Ressources du chapitre disponibles ici :
www.lycee.hachette-education.com/barbazo/1re ou

CHAPITRE

1 Suites numériques

Zoomer et voir toujours le même paysage

Helge Von Koch

Helge Von Koch (1870-1924) est un mathématicien suédois qui a donné son nom en 1904 à l'une des premières fractales, le flocon de Von Koch.

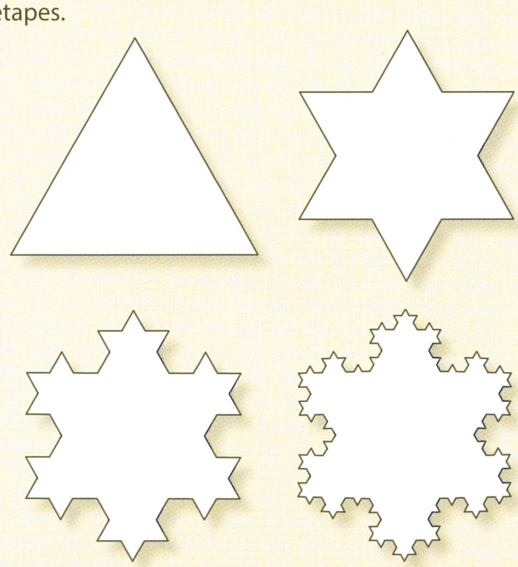
Il a décrit ce flocon dans un article intitulé *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*.

Le flocon de Von Koch est un exemple de courbes appelées fractales (courbes qui possèdent des détails de forme similaire quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe).

On présente ci-dessous les premières étapes de la construction du flocon de Von Koch à partir d'un triangle équilatéral de côté 1.

La construction de ce flocon se poursuit de la même façon, étape après étape.

Pour le construire complètement, il faudrait une infinité d'étapes.



Est-il possible de donner le périmètre de la figure obtenue à chaque étape (et pas seulement pour les quatre premières !) ? Et que penser de l'aire du flocon ?

Réviser ses GAMMES

DIAPORAMA DE GAMMES SUPPLÉMENTAIRES

1 Suites logiques

Recopier et compléter logiquement les suites de nombres suivantes par trois termes.

a. $-8 ; -5 ; -2 ; 1\ldots$

b. $1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16\ldots$

c. $1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13\ldots$

d. $1 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{27} \ldots$

e. $-2 ; 6 ; -18 ; 54\ldots$

f. $\frac{2}{5} ; \frac{9}{35} ; \frac{4}{35} ; -\frac{1}{35}\ldots$

2 Puissances

Recopier et compléter les égalités suivantes.

a. $3^5 \times 3^{-7} = 3^{\cdots}$

b. $2^{-4} \times 2^{\cdots} = 2^9$

c. $\frac{10^3}{10^{-9}} = 10^{\cdots}$

d. $\frac{10^4}{10^{\cdots}} = 10^{-5}$

3 Une fonction f

Soit f une fonction définie pout tout entier naturel n par :

$$f(n) = 9n^2 - 6n - 5.$$

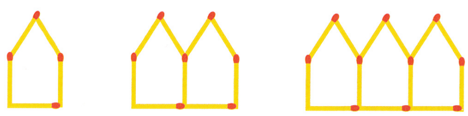
1. Calculer $f(3)$, $f(25)$ et $f(50)$.

2. Existe-t-il des entiers n tels que $f(n) = -5$? Si oui, le(s)quel(s) ?

3. Existe-t-il des entiers n tels que $f(n) = -6$? Si oui, le(s)quel(s) ?

4 Répétitions de motif

Voici une suite de maisons dessinées avec des allumettes.



1re étape — 2e étape — 3e étape

• Combien d'allumettes sont nécessaires pour la 6e étape?

5 Suite logique

On construit une suite de nombres en commençant par le nombre -4 et en appliquant le principe :
« Un terme est la somme du triple du terme précédent et de 5. »

• Quel est le 3e terme de cette suite de nombres ?

6 Pourcentages

Recopier et compléter les phrases suivantes.

1. Augmenter une quantité Q de 10 % revient à multiplier Q par **…**

2. Le prix d'un produit est passé de 100 à 125 €.
Le pourcentage d'augmentation est **…** %.

3. Le prix d'un produit est passé de 200 à 160 €.
Le pourcentage de diminution est **…** %.

4. Pour les soldes, le prix d'un produit à 60 € baisse de 15 %. À la fin des soldes, le prix du produit est à nouveau augmenté de 15 %.
Le prix du produit après les soldes est **…**

5. Un salaire de 1 800 € augmente chaque année de 3 %. Au bout de 3 ans, le salaire est de **…**

7 Tableau de valeurs

On donne ci-dessous un tableau de valeurs d'une fonction f définie pout tout entier naturel n.

