Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

CHAPITRE

2 Fonctions polynômes du second degré

Aller aux racines de l'algèbre et de l'algorithmique

Al-Khwarizmi

Muhammad Al-Khwarizmi est un mathématicien, géographe et astronome perse du IXe siècle, originaire de l'actuel Ouzbékistan.
Le plus célèbre de ses écrits, *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala*, que l'on peut traduire par « le livre du rajout et de l'équilibre », fut traduit en latin au XIIe siècle, sous le titre *Algebra*. Traitant de la résolution des équations du second degré, il est considéré comme le premier manuel d'algèbre (le terme vient d'*al-jabr*).

Al-Khwarizmi n'utilise aucune notation littérale, et les résolutions sont décrites en langage « courant » suivant des algorithmes (le terme vient de son nom). L'inconnue est désignée comme *la racine* ou *la chose*, les constantes sont appelées *dirhams*.
Voici la description du calcul de la solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

« Quant aux carrés et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme tu dis : un carré et dix de ses racines égalent 39 dirhams. Sa résolution consiste à diviser les racines par 2, on trouve 5 dans ce problème ; au carré on trouvera 25 qu'on ajoute à 39 pour obtenir 64. Tu en prends alors la racine qui est 8. Tu en retranches la moitié du nombre des racines qui était 5, tu trouves 3. C'est la racine du carré que tu cherches. »

Bien que connaissant les nombres négatifs, Al-Khwarizmi ne les accepte pas comme solutions de ses équations. Sa description de la résolution permet-elle, de nos jours, de déterminer une deuxième solution de cette équation ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Équations et inéquations

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

1. -3 est solution de $x^2 + x - 6 = 0$.
2. Si $x = 2$, alors $3x^2 = 7x - 2$.
3. Pour tout x réel, $x^2 - 3x = x - x(4 - x)$.
4. L'opposé de $3x^2 - 6x + 5$ est $-3x^2 + 6x + 5$.
5. Pour tout x réel, $(x - 7)^2 + 51{,}3 > 0$.

2 Résolution graphique

1. Visualiser à l'aide de la calculatrice la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - x - 12$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) > 0$.
3. Vérifier que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = (x + 3)(x - 4).$$
4. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) > 0$.

3 Racines carrées

Simplifier les écritures suivantes.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{48}$
3. $\sqrt{98}$
4. $\dfrac{-12 + \sqrt{36}}{6}$
5. $\dfrac{6 - \sqrt{27}}{3}$
6. $\dfrac{2 + \sqrt{12}}{2}$

4 Algorithme

Voici deux programmes écrits en Python.

```
def f(x):
    a=(x+3)**2
    b=-a
    c=b+4
    return c
```

```
def g(x):
    a=x+1
    b=x+5
    c=-a*b
    return c
```

1. Taper successivement dans la console $f(0)$ et $g(0)$, $f(-2)$ et $g(-2)$, $f(1)$ et $g(1)$.
2. Que peut-on conjecturer ?

Démontrer cette conjecture.

5 Développer

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = x - 3(x - 7)$
2. $B = (3x - 2)^2$
3. $C = (2x - 5)(2x + 5)$

6 Factoriser

Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = x^2 - 36$
2. $B = 9x^2 - 25$
3. $C = 1 - 4y^2$
4. $D = (-2x + 1)^2 - 4$
5. $E = 25 - (2x + 5)^2$
6. $F = 7 - (x + 1)^2$
7. $G = (2x - 3)^2 - (x + 1)^2$
8. $H = (3x + 1)^2 - (x - 7)^2$

7 Équations du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 = 8$

b. $x^2 = -4$

c. $(x - 1)^2 = 9$

d. $(x - 1)(-3x + 2) = 0$

e. $x^2 + 2x + 1 = 0$

f. $(2x + 3)^2 + 1 = 0$

g. $(2x + 3)^2 - 4 = 0$

h. $(x - 1)^2 - 3$

i. $x(-7x + 11) = 0$

2. Conjecturer le nombre de solutions d'une équation du second degré.
3. Donner trois équations du second degré ayant pour solutions -1 et 5.

