Réfléchir, parler & réagir

Calcul mental

1 Trouver le terme suivant dans chaque suite de nombres ci-dessous :
1. 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; ...
2. 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; ...
3. 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...
4. 4 ; 7 ; 13 ; 25 ; 49 ; ...
5. $2 ; -3 ; \frac{9}{2} ; -\frac{27}{4} ; \frac{81}{8} ; \ldots$

2 On considère la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.
- Calculer les termes u_3 puis u_{10}, u_{20} et u_{50}.

3 (u_n) est la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -7.
- Calculer u_{10}.

4 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $\frac{4}{3}$.
- Calculer u_{10}.

5 On considère la suite arithmétique (u_n) telle que $u_2 = 2$ et $u_8 = 20$.
- Calculer sa raison r et son premier terme u_0.

6 (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 81$ et de raison $-\frac{1}{3}$.
- Calculer v_1, v_2 et v_3.

7 (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_1 = 0{,}01$ et de raison 5.
- Calculer v_3.

8 On considère la suite géométrique (v_n) telle que $v_1 = 50$ et $v_2 = 200$.
- Calculer sa raison q et son premier terme v_0.

9 Calculer les sommes S suivantes.
1. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$
2. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 19$

DIAPORAMA CALCUL MENTAL EN PLUS

Automatismes

10 Donner la relation entre u_{n+1} et u_n sachant qu'à chaque étape :
1. u_n double.
2. u_n augmente de 3,5.
3. u_n augmente de 15 %.
4. u_n diminue de 50.
5. u_n diminue de 3 %.
6. u_n diminue de 12,4 %.

11 Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique, donner la formule explicite et préciser le sens de variation.

1. $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$ 2. $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}6 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} u_1 = 2500 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$

12 Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique, donner la relation de récurrence et préciser le sens de variation.

1. $u_n = 4 + 0{,}2n$ 2. $u_n = -2 \times 3^n$

3. $u_n = 0{,}7^n$ 4. $u_n = 10 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

5. $u_n = 6n - 1$ 6. $u_n = -\frac{5}{2^n}$

13 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n$.
1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. Avec une calculatrice ou un tableur, afficher les dix premiers termes de cette suite.
3. Proposer un énoncé d'exercice qui utilise cette suite dans un contexte lié à une évolution en pourcentage.

14 Comment fait-on pour :
1. obtenir les premiers termes d'une suite à la calculatrice ? au tableur ? avec Python ?
2. montrer qu'une suite n'est pas arithmétique ?
3. montrer qu'une suite est arithmétique ?
4. montrer qu'une suite n'est pas géométrique ?
5. montrer qu'une suite est géométrique ?
6. étudier le sens de variation d'une suite ?

15 On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n = 2n^2 - 3n$.
- Démontrer que (u_n) est croissante.

16 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 0,9.
1. Écrire un algorithme qui calcule la somme des 30 premiers termes de cette suite.
2. Écrire un algorithme qui calcule la somme :

$$u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{29}.$$

Préparation d'un oral

Préparer une trace écrite permettant de présenter à l'oral une argumentation indiquant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique.
2. Si q est un réel strictement positif, la suite des sommes $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ semble toujours avoir pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On dispose d'un capital de 1 000 € que l'on souhaite placer pendant 10 ans. Mieux vaut alors le placer à intérêts annuels simples au taux de 2 % qu'à intérêts annuels composés au taux de 1,8 %.

Travail en groupe

45 min

Constituer des groupes de 4 élèves qui auront chacun un des rôles suivants.
Résoudre tous ensemble la situation donnée. Remettre une trace écrite de cette résolution.

Animateur
- responsable du niveau sonore du groupe
- distribue la parole pour que chacun s'exprime

Rédacteur en chef
- responsable de la trace écrite rédigée par tous les membres du groupe

Ambassadeur
- porte-parole du groupe, seul autorisé à communiquer avec le professeur et, éventuellement, d'autres groupes

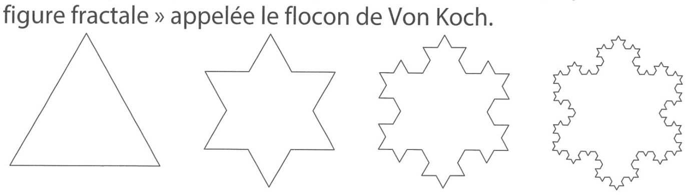
Maître du temps
- responsable de l'avancement du travail du groupe
- veille au respect du temps imparti

Une personne a gagné à un jeu et on lui propose de lui verser 300 000 € par jour pendant un mois. En contrepartie, on lui demande peu de chose : le premier jour, elle doit rendre un centime d'euro ; le 2e jour, 2 centimes d'euro ; le 3e jour, 4 centimes d'euro et on double ainsi chaque jour la somme qui précède, jusqu'à la fin du mois.
- La personne a-t-elle intérêt à accepter cette proposition ?

Exposé

voir p. 6

On présente ci-dessous les quatre premières étapes de la construction, à partir d'un triangle équilatéral de côté 1, d'une « figure fractale » appelée le flocon de Von Koch.



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

Après avoir effectué les recherches indiquées, préparer une présentation orale, un poster ou un diaporama.

La construction de ce flocon se poursuit de la même façon, étape après étape. Pour le construire complètement, il faudrait une infinité d'étapes. Faire des recherches sur la notion de « figure fractale » et étudier en particulier celle du flocon de Von Koch (on pourra étudier la suite des périmètres et celle des aires des figures obtenues à chaque étape).

VA PIANO

Exercices

+ D'ENTRAÎNEMENT SUR kwyk voir rabats

Modes de génération d'une suite

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 1$.
• Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

2 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
• Calculer u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

3 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 4$.
• Calculer v_1, v_2 et v_3.

4 Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0 = 1$ et les autres termes sont obtenus en ajoutant 1 au double du carré du terme précédent.
1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Donner la relation entre w_{n+1} et w_n.

5 On considère la suite de triangles rectangles isocèles suivante : le premier triangle a ses côtés de longueur 1, 1 et $\sqrt{2}$ cm. On effectue un agrandissement de rapport 3 pour obtenir le triangle suivant.
1. Construire les trois premiers triangles.
2. Calculer les périmètres p_1, p_2 et p_3 des trois premiers triangles.
Donner la relation entre p_{n+1} et p_n.
3. Calculer les aires a_1, a_2 et a_3 des trois premiers triangles. Donner la relation entre a_{n+1} et a_n.