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	2	5	10	17	26

1. Conjecturer une expression de $f(n)$.

2. En admettant la conjecture faite au **a.**, que vaut $f(20)$?

3. En admettant la conjecture faite au **a.**, existe-t-il une ou des valeurs de n telles que $f(n) = 2\,705$?

4. Même question pour $f(n) = 6\,899$.

8 Algorithme

On considère l'algorithme suivant.

$S \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à 100 faire
    $S \leftarrow S + k$

• Que calcule cet algorithme ?

Pour construire le cours

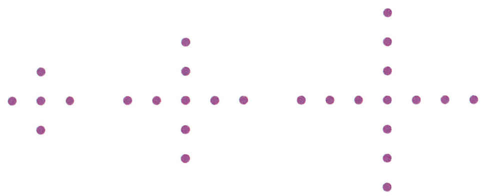
SITUATIONS EN VERSION MODIFIABLE

Situation A — Compléter une suite de dessins

Objectif
Définir une suite par une relation de récurrence et par une formule explicite.

On présente ci-dessous deux suites de dessins.

Suite 1



Suite 2

1. Recopier les dessins de chaque suite et dessiner les deux dessins suivants.
2. Indiquer, pour chaque dessin de chaque suite, le nombre de points nécessaires à sa construction.
3. Sans rien dessiner de plus, déterminer le nombre de points nécessaires pour former le 10^{e} dessin de chacune de ces deux suites.

Situation B — Modéliser une croissance démographique

Objectif
Introduire les suites arithmétiques.

Bordeaux Métropole, projet : « Objectif 2030 »
Un million d'habitants en 2030 pour Bordeaux et sa communauté urbaine ? C'est le projet que lance Bordeaux Métropole en partenariat avec l'Institut national de statistiques (Insee).
En 2007, année de référence pour ce projet, Bordeaux Métropole comptait 714 000 habitants.

Le Quatre pages Insee Aquitaine, septembre 2013.

Un scénario, établi sur la base d'une augmentation constante, prévoit une augmentation de la population de Bordeaux Métropole de 11 800 personnes par an.

1. Avec ce scénario, l'« Objectif 2030 » sera-t-il atteint ?
2. Proposer un scénario, établi sur la base d'une augmentation constante la plus petite possible qui permette d'atteindre l'« Objectif 2030 ».

Situation C — Étudier des placements financiers à intérêts composés TABLEUR

Objectif
Introduire les suites géométriques.

Les organismes bancaires peuvent proposer différents types de placements financiers (intérêts simples, intérêts composés…).

1 **a.** Un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 % (cela signifie que le capital augmente de 3 % chaque année).

De quelle somme disposera-t-on au bout d'un an ? Au bout de 2 ans ? Au bout de 5 ans ?

b. On note C_n le capital acquis au bout de n années, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

2 Un capital de 10 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 5,2 %. On veut déterminer au bout de combien d'années il atteindra 15 000 €.

On utilise pour cela la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	Période (en années)	Capital
2	0	10000
3	1	= ?

Proposer une formule à saisir en B3 qui permette, par recopie vers le bas, de compléter la colonne B.
Déterminer alors le nombre d'années nécessaires.

Situation D — Suivre l'évolution de la flore

Objectifs
Modéliser un problème et conjecturer une limite.

La pyrale est une redoutable chenille invasive qui s'attaque aux buis (petits arbres à feuilles pérennes, communs sur le territoire français).
Un massif forestier des Pyrénées en est victime depuis quelque temps. Les agents de l'ONF (Office national des Forêts) ont procédé à des relevés statistiques : chaque année, le nuisible fait disparaître 15 % des buis de ce massif.
Alors que l'on compte 75 000 pieds de buis, l'ONF préconise de replanter 3 000 plants chaque année pour compenser les dégâts de la pyrale en attendant un éventuel traitement contre cette chenille.

1 Si la préconisation de l'ONF n'est pas suivie, quelle conjecture peut-on émettre quant au nombre de buis dans ce massif à long terme ?

2 On considère désormais que la préconisation de l'ONF est suivie.

a. Calculer le nombre de buis dans ce massif un an après cette préconisation, puis deux ans après.

b. Si on note u_n le nombre de buis dans ce massif n années après cette préconisation, expliquer la formule de récurrence $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n + 3\,000$ pour tout entier naturel n.

c. À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on émettre quant au nombre de buis dans ce massif à long terme ?