8 Fonction inconnue

On donne ci-contre un extrait de feuille de calcul.

La fonction saisie en colonne B est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

La variable x est en colonne A.

En utilisant les renseignements fournis par cette feuille, déterminer :

a. les réels x_1 et x_2 ;

b. le réel a.

	A	B
1	-5	-24
2	-4	-10
3	-3	0
4	-2	6
5	-1	8
6	0	6
7	1	0
8	2	-10
9	3	-24
10	4	-42
11	5	-64
12	6	-90
13	7	-120
14	8	-154

Pour construire le cours

SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation A — Nourrir les dauphins

Objectif
Modéliser une situation.

Dans un bassin, un dauphin nage tranquillement et aperçoit, à l'instant $t = 0$ seconde, un poisson lancé par son soigneur. Il saute, l'attrape 1 seconde plus tard à une hauteur de 1,5 mètre et replonge dans l'eau au bout de 6 secondes.
La trajectoire de son saut est modélisée par la courbe d'une fonction f définie par :

$$f(t) = a(t - t_1)(t - t_2),$$

où a, t_1 et t_2 désignent des réels.
Le niveau du plan d'eau du bassin correspond à l'altitude 0 mètre et $f(t)$ est la hauteur, en mètre, atteinte par le dauphin au bout d'une durée t, en seconde.

- Déterminer l'expression de $f(t)$.

Situation B — Transformer une fonction CALCULATRICE

Objectif
Exploiter les différentes expressions d'une fonction du second degré.

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 8,$$
$$g(x) = (x - 4)(x + 2)$$
$$\text{et } h(x) = (x - 1)^2 - 9.$$

1. **a.** Représenter sur l'écran de la calculatrice, les fonctions f, g et h.
Que peut-on conjecturer ?
b. Démontrer cette conjecture.
c. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère.
Quels renseignements sur $\mathscr{C}$ chacune des écritures de $f(x)$ donne-t-elle ?

2. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^2 - 4x - 5$.
a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, l'écriture factorisée de $k(x)$ et les réels a, α et β tels que $k(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
b. Démontrer cette conjecture.

3. Soit la fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = -x^2 + 4x - 3$.
a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, l'écriture factorisée de $l(x)$ et les réels a, α et β tels que $l(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
b. Démontrer cette conjecture.

4. Soit la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = -2x^2 + 4x - 5$.
a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les réels a, α et β tels que $m(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
b. Démontrer cette conjecture.
c. Justifier que $m(x)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $-2(x - x_1)(x - x_2)$.

Situation C Faire varier des paraboles LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Observer l'influence des coefficients sur l'existence des racines d'un trinôme.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

1 **a.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer trois curseurs a, α et β puis la représentation graphique de f.

b. Observer la courbe de f et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ lorsqu'on fait varier successivement les paramètres a, α puis β.

c. De quels paramètres dépend l'existence de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Conjecturer une condition sur a et β pour que l'équation $f(x) = 0$ n'admette pas de solution.
Conjecturer une condition pour que l'équation $f(x) = 0$ admette une seule solution.
Enfin, conjecturer une condition pour que l'équation $f(x) = 0$ admette deux solutions.
Justifier ces conjectures.

2 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

a. Créer trois curseurs a, b et c puis la représentation graphique de g et le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

b. Observer la représentation graphique de g, le nombre de solutions de $g(x) = 0$ et le réel Δ lorsqu'on fait varier successivement les paramètres a, b puis c.

c. Conjecturer des conditions sur Δ pour que l'équation $g(x) = 0$ n'admette pas de solution, admette une seule solution, admette deux solutions.

Situation D Déterminer un bénéfice maximal

Objectifs
Déterminer et utiliser une fonction polynôme de degré 2 pour résoudre une inéquation.

Un constructeur automobile décide de commercialiser des voitures à bas coût : chaque voiture doit être vendue 6 milliers d'euros.
Sa production q peut varier entre 0 et 100 milliers de voitures. Suite à une étude réalisée, les coûts de production (en million d'euros) sont donnés par la formule suivante :
$C(q) = 0{,}05q^2 + q + 80$ (q exprimé en millier d'unités).