6 Donner la valeur exacte des cinq premiers termes de chacune des suites proposées.
1. La suite (a_n) est définie comme la suite des décimales de $\sqrt{3}$.
2. La suite (b_n) est définie pour tout entier naturel n par $b_n = (-2)^n$.
3. La suite (c_n) est telle que, pour tout entier naturel n non nul, c_n est l'inverse du nombre n.

7 1. Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer si elle est définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence.
a. $u_n = 3n^2$ pour tout entier naturel n.
b. $v_n = n - 1$ pour tout entier naturel n.
c. $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n - 5 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.
d. $x_n = 4$ pour tout entier naturel n.
e. $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = \dfrac{1}{2}t_{n-1} \end{cases}$ pour tout entier naturel $n > 1$.
f. $\begin{cases} k_0 = 5 \\ k_{n+1} = 2n + k_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.
2. Pour chacune des suites précédentes, déterminer les trois premiers termes puis le cinquième terme.

8 Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous par une formule explicite.
1. Pour tout entier naturel n, $u_n = -3n^2 - n + 2$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{2n+3}{n}$.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $w_n = \sqrt{n-2}$.

9 ALGO
Les algorithmes ci-dessous permettent de calculer le terme de rang n de trois suites.

```
u ← -4
Pour k allant de 1 à n faire
    u ← u + 5
```

```
v ← 300
Pour k allant de 1 à n faire
    v ← 2 × v
```

```
w ← 0
Pour k allant de 1 à n faire
    w ← k + 3 × w
```

• Indiquer le premier terme et la relation de récurrence définissant chacune de ces suites.

10 ALGO
On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
1. Cette suite est-elle définie par une formule explicite ou par une relation de récurrence ?
2. Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il calcule le terme de rang n de la suite (u_n).

```
u ← ...
Pour k allant de ... à ... faire
    u ← ...
```

11 ALGO
1. Calculer les quatre premiers termes des suites définies ci-dessous par une relation de récurrence.
a. $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
b. $v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n(3 - v_n)$.
c. $w_0 = 0{,}5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = {w_n}^2 + w_n - 1$.
2. Pour chacune des suites précédentes, écrire un algorithme qui calcule le terme de rang n.

12 CALCULATRICE
On considère la suite (a_n) définie par :
$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{10a_n}{a_n + 3} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.
• Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de a_5 à 10^{-3} près.

13 TABLEUR

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3 - 7n \text{ et } \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = -2v_n + 3. \end{cases}$$

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	3	6
3	1		

• Indiquer les formules à saisir dans les cellules B3 et C3 afin de compléter les colonnes B et C par recopie vers le bas.

14 (u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par la formule explicite $u_n = (n+2)^2$.

• Prouver que $u_0 = 4$ puis que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Suites arithmétiques

15 **Calculer, représenter**

1. Pour les suites arithmétiques suivantes dont on donne le premier terme et la raison, exprimer le terme général u_n en fonction de n puis calculer u_8.

a. $u_0 = 5$ et $r = -1$. **b.** $u_0 = -2$ et $r = \frac{1}{2}$.

c. $u_0 = 3$ et $r = -\frac{5}{4}$. **d.** $u_1 = 1$ et $r = 2$.

2. Dans un repère $(O\,; I, J)$, représenter les neuf premiers termes de chaque suite.

16 Reconnaître parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous celles qui sont arithmétiques et préciser alors leur premier terme et leur raison.

a. $u_n = -2 + 3n$ **b.** $u_n = 2n^2 + 3$

c. $u_n = \frac{n+5}{2}$ **d.** $u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$

e. $u_n = 2n - 4$ **f.** $u_n = n\sqrt{2}$

17 Reconnaître parmi les suites définies ci-dessous celles qui sont arithmétiques et préciser alors leur premier terme, leur raison et leur formule explicite.

a. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1{,}5 + u_n \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} u_1 = -6 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$

18 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,365$.

1. Déterminer la relation de récurrence puis la formule explicite de (u_n).

2. CALCULATRICE Utiliser la calculatrice pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que u_n est négatif.

19 Une suite arithmétique commençant au rang 0 telle que $u_8 = 15$ et $u_{12} = 25$.

• Déterminer sa raison et son premier terme.

20 PRISE D'INITIATIVE

Chercher

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de faire chaque jour cinq minutes de sport de plus que le jour précédent.

• Au bout de combien de jours dépassera-t-elle les deux heures quotidiennes de sport ?

21 ALGO

On considère la suite arithmétique (u_n) dont chaque terme s'obtient grâce à l'algorithme suivant.

```
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
    return u
```

1. Préciser le premier terme u_0 et la raison.

2. En déduire la formule explicite de u_n.

3. a. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.

b. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde à la question **3. a.**

Suites géométriques

22 **1.** Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le premier terme et la raison, exprimer le terme général u_n en fonction de n puis calculer u_5.

a. $u_0 = 3$ et $q = 2$. **b.** $u_0 = 10$ et $q = \frac{1}{2}$.

c. $u_0 = -2$ et $q = -3$. **d.** $u_1 = 2$ et $q = 3$.

2. CALCULATRICE À la calculatrice, représenter graphiquement les 10 premiers termes de chaque suite.

23 Reconnaître parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous celles qui sont géométriques et préciser alors leur premier terme et leur raison.

a. $u_n = 4 + n \times 4$ **b.** $u_n = 3 \times (-2)^n$

c. $u_n = \frac{2^n}{3}$ **d.** $u_n = (\sqrt{2})^n$

e. $u_n = 3^{n+2}$ **f.** $u_n = 2 \times n^3$

24 Reconnaître parmi les suites définies ci-dessous celles qui sont géométriques et préciser alors leur premier terme, leur raison et leur formule explicite.

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{5} \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n} \end{cases}$

VA PIANO

Exercices

25 **1.** On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison 0,2. Déterminer u_7.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et tout entier naturel n, $v_{n+1} = -4v_n$.
Déterminer v_5.

26 CALCULATRICE TABLEUR
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,2.
• Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n > u_n$ (on peut utiliser la calculatrice ou un tableur).

27 **Développement de bactéries** ALGO

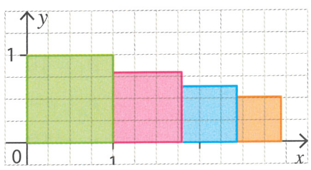
Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$. Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25 % chaque seconde.
1. Écrire un algorithme qui donne le nombre de bactéries présentes dans la solution au bout de n secondes.
2. Au bout de combien de secondes le nombre de bactéries va-t-il dépasser 20 000 ?