Connaître le cours

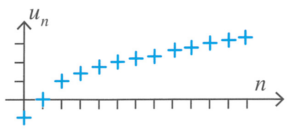
1. Modes de génération d'une suite

1. Définition d'une suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement pour $n \geqslant k$ avec k entier naturel) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le nombre réel $u(n)$, noté u_n (se lit « u indice n »), est appelé le terme de rang n ou le terme général de la suite. On note cette suite (u_n).

Une suite (u_n) peut être représentée graphiquement par le nuage de points de coordonnées $(n ; u_n)$.



Exemple

La liste 50 ; 25 ; 12,5 ; 6,25… définit les premiers termes de la suite (u_n) telle que $u_0 = 50$, $u_1 = 25$, $u_2 = 12{,}5$, $u_3 = 6{,}25$… On dit que 50 est le terme de rang 0 ; 25 est le terme de rang 1 ; 12,5 est le terme de rang 2, etc.

2. Suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

Définition

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n s'exprime en fonction de l'entier n.
Dans ce cas, on peut calculer chaque terme u_n directement à partir de son rang n.

Exemples

- Pour tout entier naturel n, on donne $u_n = 2n$.
$u_0 = 2 \times 0 = 0$; $u_1 = 2 \times 1 = 2$.
$u_2 = 2 \times 2 = 4$; … ; $u_{20} = 2 \times 20 = 40$.

- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on donne $v_n = \sqrt{n-1}$.
- $v_1 = \sqrt{1-1} = 0$ (le premier terme ici est v_1 et non v_0) ; $v_2 = \sqrt{2-1} = 1$; … ; $v_{17} = \sqrt{17-1} = 4$.

3. Suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition

Une suite est définie par une **relation de récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de :
- son premier terme ;
- une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

Dans ce cas, pour calculer chaque terme u_n, il faut avoir calculé tous les termes qui le précèdent.

Rang	0	1	2	3	4	5	…	$n-1$	n	$n+1$	…
Terme	$u_0 \rightarrow$	$u_1 \rightarrow$	$u_2 \rightarrow$	$u_3 \rightarrow$	$u_4 \rightarrow$	$u_5 \rightarrow$	… $\rightarrow$	$u_{n-1} \rightarrow$	$u_n \rightarrow$	u_{n+1}	…

Exemples

- On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et chaque terme est le triple de son précédent.
$u_0 = 5$; $u_1 = 3u_0 = 3 \times 5 = 15$;
$u_2 = 3u_1 = 3 \times 15 = 45$…

- On définit la suite (v_n) par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 6$.
$v_0 = 3$; $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$;
$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$…

Remarque

Il existe d'autres modes de génération d'une suite comme par exemple un algorithme ou encore un dénombrement lié à une suite de motifs géométriques.

Exercice résolu 1 Calculer des termes d'une suite

1 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 3n^2 - 2n + 1$.

a. Calculer le terme de rang 5, puis le 10e terme.

b. Déterminer l'expression en fonction de n des termes u_{n+1} et u_{2n}.

2 Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}5v_n + 4$. Calculer v_3.

3 Soit la suite (w_n) définie $w_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n(1 - w_n) + 2$. Calculer w_2.

Solution commentée

1 **a.** Le terme de rang 5 est u_5. On remplace n par 5 dans l'expression. $u_5 = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 66$;
Le premier terme étant de rang 0, le 10e terme est le terme de rang 9. $u_9 = 3 \times 9^2 - 2 \times 9 + 1 = 226$.

b. $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 = 3(n^2 + 2n + 1) - 2n - 2 + 1 = 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 1 = 3n^2 + 4n + 2$

$u_{2n} = 3 \times (2n)^2 - 2 \times (2n) + 1 = 3 \times 4n^2 - 4n + 1 = 12n^2 - 4n + 1$

2 Pour obtenir v_3, il faut calculer tous les termes qui le précèdent.

$v_1 = v_{0+1} = 0{,}5v_0 + 4 = 0{,}5 \times 1 + 4 = 4{,}5$

$v_2 = v_{1+1} = 0{,}5v_1 + 4 = 0{,}5 \times 4{,}5 + 4 = 6{,}25$

$v_3 = v_{2+1} = 0{,}5v_2 + 4 = 0{,}5 \times 6{,}25 + 4 = 7{,}125$

3 Pour obtenir w_2, il faut calculer tous les termes qui le précèdent.

$$w_1 = 2w_0(1 - w_0) + 2 = 2 \times \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) + 2 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 2 = \frac{-3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 = 2w_1(1 - w_1) + 2 = 2 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2 = 1 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