1 Exprimer, en fonction de q, la recette notée $R(q)$, en million d'euros.

2 En déduire, en fonction de q, la fonction polynôme du second degré B qui donne le bénéfice réalisé par l'entreprise.

3 **a.** Vérifier que $B(q) = -0{,}05(q - 50)^2 + 45$.

b. Dans quel intervalle doit se situer la quantité de voitures produites pour réaliser un bénéfice positif ?

4 Quel est le nombre d'automobiles à produire pour obtenir un bénéfice maximal ?

Connaître le cours

1. Fonctions polynômes du second degré

1. Fonction polynôme

Définition

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression algébrique peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Les réels a, b et c sont appelés **coefficients** de la fonction polynôme.

Remarque

L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite **forme développée** de $f(x)$ ou **trinôme du second degré**.

2. Forme canonique

DÉMO en ligne

Propriétés et définition

Toute fonction polynôme f de degré 2 de forme développée $ax^2 + bx + c$, admet une écriture de la forme $a\,(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette écriture est la **forme canonique** de la fonction polynôme.

3. Variation et représentation graphique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que, pour tout x, $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

DÉMO p. 55

Théorème

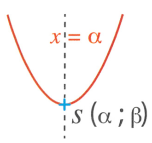
- Si $a > 0$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.
- Si a < 0, alors f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

Propriété (admise)

Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est une **parabole** de sommet $S\,(\alpha\,;\beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

$a > 0$

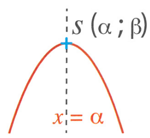
x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$



La parabole est tournée « vers le haut »

$a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$



La parabole est tournée « vers le bas »

Exercice résolu 1 Déterminer la forme canonique

Déterminer la forme canonique du trinôme $f(x) = -x^2 + 2x - 5$.

Solution commentée

Première méthode

f est une fonction polynôme de degré 2, de coefficients $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$. Son écriture canonique est $-(x - \alpha)^2 + \beta$, avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f(1) = -4.$$

Donc pour tout x réel, $f(x) = -(x - 1)^2 - 4$.

Deuxième méthode

On écrit $f(x) = -(x^2 - 2x + 5)$ en factorisant par $a = -1$.

Puis, en remarquant que $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, on obtient $f(x) = -[(x - 1)^2 - 1 + 5] = -(x - 1)^2 - 4$.

EXERCICE 6 p. 64

Exercice résolu 2 Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2

Étudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 3 - (x + 2)^2 \text{ et } g(x) = 2x^2 + 4x - 3.$$

Solution commentée

- $f(x) = -(x - (-2))^2 + 3$. On reconnaît la forme canonique de $f(x)$ avec $a = -1$, $\alpha = -2$ et $\beta = 3$.
  f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,; -2]$ et strictement décroissante sur $[-2\,; +\infty[$.
  La fonction f admet alors un maximum égal à 3, atteint en -2.
- $g(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, soit $a > 0$,
  donc g admet un minimum en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{4} = -1$ égal à $g(-1) = -5$.
  g est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,; -1]$ et strictement croissante sur $[-1\,; +\infty[$.

EXERCICE 7 p. 64

Exercice résolu 2 Identifier la forme d'une fonction polynôme de degré 2

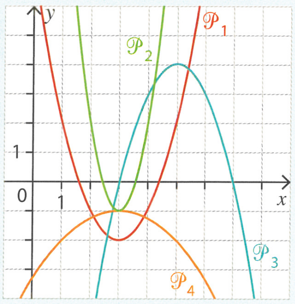
Sans calculatrice, associer chaque fonction polynôme ci-dessous à la parabole qui la représente.