28 ALGO
On considère la suite géométrique (u_n) dont chaque terme s'obtient grâce à la fonction Python suivante.

```
def suite(n):
    u=150
    for k in range(1,n+1):
        u=2/3*u
    return u
```

1. Préciser le premier terme u_0 et la raison.
2. En déduire la formule explicite de u_n.
3. a. À la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.
b. Modifier la fonction précédente pour qu'elle réponde à la question **3. a.**

29 Dans le graphique suivant, le côté du carré le plus grand vaut 1. Á chaque étape, le côté du carré suivant est multiplié par 0,8.



• Quelle est l'aire du carré orange ?

Sommes

30 **Calculer, modéliser**
Calculer les sommes suivantes.
a. $4 + 7 + 10 + \ldots + 64$ **b.** $50 + 52 + 54 + \ldots + 1\,002$

31 **Calculer, modéliser**
1. Calculer les sommes suivantes.
a. $1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,000$
b. $501 + 502 + 503 + \ldots + 1\,000$
2. ALGO Retrouver les résultats de la question **1** en programmant l'algorithme suivant après l'avoir complété.

```
S ← 0
Pour k allant de … à … faire
    S ← …
Fin Pour
```

32 **Calculer, modéliser**
Calculer les sommes suivantes.
a. $1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + \ldots + 0{,}5^{12}$
b. $1 + 1{,}5 + 1{,}5^2 + \ldots + 1{,}5^8$

33 **1.** Calculer $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{10}$.
2. ALGO Retrouver le résultat de la question **1** en programmant l'algorithme suivant après l'avoir complété.

```
S ← 0
Pour k allant de … à … faire
    S ← …
Fin Pour
```

34 Une entreprise décide de soutenir une association caritative par des dons mensuels.
Le premier mois, l'entreprise fait un don de 1 €, et chaque mois, elle fait un don de 1 € supplémentaire.
• Quelle somme totale l'association aura-t-elle reçue de l'entreprise au bout de 10 ans ?

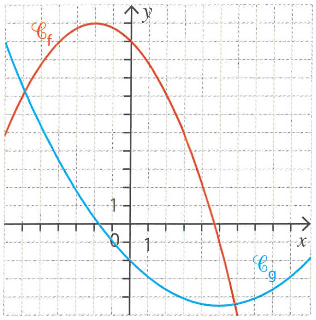
35 Une entreprise décide de soutenir une association caritative par des dons mensuels.
Le premier mois, l'entreprise fait un don de 1 centime d'euro, et chaque mois, elle double son don.
• Quelle somme totale l'association aura-t-elle reçue de l'entreprise au bout de 1 an ? au bout de 2 ans ?

36 Au mois de janvier, un constructeur automobile a construit 155 voitures. Sa production augmente de 6 unités par mois tout au long de l'année.
• Calculer le nombre total de voitures fabriquées par ce constructeur sur une année.

37 Une maison est louée depuis exactement 10 ans. La 1re année, le loyer mensuel s'élevait à 900 €. Puis, chaque année suivante, ce montant a augmenté de 1 %.
• Calculer la somme totale (au centime d'euro près) représentant l'ensemble des loyers au cours de ces 10 années.

Sens de variation

38 On a représenté graphiquement ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g.



• Conjecturer graphiquement le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ pour tout entier naturel n.

39 Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n(1 - v_n), \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

40 Déterminer le sens de variation des suites définies pour tout entier naturel n par les formules explicites suivantes.

1. $u_n = 2 - 4n$
2. $v_n = 2n^2 + 3$
3. $w_n = n^2 + 2n$
4. $t_n = 2^n + 3^n$

41 Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 8n + 2$ pour tout entier naturel n.

42 Pour les suites arithmétiques suivantes dont on donne le 1er terme et la raison, déterminer le sens de variation.

1. $u_0 = -2$ et $r = 0{,}6$.
2. $v_0 = 1$ et $r = \dfrac{2}{3}$.
3. $w_0 = 5$ et $r = 1 - \sqrt{2}$.
4. $t_0 = -10$ et $r = 10^{-2}$.

43 Pour les suites géométriques suivantes dont on donne le 1er terme et la raison, déterminer le sens de variation.

1. $u_0 = 3$ et $q = 2$.
2. $v_0 = -1$ et $q = \dfrac{4}{5}$.
3. $w_0 = \dfrac{-2}{3}$ et $q = \dfrac{8}{3}$.
4. $t_0 = 0{,}5$ et $q = 10^{-1}$.

44 **Démonstration**

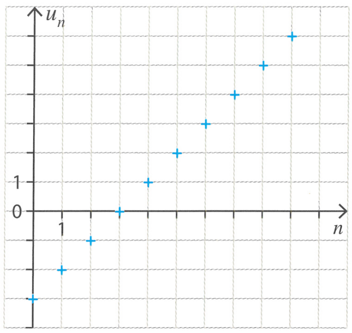
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de q.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) en fonction de q.

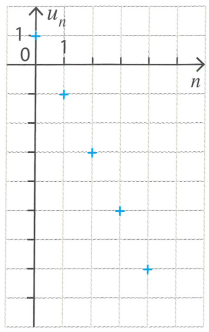
Notion de limite

45 Attribuer à chaque suite dont on donne l'expression du terme général la représentation graphique qui lui correspond, puis conjecturer son comportement quand n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = n - 3$
2. $v_n = -2n + 1$

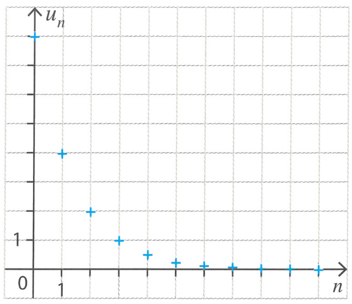


Graphique n°1



Graphique n°2

46 Le graphique ci-dessous est la représentation graphique d'une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n.



1. La suite (u_n) semble-t-elle admettre une limite ?
2. La suite (u_n) pourrait-elle être arithmétique ou géométrique ?
3. Conjecturer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n, et une expression de u_n en fonction de n.

47 CALCULATRICE TABLEUR

On s'intéresse aux suites (u_n) du type :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}, \text{pour tout entier naturel } n.$$

Recopier le tableau ci-dessous, puis compléter la 2e ligne à l'aide de conjectures obtenues après avoir fait afficher la liste des 10 premiers termes de la suite correspondante sur la calculatrice ou à l'aide d'un tableur.

u_0	-1	0	0,25	0,5	1	2
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$						

48 **Raisonner, communiquer**

Dire, dans chacun des cas suivants, en justifiant, si la suite proposée est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre.