EXERCICE 3 p. 30

Exercice résolu 2 Définir une suite à partir d'un algorithme

On considère les trois fonctions informatiques suivantes programmées en langage Python.

```python
def terme_u(n):
    u=1/3
    for k in range(n):
        u=1/u-1
    return u
```

```python
def terme_v(n):
    return n**2-2*n+1/n
```

```python
def terme_w(n):
    w=5
    for k in range(1,n+1):
        w=w+3*(k-1)
    return w
```

1 Qu'obtient-on lorsqu'on appelle terme_u(3), terme_v(5) et terme_w(4) dans la console ?

2 Préciser les modes de génération des suites associées à chacune de ces trois fonctions.

Solution commentée

1

```
>>> terme_u(3)
-3.0
```

```
>>> terme_v(5)
15.2
```

```
>>> terme_w(4)
23
```

2 La première fonction permet de calculer les termes de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} - 1.$$

La deuxième fonction permet de calculer les termes de la suite (v_n) définie par la formule explicite :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = n^2 - 2n + \frac{1}{n}.$$

La troisième fonction permet de calculer les termes de la suite (w_n) définie par la relation de récurrence :

$$w_0 = 5 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ w_{n+1} = w_n + 3n.$$

EXERCICE 9 p. 30

Connaître le cours

2. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition

Soit u_0 un nombre réel.
Une suite (u_n) de premier terme u_0 est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison de la suite** (u_n).

Remarque

Une suite (u_n) est arithmétique si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre ou encore si la différence $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 5$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant 5. Ainsi $u_1 = 8$, $u_2 = 13$, $u_3 = 18$ …
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme 3 et de raison 5.

DÉMO p. 20

Propriété

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.

$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \quad \cdots \quad u_n}_{+\,nr}$$

Remarques

- La propriété précédente peut être utilisée avec d'autres termes que u_0 :
$u_n = u_1 + (n-1)r = u_2 + (n-2)r = \ldots$, et de façon générale pour p entier naturel, $u_n = u_p + (n-p)r$.

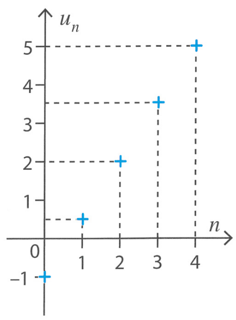
- De la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, on peut passer à la formule explicite $u_n = u_0 + nr$.
- Pour une suite arithmétique, on a $u_n = f(n)$, où f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = u_0 + xr$. Dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ sont alignés.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 1{,}5.$$

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 1,5.
Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr = -1 + 1{,}5n$.



2. Somme des premiers entiers

DÉMO p. 21

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1. La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique quelconque est donnée et démontrée p. 21.

Exercice résolu 1 Reconnaître une suite arithmétique

1. La suite (u_n), définie par $u_n = n^2$ pour tout entier naturel n, est-elle arithmétique ?
2. La suite (v_n), définie par $v_n = n^2 - (n+1)^2$ pour tout entier naturel n, est-elle arithmétique ?

Solution commentée

1. On commence par calculer les premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$.
On a $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$, donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
La suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.

2. On commence par calculer les premiers termes de la suite (v_n) :
$$v_0 = 0^2 - (0+1)^2 = -1 \ ;\ v_1 = 1^2 - (1+1)^2 = -3 \ ;\ v_2 = 2^2 - (2+1)^2 = -5.$$
Il semble que la suite (v_n) soit arithmétique de raison -2. Pour le prouver, on montre que la différence entre deux termes consécutifs quelconques est égale à -2. Pour tout entier naturel n, on a :
$$v_{n+1} - v_n = [(n+1)^2 - (n+2)^2] - [n^2 - (n+1)^2] = (n^2 + 2n + 1 - n^2 - 4n - 4) - (n^2 - n^2 - 2n - 1)$$
$$v_{n+1} - v_n = (-2n - 3) - (-2n - 1) = -2n - 3 + 2n + 1 = -2.$$
Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -2$, donc la suite (v_n) est arithmétique de raison -2.
Remarque : On peut également prouver que (v_n) est arithmétique en montrant que $v_n = f(n)$ avec f affine.
$$v_n = n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1 = f(n) \text{ avec } f \text{ affine.}$$

EXERCICE 16 p. 31

Exercice résolu 2 Étudier une suite arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Donner la formule explicite de u_n. En déduire la valeur de u_{21}.
2. Un terme de la suite vaut-il 2019 ?