$f(x) = -1 + 3(x - 3)^2$

$g(x) = -1 - 0{,}25(x - 3)^2$

$h(x) = x^2 - 6x + 7$

$i(x) = (x - 3)(7 - x)$



Solution commentée

- La forme canonique de $f(x)$ indique que f admet un minimum ($a > 0$), égal à -1 atteint en 3.
  Elle est représentée par $\mathcal{P}_2$.
- La forme canonique de $g(x)$ indique que g admet un maximum ($a < 0$), égal à -1 atteint en 3.
  Elle est représentée par $\mathcal{P}_4$.
- L'écriture factorisée de $i(x)$ indique que ses racines sont 3 et 7, donc que sa représentation graphique coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(3\,; 0)$ et $(7\,; 0)$. On reconnaît la parabole $\mathcal{P}_3$.
- Par élimination, la fonction h est représentée par la courbe $\mathcal{P}_1$.

EXERCICE 1 p. 64

3. Signe d'un trinôme du second degré

Théorème

DÉMO p. 68

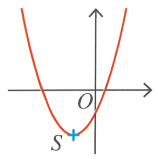
Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

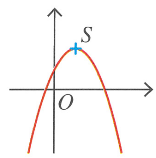
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$, où x_1 et x_2 sont les racines ($x_1 < x_2$).
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ s'annule en son unique racine x_0 et est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Illustration graphique

	$a > 0$	$a < 0$

$\Delta > 0$

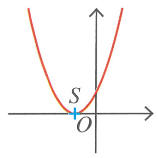


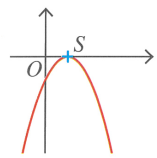


La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

$\Delta = 0$

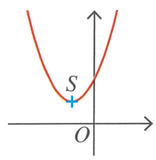




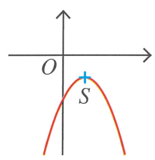
La parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

$\Delta < 0$



La parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses.



La parabole est située au-dessous de l'axe des abscisses.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Remarque

On peut retenir ce théorème sous la forme :
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre les racines quand elles existent ou du signe de a sauf entre les racines quand elles existent.

Exemple

Le polynôme $(1 - x)(3x - 2)$ a pour racines 1 et $\frac{2}{3}$. Le coefficient a est le coefficient de x^2.
On a $a = -3 < 0$.
Le trinôme est du signe de $-a$ donc positif sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$ et du signe de a donc négatif sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right] \cup [1\,;+\infty[$.

Exercice résolu 1 Étudier le signe d'un trinôme du second degré

Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies ci-dessous et les représenter graphiquement avec la calculatrice pour contrôler les résultats.

1 $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$ 2 $g(x) = 2x^2 - 4x + 2{,}4$

Solution commentée

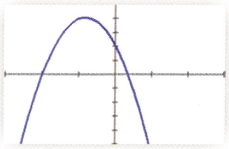
1 $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 + 24 = 49$

$\Delta > 0$, donc le trinôme $f(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+7}{2 \times (-3)} = \dfrac{12}{-6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-7}{2 \times (-3)} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$.

$a < 0$, donc on obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



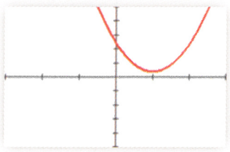
Sur la calculatrice, on constate qu'effectivement la parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et $\frac{1}{3}$ et est au-dessus de cet axe sur $\left]-2\,;\frac{1}{3}\right[$.

2 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2{,}4 = 16 - 19{,}2 = -3{,}2$

$\Delta < 0$, donc le trinôme $g(x)$ est du signe de a (ici $a = 2$) sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	



Sur la calculatrice, on constate qu'effectivement la parabole est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

EXERCICE 34 p. 67

Exercice résolu 2 Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre les inéquations suivantes.

1 $(2x + 1)(3 - x) > 0$ 2 $-2x^2 + 5x \leqslant 4$ 3 $(x - 4)^2 \leqslant (-5x + 2)^2$

Solution commentée

1 Le trinôme $(2x + 1)(3 - x)$ admet deux racines $-\frac{1}{2}$ et 3.

Le coefficient de x^2 est $a = -2$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\frac{1}{2}\,;3\right[$.

2 L'inéquation $-2x^2 + 5x \leqslant 4$ est équivalente à $-2x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 25 - 32 = -7$

$\Delta < 0$, alors le trinôme $-2x^2 + 5x - 4$ est du signe de a (ici $a = -2$) sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

3 L'inéquation $(x - 4)^2 \leqslant (-5x + 2)^2$ est équivalente à $(x - 4)^2 - (-5x + 2)^2 \leqslant 0$.

On reconnaît une identité remarquable : $(x - 4)^2 - (-5x + 2)^2$ est de la forme $A^2 - B^2$.