1. La suite (a_n) est définie comme la suite des décimales du nombre $\frac{14}{99}$.

2. La suite (b_n) est définie comme la suite des nombres entiers naturels multiples de 3.

3. La suite (c_n) est telle que :
$\begin{cases} c_0 = 2 \\ c_{n+1} = 5\,c_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

4. La suite (d_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $d_n = -4^n$.

5. La suite (e_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $e_n = \frac{n}{3} + 1$.

6. La suite (f_n) est telle que :
$\begin{cases} f_0 = 2 \\ f_{n+1} = 1 - f_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

49 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}.$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$.
Montrer que la suite (w_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison ainsi que son sens de variation.

2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$.
Montrer que la suite (t_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison ainsi que son sens de variation.

50 **Raisonner**

1. CALCULATRICE À la calculatrice, calculer les six premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = 2n^6 - 30n^5 + 170n^4 - 450n^3 + 548n^2 - 240n$.
Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Calculer u_6. Que dire de la conjecture précédente ?

51 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2. On pose $v_n = u_n - 2$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. Vers quelle valeur semble tendre u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

52 **Raisonner**

On considère les suites ci-dessous.
$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = 5t_{n-1} + 2 \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 2. \end{cases}$

et $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = n + w_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

Pour chacune d'elles :

1. donner le rang et la valeur du premier terme ;

2. calculer les cinq premiers termes ;

3. indiquer si elle est arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre.

53 **Factorielle** ALGO PYTHON

1. Copier le script de la fonction fact ci-dessous dans l'éditeur Python puis compléter le tableau suivant.

```
def fact(n):
    u=1
    for k in range(1,n+1):
        u=u*k
    return u
```

n	0	1	2	3	4	5
fact(n)						

2. Le nombre fact(n) est appelé la factorielle de n, noté $n!$, et se lit « factorielle n » ou « n factorielle ».
Pour tout entier naturel n non nul, écrire le nombre $n!$ sous la forme d'un produit.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n!$
Proposer une définition de cette suite à l'aide d'une relation de récurrence.

54 **Actualisation d'un capital**
Chercher

On souhaite obtenir un capital de 100 000 € dans 15 ans.

• De quel capital doit-on disposer aujourd'hui sachant qu'on pense le placer à intérêts composés au taux annuel de 3 % ?

55 ALGO PYTHON

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2\,200$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 100$.

1. a. Programmer une fonction terme_u qui renvoie le terme de rang n de la suite (u_n).

b. Afficher la liste des 20 premiers termes de la suite (u_n).

2. On pose $v_n = u_n - 200$. Programmer une fonction terme_v qui renvoie le terme de rang n de la suite (v_n) puis affiche la liste des 20 premiers termes de la suite (v_n).

3. Conjecturer alors la nature de la suite (v_n).

4. Démontrer la conjecture précédente.

5. Déterminer u_n en fonction de n.

56 En informatique, on appelle pourcentage de compression, le pourcentage de réduction de la taille en Ko (kilo octets) d'un fichier après compression.

1. Un fichier a une taille initiale de 800 Ko. Après compression, il mesure 664 Ko. Montrer que le pourcentage de compression est de 17 %.

2. On note t_n la taille en Ko du fichier après n compressions successives au pourcentage de compression de 17 %. On a $t_0 = 800$.

a. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

b. Exprimer t_n en fonction de n.

3. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice ou un tableur, déterminer le nombre minimum de compressions successives à effectuer pour que le fichier ait une taille finale inférieure à 50 Ko.

57 **Forage d'un puits**

Modéliser

Un artisan propose de réaliser le forage d'un puits selon le tarif suivant : le 1er mètre foré coûte 100 euros, le 2e coûte 110 euros, le 3e coûte120 euros, … chaque mètre supplémentaire coûtant 10 euros de plus que le précédent.

1. Quel est le coût du 15e mètre foré ?

2. Un particulier veut faire réaliser un forage de 15 mètres dans son jardin. Combien va-t-il payer ?

58 Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite :

1. arithmétique de 1er terme 8 et de raison –3.

2. géométrique de 1er terme 64 et de raison 0,5.

3. arithmétique de 1er terme –2 et de raison $\frac{1}{5}$.

4. géométrique de 1er terme –2 et de raison $\frac{1}{5}$.

59 $S = 8 + \dots + 212$ est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n).

On sait que $S = 5\,720$.

1. Calculer le nombre de termes de cette somme.

2. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

60 **Accroissement naturel**

Le taux d'accroissement naturel (augmentation ou diminution annuelle de la population en pourcentage) de la population française est de 0,55 % par an depuis 1999 selon l'Insee.

On estime également que chaque année, le solde migratoire (différence entre le nombre de personnes qui sont entrées sur le territoire et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) est d'environ 75 000.

En 2018, le nombre d'habitants en France était de 67,2 millions.

On fait l'hypothèse que l'évolution observée perdure et on note p_n le nombre d'habitants estimé (en millier) en France, l'année 2018 + n, avec n entier naturel.

1. Calculer p_1.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 1{,}0055p_n + 75.$$

3. TABLEUR Compléter la feuille de calcul suivante pour estimer le nombre d'habitants en France en 2060.

B3 | fx =B2*1,0055+75

	A	B	C	D
1	Année	Population		
2	2018	67200		
3	2019	67644,6		
4	2020			

4. On pose $u_n = p_n + 13\,636{,}363\,64$.

a. Démontrer que $u_{n+1} = 1{,}0055u_n$. Quelle est alors la nature de la suite (u_n) ?

b. Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire p_n en fonction de n.

5. Comment vérifier à la calculatrice l'estimation obtenue à la question **3** ?

61 VRAI OU FAUX

Raisonner

On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_n = 2n^2 - 8n + 6, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Indiquer, pour chaque proposition, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Il existe un entier naturel n, tel que $u_n = 0$.

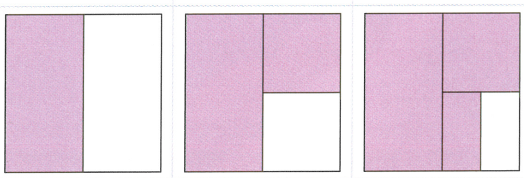
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

62 PRISE D'INITIATIVE

On dispose d'un carré de côté 1.