Solution commentée

1. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison 4.
Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr = -7 + 4n$. En particulier, on a $u_{21} = -7 + 4 \times 21 = 77$.

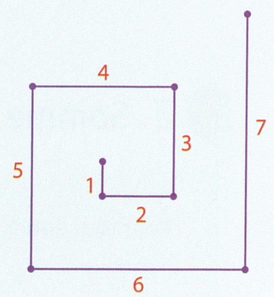
2. On cherche s'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 2019$. On résout cette équation par équivalence.
$$u_n = 2019 \Leftrightarrow -7 + 4n = 2019 \Leftrightarrow 4n = 2026 \Leftrightarrow n = \frac{2026}{4} = 506{,}5$$
n doit être un entier naturel, donc aucun terme de la suite n'est égal à 2019.

EXERCICE 19 p. 31

Exercice résolu 3 Calculer une somme de termes

On construit une ligne brisée formée de segments perpendiculaires en « spirale ». Le 1er segment a pour longueur 1 cm et chaque segment est plus long de 1 cm que le segment précédent.

• Quelle est la longueur de cette ligne brisée lorsqu'on a tracé 25 segments ?



Solution commentée

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 25 = \frac{25(25+1)}{2} = \frac{25 \times 26}{2} = 325$$
La ligne brisée constituée de 25 segments mesure 325 cm.

EXERCICE 31 p. 32

3. Suites géométriques

1. Définition

Définition

Soit u_0 un nombre réel.
Une suite (u_n) de premier terme u_0 est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = qu_n$.
Le nombre q est appelé **raison de la suite** (u_n).

Remarque

Une suite (u_n) est géométrique si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.
On passe d'un terme au suivant en le multipliant par 2. Ainsi $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40\ldots$
La suite (u_n) est géométrique de premier terme 5 et de raison 2.

DÉMO p. 20

Propriété

(u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 q^n$.

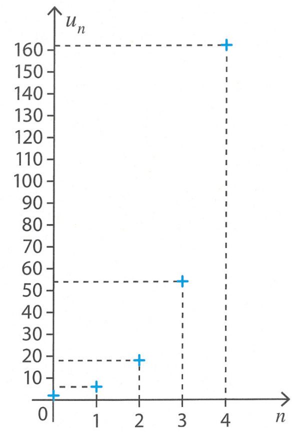
$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \quad \ldots \quad u_n}_{\times q^n}$$

Remarques

- La propriété précédente peut être utilisée avec d'autres termes que u_0 :
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = u_2 \times q^{n-2} = \ldots$, et, de façon générale, pour p entier naturel, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- De la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$, on peut passer à la formule explicite $u_n = u_0 q^n$.
Ainsi, pour une suite géométrique, $u_n = f(n)$, où f est une fonction de type « exponentielle » qui sera vue dans un chapitre ultérieur.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n$.



2. Somme des premières puissances d'un réel q

DÉMO p. 21

Propriété

Pour tout entier naturel n et pour tout réel q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarques

- Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q différente de 1. La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique quelconque est donnée et démontrée p. 21.
- Lorsque $q = 1$, la somme $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ vaut $n + 1$.

Exercice résolu 1 Reconnaître une suite géométrique

1. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (n+1)^2$. (u_n) est-elle géométrique ?
2. La suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 5 \times 3^{n+2}$. (v_n) est-elle géométrique ?

Solution commentée

1. On commence par calculer les premiers termes de la suite (u_n) : $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_2 = 9$.
On a $\frac{u_1}{u_0} = 4$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{4}$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
2. On commence par calculer les premiers termes de la suite (v_n) : $v_0 = 45$; $v_1 = 135$; $v_2 = 405$.
Il semble que la suite (v_n) soit géométrique de raison 3. Pour le prouver, on montre que pour tout entier naturel n, v_n s'écrit de la forme $v_n = v_0 \times 3^n$.
$v_n = 5 \times 3^{n+2} = 5 \times 3^n \times 3^2 = 5 \times 9 \times 3^n = 45 \times 3^n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

EXERCICE 23 p. 31

Exercice résolu 2 Étudier une suite géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n$.

1. Donner la formule explicite de u_n. En déduire la valeur exacte puis arrondie à l'unité de u_{11}.
2. Quel est le rang du premier terme qui dépasse 100 ?

