2+0{,}2x+0{,}48.$$
1. L'entreprise a vendu 160 casques. A-t-elle réalisé un bénéfice ?
2. Quel est le nombre de casques produits lorsque le coût de production est égal à 15 480 € ?
Quel est alors le montant du bénéfice réalisé par l'entreprise ?
3. Déterminer le nombre de casques que l'entreprise doit produire et vendre pour que sa production soit rentable.
4. CALCULATRICE À l'aide d'une calculatrice, conjecturer le nombre de casques que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Préciser sa valeur puis démontrer la conjecture.

90 **Une équation de degré 4 particulière**

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$$x^4+x^3+x+1=0.$$
1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On pose $X=x+\dfrac{1}{x}$.
Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation :
$$(\text{E}') : X^2+X-2=0.$$
3. Résoudre (E') puis résoudre l'équation (E).
4. Par un raisonnement similaire, résoudre l'équation $(\text{E}_1) : x^4-x^3+3x^2-x+1=0$.
Montrer que cette équation est équivalente à l'équation $(\text{E}_1') : X^2-X+1=0$ et la résoudre.

91 **Approfondissement**

1. Démontrer que, pour tous réels a et b, on a :
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$
2. **Étude d'un cas particulier**
Soit le polynôme de degré 3, $f(x)=3x^3-7x^2+6x-8$.
a. En écrivant $f(2)=3\times2^3-7\times2^2+6\times2-8$, démontrer que $f(x)-f(2)$ s'écrit sous la forme du produit de $(x-2)$ par un polynôme du second degré.
b. Calculer $f(2)$.
c. En déduire une factorisation de $f(x)$.
d. Déterminer les racines de $f(x)$.
3. **Étude du cas général**
Soit un polynôme de degré 3, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, avec a, b, c et d quatre réels et $a\neq0$.
a. Soit α un réel quelconque. Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α puis démontrer que $f(x)-f(\alpha)$ s'écrit sous la forme du produit de $(x-\alpha)$ par un polynôme de degré 2.
b. En déduire que α est une racine du polynôme $f(x)$ si et seulement si $f(x)$ peut-être factorisé par $(x-\alpha)$.

92 **Raisonner**

1. Déterminer les réels b tels que l'équation :
$$3x^2 + bx + 4 = 0$$
admette une unique solution, que l'on déterminera.

2. Choisir deux réels b et c pour que l'équation $3x^2 + bx + c = 0$ admette deux solutions réelles distinctes.

3. On suppose $a > 0$.

a. Déterminer une condition suffisante pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admette deux solutions réelles distinctes.

b. Cette condition est-elle nécessaire ?

4. Déterminer l'ensemble des réels c tels que l'équation $2x^2 - x + c = 0$ n'admette pas de solution réelle.

5. Pour quelles valeurs de a l'équation $x^3 + ax^2 + x = 0$ admet-elle deux solutions distinctes ?

93 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :
$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 1}$$
$$\text{et } g : x \mapsto \frac{1}{-x^2 + 3x + 2}.$$

94 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Le plan est muni d'un repère. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A(0\,;1)$.

Une droite $\mathcal{D}_m$ de coefficient directeur m passe par le point A et coupe la parabole $\mathcal{P}$ en deux points que l'on nomme B et C. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la parabole et placer le point $A(0\,;1)$.

Définir un curseur m et tracer la droite $\mathcal{D}_m$.

À l'aide du mode *Trace*, conjecturer l'ensemble auquel appartient le point I quand m varie.

2. a. Montrer que les abscisses des points B et C vérifient l'équation $x^2 - mx - 1 = 0$.

b. Combien de solutions cette équation admet-elle ?

3. Exprimer les coordonnées de I en fonction des solutions de l'équation précédente.

4. Démontrer la conjecture émise.

95 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 3x + 1.$$
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses.

3. Pour tout réel p, on considère la droite $\mathcal{D}_p$ d'équation $y = x - p$.

Déterminer le nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}_p$ et de $\mathcal{P}$ suivant les valeurs de p.

4. Pour tout réel q, on considère la droite Δ_q d'équation $y = qx$.

Déterminer pour quelles valeurs de q la parabole P et la droite Δ_q n'ont pas de point commun.

96 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Courbe de Bézier**

Dans le plan rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(0\,;6)$, $B(2\,;0)$ et $C(4\,;6)$.

Soit t un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

On définit les points G, H et M par $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{GM} = t\overrightarrow{GH}$.

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble des points M quand t décrit l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique, puis faire apparaître l'ensemble décrit par le point M lorsque t varie.

Sur quelle courbe semble se déplacer le point M ?