Étape 1	Étape 2	Étape 3
On colorie la moitié du carré.	On colorie la moitié de la partie non colorée.	Et ainsi de suite.

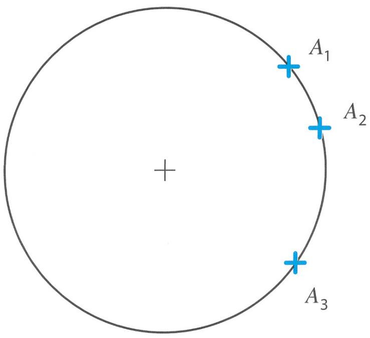


1. À partir de quelle étape, plus de 99 % du carré est colorié ?

2. Peut-on, par cette méthode, arriver à colorier tout le carré initial de côté 1 ? Justifier.

63 **Avec un dénombrement**

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sont n points d'un cercle.



On note u_n le nombre de segments qui ont pour extrémités deux de ces points.

1. Montrer que $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 3$.

2. Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

3. En déduire le calcul de u_7.

4. Déterminer une formule explicite pour u_n.

5. On appelle corde, tout segment dont les extrémités sont deux points du cercle. Avec 20 points sur le cercle, combien de cordes peut-on construire ?

6. Combien faut-il de points au minimum pour construire au moins 100 cordes ?

64 **1. a.** Montrer que la suite (u_n), définie par $u_n = 4n - 7$ pour tout entier naturel n, est une suite arithmétique dont on précisera le 1^er^ terme et la raison.

b. En déduire son sens de variation.

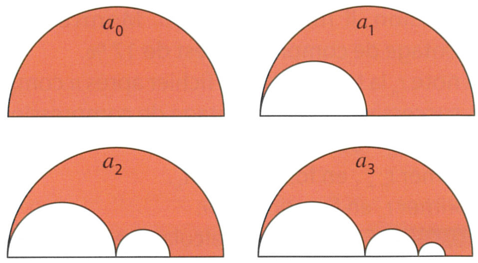
2. a. Montrer que la suite (v_n), définie par $v_n = \dfrac{4^{n+1}}{5^{n+1}}$ pour tout entier naturel n, est une suite géométrique dont on précisera le 1^er^ terme et la raison.

b. En déduire son sens de variation.

65 **1.** Déterminer la somme des multiples de 11 inférieurs à 1 000.

2. Déterminer la somme des multiples de 3 inférieurs à 100.

66 Le premier demi-disque a pour rayon 1 cm. On passe d'une figure à l'autre en « enlevant » un demi-disque dont le rayon est la moitié du précédent.



Les aires rouges a_n (en cm^2) où n est le nombre d'étapes, constituent une suite.

1. Rappeler la formule permettant de calculer l'aire d'un demi-disque de rayon R.

2. Calculer a_0, a_1 et a_2.

3. ALGO PYTHON Compléter la fonction `terme_a` ci-dessous de sorte qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (a_n).

```
from math import*
def terme_a(n):
    rayon=1
    aire_grise=pi/2
    for k in range(n):
        rayon=rayon/2
        aire_grise=aire_grise-...
    return...
```

4. Programmer cette fonction puis conjecturer l'évolution de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra se référer au TP3 pour obtenir une représentation graphique de la suite (a_n).

67 ALGO

On considère une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$. Écrire un algorithme qui détermine à partir de quelle valeur de n la somme des n premiers termes de la suite est supérieure à 10 000 :

a. dans le cas où (u_n) est une suite arithmétique de raison 0,1 ;

b. dans le cas où (u_n) est une suite géométrique de raison 1,01 ;

c. dans le cas où, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

68 PRISE D'INITIATIVE ALGO

Une boîte contient 200 allumettes. On les regroupe par paquets de la manière suivante.

| ||| ||||| |||||||

Le premier paquet contient une allumette, le deuxième paquet contient 3 allumettes, le troisième 5 allumettes et ainsi de suite. À la fin, il ne reste plus que 4 allumettes dans la boîte.

- Combien y a-t-il de paquets d'allumettes ?

69 **Consommation pétrolière**

En 2017, la consommation annuelle mondiale de pétrole était de 36 milliards de barils. Malgré les engagements internationaux pour limiter cette consommation, elle a continué d'augmenter, en moyenne de 1,8 % par an. On note u_n la consommation mondiale de pétrole pour l'année 2017 + n, (où n est un entier naturel), exprimée en milliards de barils sous l'hypothèse qu'une augmentation annuelle de 1,8 % se poursuit. Ainsi $u_0 = 36$.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3. Estimer la consommation mondiale de pétrole pour 2040.

4. TABLEUR On souhaite déterminer à l'aide d'un tableur la consommation mondiale de pétrole totale, de 2017 à 2050. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	0	36	36
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

a. Quelle formule, saisie en B3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (u_n) ?

b. Quelle formule, saisie en C3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (S_n) ?

5. En 2017, on a évalué à 1 697 milliards de barils la quantité totale de pétrole restante (exploité ou non). Que penser de l'avenir énergétique de la planète ?

70 Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$ pour tout entier naturel n.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite.

2. On admet que tous les termes de cette suite sont positifs. Justifier alors la conjecture obtenue à la question précédente.

71 **Les hypothèses de Malthus**

Modéliser

Thomas Malthus, économiste anglais du début du XIX^e siècle, a travaillé sur l'évolution de la population en Angleterre.

En 1800, la population anglaise était de 8,3 millions d'habitants. Bien que très pauvre en majorité, toute la population arrivait tant bien que mal à se nourrir. Thomas Malthus prévoit que cette situation ne pourra pas durer au cours du temps. Il émet les hypothèses suivantes :

- la population en Angleterre augmente chaque année de 2 % ;
- la production agricole anglaise aidée par des avancées techniques, permet de nourrir 400 000 habitants de plus par an.

1. Traduire les hypothèses de Thomas Malthus en choisissant deux suites dont on donnera les éléments caractéristiques (nature, premier terme, raison).

2. En utilisant les hypothèses de Malthus, quelle est la population de l'Angleterre en 1801 et le nombre de personnes pouvant être nourries cette année-là ?

3. CALCULATRICE TABLEUR À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, afficher les termes des deux suites. Déterminer la première année pour laquelle la population ne peut plus être suffisamment nourrie suivant l'hypothèse formulée par Malthus.

72 **Raisonner**

On considère la suite définie par son premier terme et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n - 3.$$

1. Cas où $u_0 = 3$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Peut-on dire : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ » ? Justifier la réponse.

c. CALCULATRICE Afficher les valeurs des vingt premiers termes sur une calculatrice.

d. Quel résultat affiche la calculatrice pour u_{10} ? Expliquer.