Solution commentée

1. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $\frac{3}{2}$. Donc, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = u_0 q^n = 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. En particulier, $u_{11} = 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \frac{531441}{1024} \approx 519$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 100$.
En calculant les premiers termes à la calculatrice, on trouve $u_1 = 9$; $u_2 = \frac{27}{2} = 13{,}5$; $u_3 = \frac{81}{4} = 20{,}25$;
$u_4 = \frac{243}{8} = 30{,}375$; $u_5 = \frac{729}{16} \approx 46$; $u_6 = \frac{2\,187}{32} \approx 68$; $u_7 = \frac{6\,561}{64} \approx 103$.
Donc le plus petit entier n tel que $6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 100$ est 7.

EXERCICE 25 p. 32

Exercice résolu 3 Calculer une somme de termes

Sur un échiquier de 64 cases, on place un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la deuxième, quatre grains de riz sur la troisième, et on continue en doublant à chaque case le nombre de grains de riz.

1. Combien y a-t-il de grains de riz sur la dernière case ?
2. Combien y a-t-il de grains de riz sur l'échiquier ?

Solution commentée

On définit la suite (u_n) ainsi : u_0 désigne le nombre de grains de riz sur la 1re case, u_1 le nombre de grains de riz sur la 2e case, … On a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.
La suite (u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

1. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = 2^n$. En particulier, le nombre de grains de riz sur la 64e case est $u_{63} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808 \approx 9 \times 10^{18}$.
2. Pour tout entier naturel n, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.
Le nombre de grains de riz sur l'échiquier est donc $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 2 \times 10^{19}$.

EXERCICE 35 p. 32

4. Sens de variation d'une suite

1. Définition

Définition

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques

- Pour certaines suites, l'inégalité $u_{n+1} \geqslant u_n$ n'est vraie que pour $n \geqslant p$; on dit que (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Lorsqu'une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.
- Pour étudier le sens de variation d'une suite, on pourra étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$.

Exemples

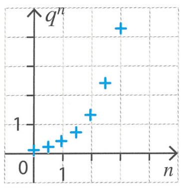
a. 0, 2, 4, 6, … la suite des entiers naturels pairs est une suite croissante, chaque terme est supérieur au précédent.
b. La suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, ses termes d'indices pairs sont égaux à 1 et ses termes d'indices impairs sont égaux à –1.

2. Cas d'une suite arithmétique de raison r

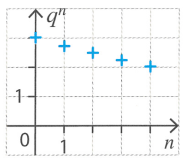
- Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite est constante.

3. Cas particulier de la suite (q^n)

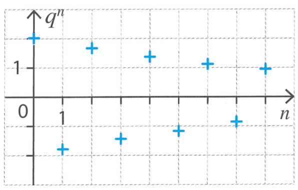
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est croissante.



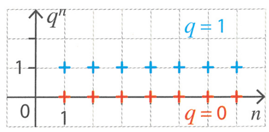
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est décroissante.



- Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.



- Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 1$.

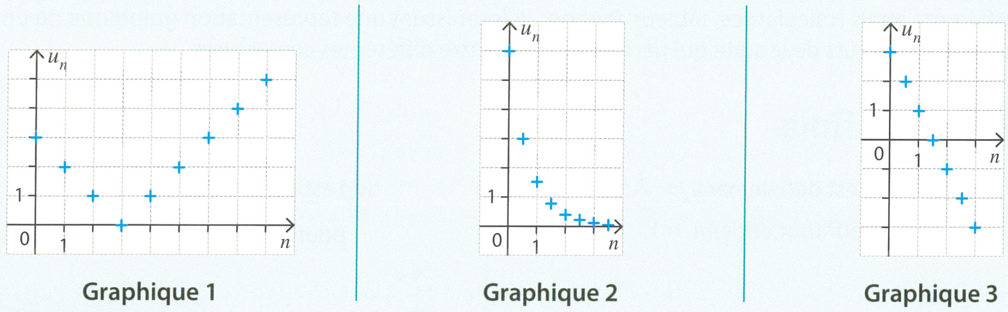


Remarque

Pour une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q :
- si u_0 est positif, la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n) ;
- si u_0 est négatif, la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

Exercice résolu 1 Conjecturer un sens de variation à partir d'une représentation graphique

Conjecturer le sens de variation de chacune des suites représentées ci-dessous.



Solution commentée

La suite représentée par le graphique 1 semble croissante à partir du rang 3. Les suites représentées par les graphiques 2 et 3 semblent décroissantes.