2. a. Déterminer, en fonction de t, les coordonnées des points G, H et M.

b. Valider ou invalider la conjecture et préciser l'équation de la courbe sur laquelle se déplace le point M.

Les courbes de Bézier ont été introduites par l'ingénieur français Pierre Bézier, qui travaillait chez Renault dans les années 1960. Elles répondent au problème suivant : comment représenter facilement avec un logiciel de CAO (conception assistée par ordinateur) des formes complexes (aile d'avion, pièce de voiture, fontes de caractères…) en ne rentrant qu'un nombre fini de contraintes. En termes plus mathématiques, on souhaite construire des courbes à partir d'un nombre fini de points de contrôles, sans recherche d'équation.

97 **Approfondissement**

On considère l'équation (E) : $x^3 - 7x + 6 = 0$.

1. Montrer que $x_0 = 1$ est une solution de l'équation (E).

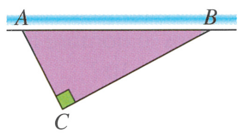
2. Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

3. En déduire la résolution de l'équation (E).

4. Reprendre les questions **1**, **2** et **3** avec l'équation :
$$8x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$$

98 **Modéliser**

Un agriculteur possède un champ en forme de triangle rectangle au bord de la rivière. Il souhaite poser une clôture sauf sur le côté qui jouxte la rivière et il sait que $AB = 50$ m.



• Quelles longueurs minimale et maximale de clôture doit-il acheter ?

VERS
L'épreuve écrite

99 ALGO PYTHON

On s'intéresse à la propagation d'une maladie dans une ville de 130 000 habitants.

La fonction f définie sur $[0\,;40]$ par :

$$f(t) = -30t^2 + 1\,200t + 4\,000$$

modélise le nombre de personnes touchées par la maladie t jour(s) après le début de l'épidémie.

1. Déterminer le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de 15 jours de suivi de la propagation.

2. Le conseil municipal a décidé de fermer les crèches de la ville dès que plus de 10 % de la population sont touchés par la maladie. Pendant combien de jours les crèches ont-elles été fermées ?

100 On donne les définitions suivantes.

• Fonction d'offre : elle exprime le prix de vente d'un objet en fonction de la quantité susceptible d'être fabriquée.

• Fonction de demande : elle exprime le prix d'achat d'un objet en fonction de la quantité susceptible d'être achetée.

• Prix et quantité d'équilibre : c'est une situation où, pour un prix donné, les quantités offertes sont égales aux quantités demandées.

Les fonctions d'offre O et de demande D d'un téléphone sont données, en euro, par les formules :

$$O(x) = 20 - \frac{10\,212}{x-120} \text{ et } D(x) = -2x + 250,$$

où $x \in [20\,;70]$ et représente le nombre de milliers de téléphones.

1. Déterminer la quantité et le prix d'équilibre.

2. Déterminer les quantités pour lesquelles l'offre est supérieure à la demande.

101 ALGO PYTHON **Prolifération bactérienne**

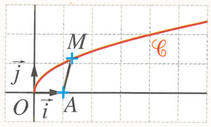
Un scientifique étudie la prolifération d'un certain type de bactéries. Il modélise le nombre de bactéries comme une fonction du temps t exprimé en heure, définie par $N(t) = 3t^2 + 69t + 150$.

1. Au bout de combien de temps le nombre initial de bactéries aura-t-il augmenté de 150 % ? Au bout de combien de temps le nombre initial de bactéries aura-t-il été multiplié par 10 ?

2. Écrire un algorithme en langage Python qui permet de connaître au bout de combien de temps le nombre initial de bactéries aura dépassé un certain nombre donné par l'utilisateur.

102 PRISE D'INITIATIVE

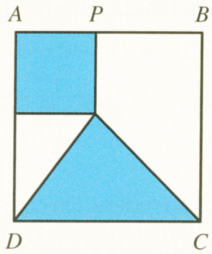
On considère la courbe représentative de la fonction racine carrée, notée $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On note M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et $A(1\,;0)$.



• Démontrer qu'il existe un seul point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance MA soit minimale.

103 **Modéliser**

$ABCD$ est un carré de côté 8. Soit P un point mobile sur le segment $[AB]$.

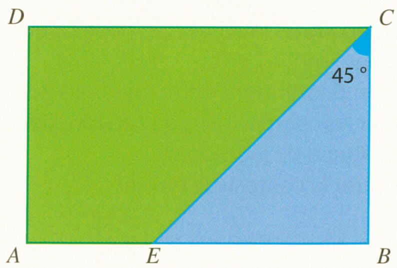


1. Déterminer la position du point P sur le segment $[AB]$ telle que l'aire de la surface bleue soit minimale.

2. Où doit-on placer le point P pour que la surface bleue occupe 75 % de la surface du carré ?

3. Est-il possible que l'aire de la surface bleue soit égale au quart de l'aire du carré ?

104



$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$.