2. Cas où $u_0 = -2$.

Reprendre les questions précédentes.

73 On considère l'algorithme ci-dessous.

$n \leftarrow 0$
Tant que $(n+1)^2 - 10(n+1) < n^2 - 10n$
  $n \leftarrow n + 1$

1. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

2. La suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n$, est-elle monotone ?

3. Montrer que la suite (u_n) de la question précédente est croissante à partir du rang 5.

74 **Calculer, raisonner**

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.

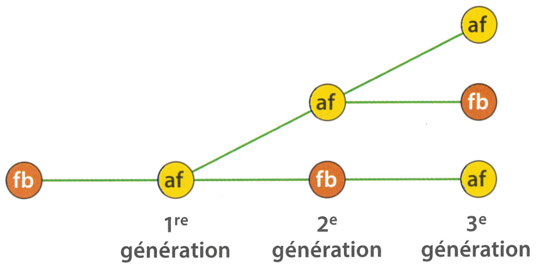
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
2. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

75 Chez les abeilles, le mâle s'appelle le faux-bourdon (fb), il provient d'un œuf non fécondé.

Un œuf fécondé donne naissance à une abeille femelle (af).

Ainsi, une af a deux parents (une af et un fb) alors qu'un fb n'a pas de père. On a représenté ci-dessous l'arbre généalogique d'un fb sur trois générations.



On note a_n le nombre d'ascendants de ce faux bourdon à la n-ième génération.

On a donc $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.

1. Donner les valeurs des termes a_4, a_5 et a_6.
On peut s'aider de l'arbre généalogique de l'énoncé, que l'on poursuivra.
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. En déduire le nombre d'ascendants de ce fb à la 15e génération.

76 **Algorithme de Babylone**

On s'intéresse à une suite de rectangles (R_n), on note L_n la longueur du rectangle R_n et l_n sa largeur. On pose $L_0 = 5$ et $l_0 = 1$. Tous les rectangles R_n ont la même aire, et la longueur de R_{n+1} est la moyenne des dimensions du rectangle R_n.

1. Justifier que, pour tout naturel n, $L_n \times l_n = 5$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2}$ et $l_{n+1} = \dfrac{10}{L_n + l_n}$.
3. Calculer les dimensions des rectangles R_1 et R_2.
4. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, afficher les 10 premiers termes des suites (L_n) et (l_n).
5. Faire une conjecture sur le comportement des rectangles R_n quand n tend vers $+\infty$.
6. On admet que les suites (L_n) et (l_n) ont la même limite c quand n tend vers $+\infty$ et que la suite $(L_n \times l_n)$ tend vers c^2 quand n tend vers $+\infty$.
Déterminer la valeur exacte de c.
7. En s'inspirant des questions précédentes, proposer un algorithme qui permet d'approcher le nombre $\sqrt{2019}$ par un nombre rationnel à 10^{-6} près.

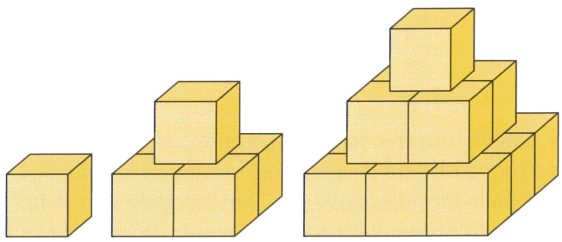
77 **Carbone 14**

Le carbone 14 est un isotope radioactif naturellement présent dans les organismes vivants. Lorsqu'un organisme vivant meurt, le carbone 14 se désintègre c'est-à-dire que la proportion de carbone 14 présente dans l'organisme diminue régulièrement. Cette diminution est de 1,23 % tous les 100 ans.

1. On appelle demi-vie du carbone 14 le nombre d'années n (exprimé en centaine d'années) qu'il faut attendre pour qu'au moins 50 % de l'isotope soit désintégré.
Montrer que n est le plus petit entier naturel tel que $\left(1 - \dfrac{1{,}23}{100}\right)^n \leqslant 0{,}50$.
2. CALCULATRICE TABLEUR En utilisant un tableur ou la calculatrice, déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Calculer le pourcentage (à 0,1 % près) de carbone 14 présent dans un organisme 2 000 ans après sa mort.
4. On a découvert un organisme dont les 60 % du carbone 14 se sont désintégrés. De quand date environ la mort de cet organisme ?

78 ALGO PYTHON

Avec des cubes identiques, on construit des pyramides comme indiqué ci-dessous.



1. Combien de cubes sont nécessaires pour construire une pyramide à 20 étages ? À 30 étages ?
On peut programmer une fonction Python qui, pour un entier N donné, renvoie le nombre de cubes nécessaires pour construire une pyramide à N étages.
2. On dispose de 5 000 cubes.
Quel est le nombre maximal d'étages que l'on peut construire ?
On peut programmer une fonction Python qui, pour un entier K donné, renvoie le nombre maximal d'étages que l'on peut construire avec K cubes ainsi que le nombre de cubes non utilisés.

79 **Approfondissement**

1. Pour l'achat d'une maison, on contracte à la banque un emprunt de 200 000 € à un taux annuel de 2,5 %. Le remboursement s'effectue en 24 annuités constantes de 11 182,57 € qui servent d'une part à payer les intérêts de la période et d'autre part à rembourser le capital.

a. Observer le tableau d'amortissement ci-dessous. Le reproduire sur un tableur en saisissant les formules adaptées permettant de le remplir rapidement par recopie vers le bas.