EXERCICE 38 p. 33

Exercice résolu 2 Déterminer un sens de variation

1. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^2 + 3n$.
Montrer que (u_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est définie, par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n - n^2 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
Montrer que (v_n) est décroissante.

Solution commentée

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - n^2 - 3n = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4 \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -n^2 \leqslant 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, donc la suite (v_n) est décroissante.

EXERCICE 41 p. 33

Exercice résolu 3 Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies, par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - 5, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

- Déterminer la nature de chaque suite, puis déterminer son sens de variation.

Solution commentée

La suite (u_n) est arithmétique de raison –5. Or –5 est négatif, donc (u_n) est décroissante.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout entier naturel n, $v_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est décroissante. Comme v_0 est négatif, la suite (v_n) est croissante.

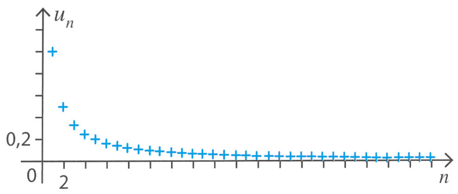
EXERCICE 42 p. 33

5. Notion intuitive de limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ». Différents outils (calculatrice, tableur, Python…) fournissent une représentation graphique ou un tableau de valeurs de la suite qui permettent d'émettre différentes conjectures.

1. Limite finie

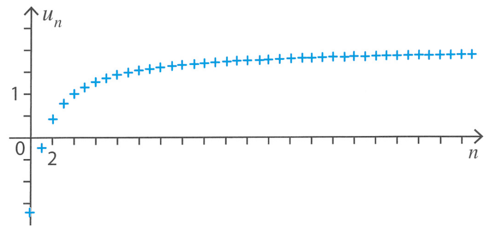
(u_n) est définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$,
pour tout entier $n \geqslant 1$.



n	100	1 000	100 000
u_n	0,01	0,001	0,000 01

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 0.
On dit que la suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(v_n) est définie par $v_n = \dfrac{4n-5}{2n+3}$,
pour tout entier naturel n.

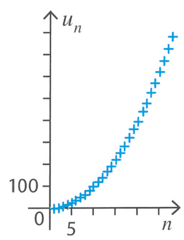


n	100	1 000	100 000
v_n	1,945 8	1,994 5	1,999 9

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 2.
On dit que la suite (v_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.

2. Limite infinie

(u_n) est définie par $u_n = n^2$
pour tout entier naturel n.



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

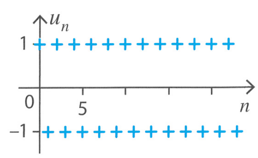
(w_n) est la suite arithmétique
de premier terme 16 et de raison -2.

	A	B
1	n	w_n
2	0	16
3	10	-4
4	100	-184
5	10000	-19984

Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs.
On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

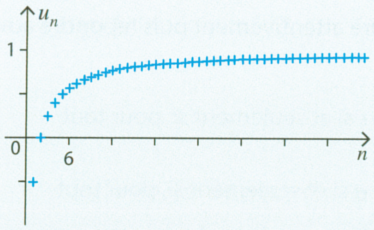
3. Pas de limite

Il existe des suites qui n'ont pas de limite, comme la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

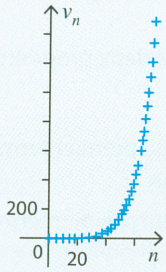


Exercice résolu 1 Conjecturer une limite à l'aide d'un graphique

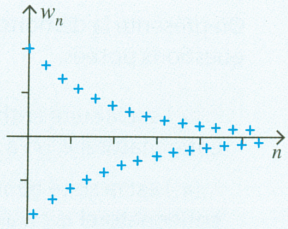
Conjecturer le comportement de chacune des suites représentées ci-dessous quand n tend vers $+\infty$.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Solution commentée

1. Les termes de la première suite (u_n) semblent se rapprocher autant que l'on veut de 1. On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
2. Les termes de la deuxième suite (v_n) semblent devenir aussi grandes que l'on veut. On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
3. Les termes de la troisième suite (w_n) semblent se rapprocher autant que l'on veut de 0 en alternant de signes. On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

EXERCICE 45 p. 33

Exercice résolu 2 Conjecturer une limite avec un tableur ou un algorithme

Conjecturer le comportement de chaque suite quand n tend vers $+\infty$.

1. pour (u_n), en lisant le tableur.
2. pour (v_n), en programmant l'algorithme suivant et en donnant des valeurs à n de plus en plus grandes.

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = (u_n)^2 - 1$.