1. Le trapèze $AECD$ et le triangle BCE peuvent-ils avoir la même aire ?

2. Déterminer les dimensions du rectangle pour que l'aire du trapèze soit maximale.

105 **1.** Existe-t-il une fonction polynôme de degré 2 vérifiant

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-2) = 1 \\ f(2) = 1 \end{cases} ?$$

2. Existe-t-il une fonction polynôme de degré 2 vérifiant

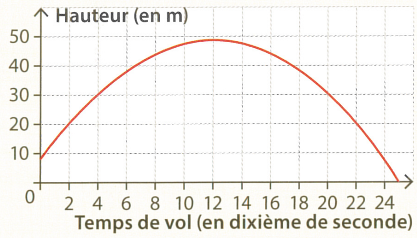
$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = 2 \\ g(2) = 11 \end{cases} ?$$

106 **Feu d'artifice**

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle hauteur atteindra la fusée après 4 secondes de vol ?

2. Pour des raisons de sécurité, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres. Déterminer l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire à cette contrainte.

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 8$.

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres.

1. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

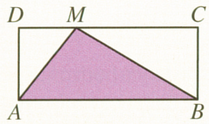
2. Pour des raisons de sécurité, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale.

Quel temps de vol avant l'explosion doit-il alors programmer ?

D'après Bac, Centres étrangers, juin 2017

107 **Modéliser, raisonner**

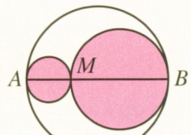
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$ et M un point mobile sur le segment $[DC]$.



• Le triangle AMB peut-il être rectangle en M ?

108 ALGO PYTHON

Soit un segment $[AB]$ de longueur 10 et un point M mobile sur ce segment.



1. Déterminer la position du point M pour que la somme des aires des disques de diamètre $[AM]$ et $[BM]$ soit minimale.

2. Déterminer la position du point M pour que la somme des aires des disques de diamètre $[AM]$ et $[BM]$ soit égale à la moitié de l'aire du disque de diamètre $[AB]$.

3. Compléter l'algorithme suivant écrit en langage naturel qui détermine, au dixième près, la plus petite longueur du segment $[AM]$ pour laquelle la somme des aires des disques de diamètre $[AM]$ et $[BM]$ est inférieure ou égale à 60.

```
x ← 0
y ← …
Tant que …
    x ← x + 0,1
    …
Afficher …
```

109 ALGO PYTHON

On donne l'algorithme suivant.

```
a ← 1
b ← 2
Tant que b − a > 0,01
    x ← (a + b)/2
    Si x² < x + 1
        a ← x
    Sinon
        b ← x
Afficher x
```

1. a. Quelle est la condition pour que l'algorithme s'arrête ?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

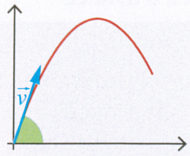
c. Traduire cet algorithme en langage Python et l'écrire dans un éditeur Python.

Quelle est alors la valeur de x obtenue ?

2. Calculer la valeur exacte de la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

Ce nombre est le nombre d'or.

110 Une trajectoire parabolique dépendant d'un paramètre



Si on néglige toutes les forces à l'exception du poids, un projectile lancé du sol à une vitesse v (en m·s^{-1}) en faisant un angle de α radians avec l'horizontale, suit une trajectoire parabolique d'équation :

$$y = -\frac{g}{2v^2} \times (1 + \tan^2(\alpha)) \times x^2 + \tan(\alpha) \times x,$$

où x désigne la distance horizontale parcourue par le projectile (en m) et y la hauteur du projectile en fonction de cette distance horizontale parcourue (en m).
De plus, $g = 9{,}8$ m·s^{-2} désigne l'accélération de la pesanteur terrestre.
Dans la suite, ce projectile désigne une fusée artisanale lancée à une certaine vitesse qui suit une trajectoire parabolique d'équation $y = -0{,}02(1 + k^2)x^2 + kx$, où k est un réel strictement positif dépendant de α.
On s'interroge sur la hauteur maximale atteinte par la fusée et sa distance horizontale maximale parcourue.

Questions Va piano

Cas où $k = 3$.

1. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la fusée dans le cas où $k = 3$.
2. Déterminer la distance horizontale maximale parcourue par la fusée, toujours dans le cas où $k = 3$.