On obtient ainsi :

$$(x - 4)^2 - (-5x + 2)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow [x - 4 - (-5x + 2)][x - 4 + (-5x + 2)] \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (6x - 6)(-4x - 2) \leqslant 0.$$

Le trinôme $(6x - 6)(-4x - 2)$ admet deux racines 1 et $-\frac{1}{2}$ (les valeurs qui annulent chacun des deux facteurs).

Le coefficient de x^2 est $a = -24$, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty\,; -\frac{1}{2}\right] \cup [1\,;+\infty[$.

EXERCICE 36 p. 67

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution réelle.

Démonstration

On démontre dans le cas où $\Delta > 0$.
La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est :

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \text{ comme } \Delta > 0,\ \Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 \text{ et } 4a^2 = (2a)^2 \qquad (1)$$

Donc $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0 \qquad (2)$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0, \text{ car } a \neq 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (6)$$

L'équation a donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

1. Rappeler l'expression de α et β en fonction des coefficients a, b et c.
2. Expliquer comment on est passé de l'expression de la ligne (3) à l'expression de la ligne (4).
3. Quelle propriété mathématique a-t-on utilisée pour passer de la ligne (4) à la ligne (5) ?
4. Pourquoi a-t-on pu écrire chaque solution sous la forme d'une seule fraction ?
5. Terminer les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
> On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
> Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration.

- Écrire la forme canonique de la fonction f en fonction de α et β.
- Considérer deux nombres réels u et v appartenant à $]-\infty\,;\alpha]$ tels que $u \leqslant v$.
- Comparer $u - \alpha$ et $v - \alpha$.
- Comparer alors $(u - \alpha)^2$ et $(v - \alpha)^2$ en justifiant précisément.
- En déduire une comparaison de $f(u)$ et $f(v)$ et conclure.
- Reprendre la démonstration avec deux nombres réels u et v appartenant à $[\alpha\,;+\infty[$ tels que $u \leqslant v$.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
> Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration.

- Écrire la forme canonique de la fonction f en fonction de a, b et Δ.
- Conclure sur le signe de $f(x)$.

Utiliser différents raisonnements

Pour chaque affirmation ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1 Un trinôme qui a un discriminant positif admet au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

2 Si a et c sont de signes contraires, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines.

3 Deux trinômes qui ont les mêmes racines sont égaux.

> **Contre-exemple**
> Un contre-exemple permet de montrer qu'une proposition mathématique est fausse en donnant un exemple pour lequel la proposition n'est pas vérifiée.

Apprendre par le texte & la vidéo

7 VIDÉOS DE COURS

Expression d'une fonction polynôme du second degré

- Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- Sa forme développée est :

$$ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

- Sa forme canonique est :

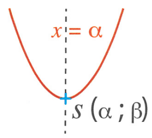
$$a\,(x - \alpha)^2 + \beta,$$

$$\text{où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Variation et représentation graphique

$a > 0$

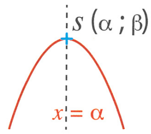
x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$



La parabole est tournée « vers le haut ».

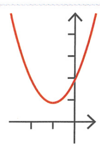
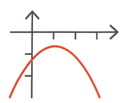
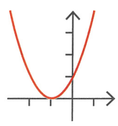
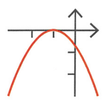
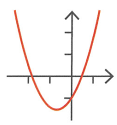
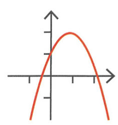
$a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$



La parabole est tournée « vers le bas ».