	A	B	C	D	E	F
1	Période	Montant	Annuité	Intérêts	Capital	Restant dû
2	1	200 000,00	11 182,57	5 000,00	6 182,57	193 817,43
3	2	193 817,43	11 182,57	4 845,44	6 337,13	187 480,30
4	3	187 480,30	11 182,57	4 687,01	6 495,56	180 984,73
5	4	180 984,73	11 182,57	4 524,62	6 657,95	174 326,78
6	5	174 326,78	11 182,57	4 358,17	6 824,40	167 502,38
7	6	167 502,38	11 182,57	4 187,56	6 995,01	160 507,37
8	7	160 507,37	11 182,57	4 012,68	7 169,89	153 337,48
9	8	153 337,48	11 182,57	3 833,44	7 349,13	145 988,35
10	9	145 988,35	11 182,57	3 649,71	7 532,86	138 455,49
11	10	138 455,49	11 182,57	3 461,39	7 721,18	130 734,31
12	11	130 734,31	11 182,57	3 268,36	7 914,21	122 820,10
13	12	122 820,10	11 182,57	3 070,50	8 112,07	114 708,03
14	13	114 708,03	11 182,57	2 867,70	8 314,87	106 393,16
15	14	106 393,16	11 182,57	2 659,83	8 522,74	97 870,42
16	15	97 870,42	11 182,57	2 446,76	8 735,81	89 134,61
17	16	89 134,61	11 182,57	2 228,37	8 954,20	80 180,40
18	17	80 180,40	11 182,57	2 004,51	9 178,06	71 002,34
19	18	71 002,34	11 182,57	1 775,06	9 407,51	61 594,83
20	19	61 594,83	11 182,57	1 539,87	9 642,70	51 952,13
21	20	51 952,13	11 182,57	1 298,80	9 883,77	42 068,37
22	21	42 068,37	11 182,57	1 051,71	10 130,86	31 937,51
23	22	31 937,51	11 182,57	798,44	10 384,13	21 553,37
24	23	21 553,37	11 182,57	538,83	10 643,74	10 909,64
25	24	10 909,64	11 183,57	272,74	10 910,83	-1,19

b. Pour tout entier naturel n, on note C_n le restant dû au terme de la n-ième période.
Justifier que la suite (C_n) est définie par

$$\begin{cases} C_0 = 200\ 000 \\ C_{n+1} = 1{,}025C_n - 11\ 182{,}57 \end{cases}$$

2. Observer les fonctions ci-dessous programmées en Python.

```python
def C(n,A):
    c=200000
    for i in range(n):
        c=1.025*c-A
    return c

def annuite(n):
    A=0
    while C(n,A)>0:
        A=A+0.01
    return A
```

a. Que renvoie la fonction C ?

b. Qu'obtient-on lorsqu'on saisit annuite(24) dans la console ?

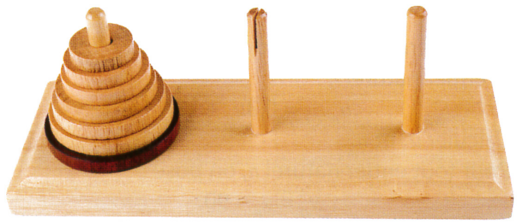
3. Déterminer au centime près l'annuité constante A correspondant au remboursement sur 15 ans d'un emprunt de 100 000 € au taux annuel de 3 %.

80 **Approfondissement**

La tour de Hanoï

Le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891) a inventé un jeu de réflexion mathématique appelé la tour de Hanoï. Ce jeu utilise trois tiges T_1, T_2 et T_3 ainsi que des disques percés de diamètres distincts deux à deux.

Au début du jeu, les disques sont tous empilés sur T_1 dans l'ordre décroissant de leur diamètre, le plus grand disque reposant à la base.



T_1 T_2 T_3

Le but du jeu est de déplacer la « tour » de disques de T_1 à T_3, en respectant les deux règles suivantes :
– on ne déplace qu'un seul disque à la fois, d'une tige à une autre ;
– un disque ne doit jamais être placé au-dessus d'un disque de diamètre inférieur au sien.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note L_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour transporter une tour de n disques d'une tige à une autre.

1. Déterminer L_1 et L_2.

2. En remarquant que pour pouvoir déplacer le plus grand disque de T_1 à T_3, il faut d'abord avoir déplacé la tour des autres disques de T_1 à T_2, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $L_{n+1} = L_n + 1 + L_n$.

3. Déterminer le nombre de disques nécessaires pour que ce jeu dure au moins une heure à raison d'un déplacement de disque par seconde.

4. a. Peut-on transporter une tour de trois disques de T_1 à T_3 en moins de sept déplacements ? Expliquer.

b. Compléter la liste de sept déplacements ci-dessous permettant de transporter une tour de trois disques de T_1 à T_3.

- 1er déplacement : petit disque de T_1 en T_3.
- 2e déplacement : moyen disque de T_1 en T_2.
- 3e déplacement : petit disque de T_3 en T_2.
- 4e déplacement : grand disque de … en …
- 5e déplacement : …
- 6e déplacement : …
- 7e déplacement : …

81 On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

- Quelle semble être la limite de la suite (S_n) ?

VERS

L'épreuve écrite

82 ALGO Panier bio

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = u_n - 90.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8. On précisera la valeur de v_0.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n$.

3. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
1. u ← 65
2. n ← 0
3. Tant que ...
4.     n ← n + 1
5.     u ← 0,8 × u + 18
```

a. Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.

b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.

En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement. Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

c. Selon ce modèle, vers quelle valeur semble tendre la recette mensuelle de la société Biocagette ?

D'après Bac Pondichéry 2018

83 TABLEUR CALCULATRICE ALGO Comparaison d'estimations

Un journal hebdomadaire est sur le point d'être créé. Une étude de marché aboutit à deux estimations différentes concernant le nombre de journaux vendus :

- 1^re estimation : 1 200 journaux vendus lors du lancement, puis une progression des ventes de 2 % chaque semaine suivante.
- 2^de estimation : 1 200 journaux vendus lors du lancement, puis une progression régulière de 35 journaux supplémentaires vendus chaque semaine suivante.

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n (resp. v_n) représente le nombre de journaux vendus la n-ième semaine selon la 1^re estimation (resp. selon la 2^de estimation). Ainsi $u_1 = v_1 = 1\,200$.

1. Calculer u_2 et v_2.

2. On considère la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	1	1200	1200
3	2		
4	3		
5	4		

a. Quelle formule, saisie en B3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (u_n) ?

b. Quelle formule, saisie en C3 et recopiée vers le bas, permet d'obtenir les premiers termes de la suite (v_n) ?

3. a. Donner la nature de la suite (u_n) puis celle de la suite (v_n).

b. Écrire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le premier entier naturel $n \geqslant 1$ tel que :

$$1\,200 \times 1{,}02^{n-1} > 1\,200 + 35(n-1).$$

Interpréter ce résultat.

5. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \ldots + 1{,}02^{n-1} = 50 \times (1{,}02^n - 1).$$

b. En déduire le nombre total de journaux vendus en 52 semaines (environ un an) selon la 1^re estimation.

6. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = n\frac{v_1 + v_n}{2}.$$

Laquelle des deux estimations prévoit le plus grand nombre total de journaux vendus au cours des 52 premières semaines ?

7. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
S ← 1 200
T ← 1 200
n ← 1
Tant que S ⩽ T
    S ← S + 1 200 × 1,02^n
    T ← T + 1 200 + n × 35
    n ← n + 1
```

La valeur de la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme est 55. Interpréter ce résultat.