Questions Moderato

ALGO PYTHON

1. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la fusée en fonction de k.
2. Déterminer la distance horizontale maximale parcourue par la fusée en fonction de k.

Questions Allegro

1. Montrer que la hauteur maximale atteinte par la fusée est inférieure ou égale à 12,5 m.
2. Montrer que la fusée ne peut parcourir une distance horizontale de plus de 25 m.

111 Réaliser un bénéfice

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine et toute la production est vendue. Le coût de production, en millier d'euros, de x dizaines d'objets est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;7]$ par $C(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 0{,}3$; chaque objet est vendu 80 €.

Questions Va piano

1. CALCULATRICE Représenter sur la calculatrice, la fonction C ainsi que la fonction recette R.
2. Utiliser le graphique pour déterminer les quantités d'objets que l'artisan doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice.
3. Évaluer graphiquement le bénéfice maximal qu'il peut réaliser.

Questions Moderato

On nomme B la fonction définie sur $[0\,;7]$ qui modélise le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par la production et la vente de x dizaine(s) d'objets.

1. Donner l'expression de $B(x)$.
2. Déterminer par le calcul les quantités d'objets que l'artisan doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice.

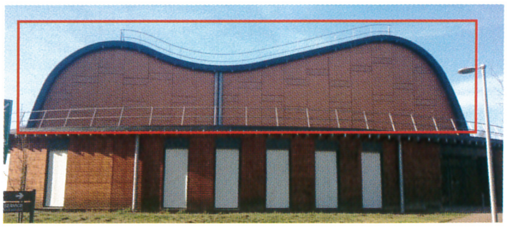
Questions Allegro

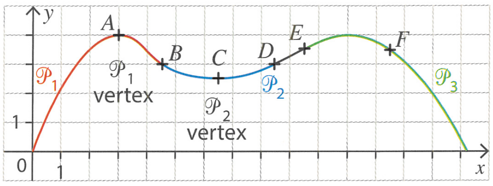
1. Déterminer le bénéfice maximal que cet artisan peut réaliser.
2. En raison d'un investissement supplémentaire de 100 €, l'artisan décide d'augmenter le prix de vente de chaque objet afin de conserver la valeur du bénéfice maximal déterminée à la question 1. Calculer ce prix de vente.

No problem!

1 What a nice high school!

Meline and Emmeline draw the roof of their school sports-hall (framed in red) thanks to a geometry software.
Thanks to the architect's plan drawn to scale they use three parabolas and a segment line passing throw the following points: $A(3\,;4)$, $B(4{,}5\,;3)$, $C(6{,}5\,;2{,}5)$, $D(8{,}5\,;3)$, $E(9{,}5\,;3{,}5)$ and $F(12{,}5\,;3{,}5)$.
We denote f_1, f_2, f_3 and g the functions with graphs $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, et $\mathscr{D}$.





1. Emeline thinks that function f_1 can be written like this: $f_1(x) = ax(x-6)$. Find the value of a.

2. Help Meline to choose the right statement for function f_2 among those statements:

a. $-0{,}125(x-6{,}5)^2 - 2{,}5$ **b.** $-0{,}125(x+6{,}5)^2 - 2{,}5$

c. $0{,}125(x-6{,}5)^2 + 2{,}5$ **d.** $-0{,}125(x-6{,}5)^2 + 2{,}5$

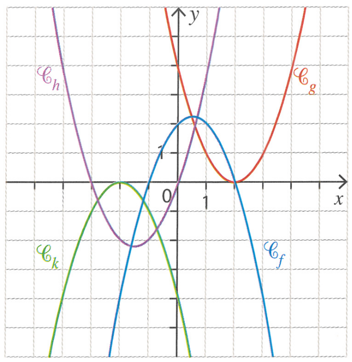
3. Thanks to points D and E, find the expression of function g.

4. Points F and E belong to $\mathscr{P}_3$ and the vertex of this parabola has the same ordinate as the $\mathscr{P}_1$ vertex. Find the expression for function f_3.

5. Using all the functions you've found and a geometry software, draw a sketch of the sports-hall roof.

2 Matching

For each parabola give the sign of a and the number of roots.



Individual work — Crosswords

1. One of the three ways to write a quadratic function.

2. To write a number or an expression as a product of its factors.

3. A function of the coefficients of a polynomial equation whose value gives information about the roots of the polynomial.

4. The path of a projectile under the influence of gravity follows a curve of this shape.

5. Containing one or more squared variables.

6. My abscissa is $-\dfrac{b}{2a}$.

7. A value of an unknown quantity satisfying a given equation.