Résolution d'équation de degré 2
Factorisation éventuelle et signe d'un trinôme

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Équation $f(x) = 0$	Factorisation de $f(x)$	Signe de $f(x)$	Représentation graphique $a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$	Du signe de a pour tout réel x		
$\Delta = 0$	Une seule solution dans $\mathbb{R}$ $-\dfrac{b}{2a}$	Pour tout réel x $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$	Du signe de a pour tout réel x, et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$		
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ Somme $S = -\dfrac{b}{a}$ Produit $P = \dfrac{c}{a}$	Pour tout réel x $f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$	Du signe de a sauf entre les racines		

Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 11 et vérifier les réponses.
Si nécessaire, réviser les points de cours en texte ou en vidéo.

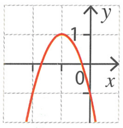
1 Parmi les expressions algébriques des fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des fonctions polynômes du second degré.

a. $x^2 - x$
b. $x^3 + x^2 + x + 11$
c. $-7x + 4$
d. $x(x + 2)$
e. $x^2 - (x + 2)^2$
f. $(3x + 5)^2 - 25$
g. $\dfrac{1}{x^2 + 2}$
h. $\left(3 + \sqrt{x}\right)^2$

2 Donner la forme canonique des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 7 \text{ et } g(x) = -x^2 + 3x.$$

3 Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan, la parabole ci-dessous représente une fonction polynôme du second degré f.



• Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

4 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	

On sait de plus que $f(-1) = 0$.
• Déterminer une expression de $f(x)$.

5 Dresser le tableau de variation des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 7 \text{ et } g(x) = 4 - (x + 3)^2.$$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2 - 4x - 12 = 0$
2. $-4x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $x^2 - x + 1 = 0$

7 Donner, si possible, la forme factorisée des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 4x^2 + x + 1 \text{ et } g(x) = 2x^2 - 2x - 1.$$

8 f est une fonction polynôme de degré 2 qui vérifie les conditions suivantes :

• $f(x) = 0$ a pour solutions -2 et 1 ;
• $f(-1) = -2$.

• Déterminer une expression de $f(x)$.

9 Déterminer deux réels dont la somme est 19 et le produit 99.

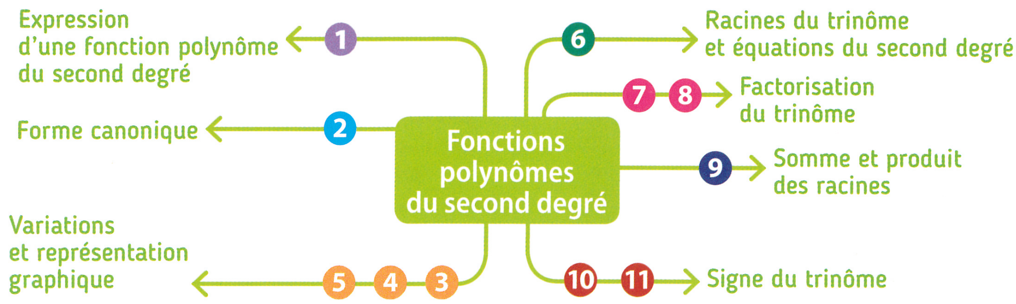
10 Étudier le signe de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 1$$
$$g(x) = -2x^2 - 7x + 9$$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$(-2x + 7)(x + 11) \geqslant 0 \text{ et } 3x^2 - 5x + 2 > 0.$$

CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Intersection de courbes avec l'axe des abscisses

Objectif Utiliser un discriminant dans une instruction conditionnelle.

1. Écrire en langage naturel, un programme qui teste si la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré coupe ou non l'axe des abscisses.
2. Le traduire en langage Python et le programmer.
3. Le tester avec les fonctions f, g, h, k, l et m définies sur $\mathbb{R}$, par :

$f(x) = \frac{7}{3}x^2 + x + 1$; $\quad g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$;

$h(x) = 5x^2 - 4x - 1$; $\quad k(x) = 3x^2 + 20x - 7$;

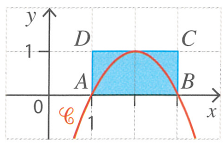
$l(x) = x^2 + (\sqrt{5} + 1)x - 2\sqrt{5}$; $\quad m(x) = 5x^2 + (10^{12} - 10^{-12})x - 1$.

4. Confirmer ou infirmer les résultats donnés par le programme et préciser les abscisses des points d'intersection (quand ils existent) de la courbe et de l'axe des abscisses.