84 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel :
$$n \geqslant 1, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$
1. Calculer u_2 et u_3.
2. Recopier puis compléter la fonction informatique suivante programmée en langage Python afin qu'elle renvoie le terme u_n pour $n \geqslant 1$.

```
def terme_u(n):
    u=...
    for i in range(...):
        u=...
    return u
```

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :
$$v_n = u_n + 1.$$
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
b. Donner une expression de v_n en fonction de n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$$u_n = 2^n - 1.$$
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

85 On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017.
Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que chaque année :
• 3 % des ascenseurs entretenus par A seront entretenus par B l'année suivante ;
• 5 % des ascenseurs entretenus par B seront entretenus par A l'année suivante ;
• Les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.
On note a_n, la proportion d'ascenseurs entretenus par A et b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par B pendant l'année $2017 + n$.
On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.
1. a. Calculer a_1. Interpréter le résultat.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$.
c. Quelle relation existe-t-il entre a_n et b_n ?
En déduire que, pour tout enter naturel n, $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.
2. a. Le directeur de la société A constate que, selon cette estimation, la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmenterait au cours des années et se stabiliserait à 62,5 %.
Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes ci-après permet de calculer la première année pour laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1
$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$
  $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
  $N \leftarrow N + 1$

Algorithme 2
$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A > 0{,}5$
  $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
  $N \leftarrow N + 1$

Algorithme 3
$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$
  $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
$N \leftarrow N + 1$

b. Déterminer la valeur de la variable N en fin d'exécution de cet algorithme.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$.
a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.
c. Déterminer le sens de variation de la suite (a_n).
d. Vers quelle valeur semble tendre la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après Bac Amérique du Sud 2018

86 On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}\, u_n \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1. \end{cases}$$
1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$.
En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Montrer que $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}(1 - 2n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. On considère l'algorithme ci-dessous.

$n \leftarrow 1$
Tant que $n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n >$ epsilon
  $n \leftarrow n + 1$

a. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme, lorsque epsilon $= 10^{-3}$?
b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme lorsque epsilon $= 10^{-6}$?
c. Vers quelle valeur semble tendre la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

87 Gestion d'une tirelire ALGO CALCULATRICE

Thomas possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2019. À partir de cette date, chaque mois il dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires. Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent (en €) contenue dans la tirelire de Thomas à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

Questions Va piano

1. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Thomas à la fin du 1er mois est de 35 €.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0{,}75u_n + 20.$$

3. a. Faire afficher sur la calculatrice les 20 premiers termes de la suite (u_n).

b. Selon ce modèle, vers quelle valeur semble tendre la somme d'argent contenue dans la tirelire de Thomas ?

Questions Moderato

On considère l'algorithme suivant.

$U \leftarrow 20$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U < 70$ faire
    $U \leftarrow 0{,}75 \times U + 20$
    $N \leftarrow N + 1$

1. Quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

2. Interpréter le résultat précédent, en rapport avec la somme d'argent contenue dans la tirelire de Thomas.

Questions Allegro

1. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 80$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,75.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n.$$

3. En déduire la somme d'argent, au centime près, dans la tirelire de Thomas au 1er juin 2020.

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

88 Une mise en équation

On s'intéresse à la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2019$.

Questions Va piano

On considère la suite (u_n) des entiers impairs de premier terme $u_1 = 1$.

1. De quel type de suite s'agit-il ?

2. Donner le terme général de cette suite.

3. a. Déterminer l'entier n tel que :

$$u_n = 2019.$$

b. Écrire la somme S à l'aide de termes de la suite (u_n).

Questions Moderato

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule la somme S de l'énoncé.

$S \leftarrow 0$
Pour i allant de 1 à ...
    $S \leftarrow$ ...

2. Programmer cet algorithme et donner la valeur de S.

Questions Allegro

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note T_n la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

1. Montrer que :

$$S = T_{2019} - 2T_{1009}.$$

2. En déduire la valeur de S.

3. En vous inspirant des questions précédentes, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

No problem!

1 His first name is Leonardo

A recursive sequence (a_n) is defined by the following rule:
"Each term is the sum of the previous two terms."

1. Write a formula that describes the recursion rule.

2. Knowing that $a_1 = 1$ and $a_2 = 1$, compute the first six terms of this sequence.

3. This is a really famous sequence from a famous Italian Mathematician, have you ever heard about it?

4. The generic term of a sequence is given by:

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Show that this sequence follows the recursive rule given in question **1**.

2 The New York Marathon

David is getting ready for the New York Marathon (42.195 km) which is to be held on the first Sunday in November.
He runs 10 km every day in August. From September 1^{st} onwards, he runs daily 0.8 km more than the day before.
Let us call d_n the distance travelled each day, with $n = 0$ on August 31^{st}, $n = 1$ on September 1^{st}, $n = 2$ on September 2^{nd} and so on.

1. Compute the first five terms of sequence (d_n).

2. Express d_{n+1} in terms of d_n.

3. Calculate the distance run on September 30^{th}.

4. What day does David run 42 km?

3 Number of babies born

Estimates are produced for the number of babies born worldwide each year.
The estimates for 2004 and for 2008 were respectively 130,350 and 131,804, given in thousands of births to the nearest thousand.
Assume that successive yearly are in geometric progression.

1. Estimate the annual percentage increase of the number of births.

2. Find the estimates for 2011 (to the nearest thousand) and compare them to the real number that was 131,000 thousand.

3. In 2014 the number of world births reached the pick of 139,000 thousand. Comment this number.

4. Work out the estimated total number of births between 2004 and 2012 inclusive (to the nearest thousand).

Individual work Dominoes

Make a chain of dominoes placing them end to end, then create your own game.

$u_{n+1} = 2u_n + 1$	My 5th term is 48. My 9th term is 768.	My common ratio is 2.	Multiply by two the n-th term plus one to obtain the $(n + 1)$-th term.	My third term is – 7. My 7th term is – 19.	Sum of the first one hundred integers.
My second term is – 1. My fourth term is – 7.	Each term of the sequence is equal to the double of the previous one plus one.	$u_{n+1} = 2(u_n + 1)$	An arithmetic sequence with a common difference equal to – 3 and a negative first term.	$\dfrac{100 \times 101}{2}$	An arithmetic sequence with a common difference equal to –3 and a positive first term.