TP 2 Une seconde marche aléatoire

Objectif Représenter une marche aléatoire.

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.



On souhaite évaluer l'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe de f et l'axe des abscisses par la méthode de Monte-Carlo décrite ci-dessous.

On choisit un point M au hasard appartenant au rectangle $ABCD$ contenant le domaine $\mathscr{D}$.

On admet que la probabilité p qu'un point M appartienne au domaine $\mathscr{D}$ est égale au quotient de l'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ par l'aire du rectangle $\mathscr{A}_{ABCD}$.

1. Exprimer $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ en fonction de p.
2. Pour évaluer p, on simule l'expérience aléatoire qui consiste à choisir n points au hasard dans le rectangle $ABCD$. Pour n suffisamment grand, la fréquence des points M qui sont dans le domaine $\mathscr{D}$ est une valeur approchée de p.

Soit un point $M(x\,;y)$ choisi dans le rectangle $ABCD$.

a. Donner un encadrement de x et un encadrement de y.

b. La fonction `random()` de Python renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1[$.

Déterminer les coefficients a et b pour que `x = a random()+b` appartienne à l'intervalle souhaité.

Compléter le programme suivant écrit en Python afin qu'il affiche la fréquence des points M appartenant au domaine $\mathscr{D}$ en fonction de n.

```
from random import *
def aire(n):
    c=0
    for i in range (1,...):
        x=...*random()+...
        y=...
        if ...:
            c=...
    return ...
```

3. Tester ce programme et évaluer $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$.

TP 3 L'algorithme de Héron

Objectif
Écrire un programme avec une boucle for pour déterminer le comportement d'une suite.

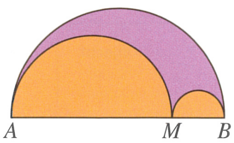
Soit a un entier naturel. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. **a.** Écrire une fonction en Python, nommée u, qui calcule les termes de cette suite, n et a étant choisis par l'utilisateur.
b. Tester la fonction pour $a = 2$ et $n = 10$.
Que remarque-t-on ?
c. Modifier cet algorithme pour qu'il affiche une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-n} près, n et a étant choisis par l'utilisateur. Le programmer et le tester pour $a = 5$ et $n = 3$.
2. Soit le polynôme $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
a. Donner la forme canonique de $f(x)$.
b. Modifier l'algorithme de la question **1 c** pour calculer des valeurs approchées des racines de $f(x)$ à 10^{-3} près.

TP 4 Les lunules d'Hippocrate

Objectif
Écrire un programme avec une boucle while.

Soient un demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de diamètre $[AB]$, avec $AB = 8$ cm et M un point mobile sur le segment $[AB]$.
On construit les deux demi-disques $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de diamètre $[AM]$ et $[MB]$. On pose $x = AM$.



1. Déterminer l'expression de l'aire de la surface rose en fonction de la position du point M.
2. Compléter la fonction suivante écrite en langage Python afin qu'elle détermine la position du point M pour laquelle l'aire de la surface rose est égale à la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$.

```
from math import pi
def lunule():
    x=0
    a=0
    while a!=...:
        x=x+0.1
        a=...
    return x
```

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire de la surface rose est égale à trois quarts de l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$?
4. Retrouver ces résultats par le calcul.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- La boucle Tant que s'écrit de la manière suivante.

Tant qu'une condition est vérifiée faire instruction

```
while condition:
    instruction
```

- Calculer une racine $\sqrt{x}$, s'écrit de la manière suivante.

sqrt(x)

- Tester si a est différent de b.

a!=b

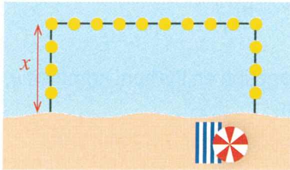
- La fonction random renvoie aléatoirement un nombre décimal compris entre 0 et 1.

random()

TP 5 À la plage LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Résoudre un problème d'optimisation.

Un maître-nageur veut délimiter en bord d'océan une zone de baignade rectangulaire à l'aide d'une ligne de flotteurs qui mesure 32 mètres.



1. Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique les dimensions du rectangle afin que son aire soit maximale.
2. Démontrer cette conjecture.

TP 6 Quand les paramètres s'en mêlent LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Résoudre des équations et inéquations avec des paramètres.

Soient la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + m$, où m est un réel.

1. **a.** Dans un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur m variant de -10 à 10 avec un incrément de 0,1 puis la droite $\mathscr{D}$ et la parabole $\mathscr{P}$.
b. Conjecturer, suivant les valeurs du réel m, l'existence des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ainsi que la position relative de ces deux courbes.
2. Démontrer ces conjectures.

TP 7 Équidistance LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Déterminer un ensemble de points.

Soient une droite $\mathscr{D}$ et un point F non situé sur la droite $\mathscr{D}$.
On se propose de déterminer l'ensemble des points du plan équidistants de $\mathscr{D}$ et de F.

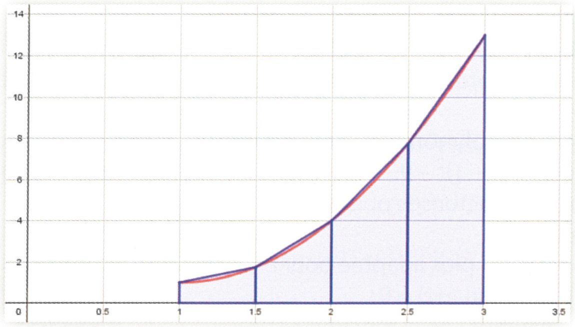
1. **a.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire une droite $\mathscr{D}$ et un point F.
Construire aussi un point H sur la droite $\mathscr{D}$ et la droite $\mathscr{T}$ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ en H.
b. Construire un point M appartenant à la droite $\mathscr{T}$ équidistant de F et H et, en utilisant le mode *Trace*, conjecturer l'ensemble des points M lorsque H décrit la droite $\mathscr{D}$.
2. Démonstration : on se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\mathscr{D}$ est la droite $(O\,;\vec{i})$ et le point F est sur la droite $(O\,;\vec{j})$. Soit $M\,(x\,;y)$ un point quelconque du plan.
a. Établir une relation liant x et y pour que M soit équidistant de F et de $\mathscr{D}$.
b. En déduire la nature de l'ensemble géométrique des points M équidistants de $\mathscr{D}$ et F.
Rappel : la distance d'un point M à une droite d est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur d.

TP 8 Aire sous la courbe avec la méthode des trapèzes TABLEUR

Objectif
Déterminer l'aire sous une courbe.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative, sur l'intervalle [1 ; 3], de la fonction polynôme du second degré, définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

On propose ici une méthode pour déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.



1 **a.** Observer la construction des trapèzes.

b. Indiquer le calcul à effectuer pour obtenir la somme des aires de ces quatre trapèzes. En déduire une valeur approchée de l'aire.

c. On donne ci-dessous cette somme dans une feuille de calcul.

La colonne C contient l'aire des trapèzes successifs.

La colonne D contient les aires cumulées des trapèzes.

Quelles formules peut-on saisir dans les cellules A3, B2, C2, D2 et D3 ? Réaliser cette feuille de calcul.

	A	B	C	D
1	x	f(x)	aire des trapèzes	aire cumulée
2	1	1	0,6875	0,6875
3	1,5	1,75	1,4375	2,1250
4	2	4	2,9375	5,0625
5	2,5	7,75	5,1875	10,2500
6	3	13		

2 À présent on décide de partager le segment [1 ; 3] en n intervalles de même longueur (où n est un entier naturel). On obtient n trapèzes.

a. Modifier la feuille de calcul de façon à obtenir la somme des aires des trapèzes pour $n = 10$, puis $n = 100$ et enfin $n = 1\,000$.

b. Conjecturer la valeur de l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Boîte à outils

Logiciel de géométrie

- Créer un curseur nommé a en utilisant l'icône [a=2] puis régler les paramètres du curseur.

Tableur

- Élever le contenu de la cellule A2 au carré :

=A2^2