	A	B	C
1	n	(u_n)	
2	0	-1	=B2^2-1
3	1	0	
4	2	-1	
5	3	0	
6	4	-1	
7	5	0	
8	6	-1	

- La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = v_n - n^2$.

```
v ← 3
Pour i allant de 1 à n faire
    v ← v − (i − 1)²
Fin Pour
```

Solution commentée

1. La suite (u_n) semble ne prendre que les valeurs 0 et -1 de façon alternée : elle semble ne pas admettre de limite quand n tend vers $+\infty$.
2. On peut programmer ainsi une fonction en Python.

```python
def terme_v(n):
    v=3
    for k in range(1,n+1):
        v=v-(k-1)**2
    return v
```

```
>>> terme_v(100)
-328347
>>> terme_v(10000)
-333283334997
```

Ainsi, $v_{100} = -328\,347$ et $v_{10\,000} \approx -3 \times 10^{11}$ permettent de conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 47 p. 33

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration des deux propriétés suivantes. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

- (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.
- (u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 q^n$.

Démonstration

- Soient (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r et (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_0 + nr$.

Pour démontrer la propriété, on va montrer que ces deux suites sont identiques.

• On a $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$. Les deux suites ont le même terme initial.
• De plus, **pour tout entier naturel *n***, on a :

$$v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = v_n + r.$$

Les deux suites vérifient la même relation de récurrence.

Donc, **pour tout entier naturel *n***, on a $v_n = u_n$.

- Soient (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q et (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_0 q^n$.

Pour démontrer la propriété, on va montrer que ces deux suites sont identiques.

• On a $v_0 = u_0 q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. Les deux suites ont le même terme initial.
• De plus, **pour tout entier naturel *n***, on a :

$$v_{n+1} = u_0 q^{n+1} = q u_0 q^n = q\, v_n.$$

Les deux suites vérifient la même relation de récurrence.

Donc **pour tout entier naturel *n***, on a $v_n = u_n$.

1 Dans ces deux démonstrations, la vérification « $v_0 = u_0$ » est-elle nécessaire pour conclure que les suites (v_n) et (u_n) sont identiques ?

2 **a.** Quelle est la relation de récurrence de la suite arithmétique (u_n) de permier terme u_0 et de raison r ?
b. Quelle est la relation de récurrence de la suite géomtrique (u_n) de premier teme u_0 et de raison q ?

3 Aurait-on pu remplacer « **pour tout entier naturel *n*** » par « il existe un entier naturel n » ? Expliquer.

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante qui aurait été utilisée pour la première fois par le mathématicien allemand Gauss (1777-1855) dans le cas $n = 100$, alors qu'il n'avait que 7 ans.

> Pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Poser $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ et montrer que $S + S = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \ldots + (n + 1)$.
- En déduire la formule que l'on veut démontrer.

- À l'aide d'un raisonnement similaire, démontrer que si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} = \frac{(\text{nombre de termes}) \times (1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Pour tout entier naturel n et pour tout réel q différent de 1, on a $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Poser $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ avec n entier naturel et q un réel différent de 1.
Calculer et réduire l'expression $(1 - q)S$.
- En déduire la formule que l'on veut démontrer. Était-ce nécessaire de prendre comme hypothèse q différent de 1 ? Expliquer.

- En utilisant cette formule, démontrer que si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1^{\text{er}}\ \text{terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Utiliser différents raisonnements

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $v_n = u_n + 1$.

1 La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.

2 La suite (v_n) est-elle géométrique ? Justifier.

> **La négation d'une propriété**
> La négation de « pour tout entier naturel n, la propriété P_n est vraie » est « il existe au moins un entier naturel n tel que la propriété P_n est fausse ».

Apprendre par le texte & la vidéo

5 VIDÉOS DE COURS

Modes de génération d'une suite

- Par une formule explicite : $u_n = f(n)$, où f est une fonction.
- Par un premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.
- Par un premier terme et un algorithme de calcul des termes.

Sens de variation d'une suite

- (u_n) est croissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- (u_n) est constante $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Sommes particulières

- **Somme des premiers entiers**

  Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

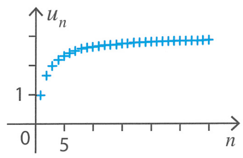
- **Somme des premières puissances d'un réel $q \neq 1$**

  Pour tout entier naturel n, on a :

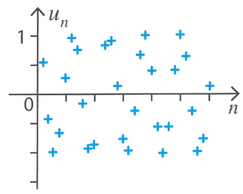
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Notion de limite d'une suite

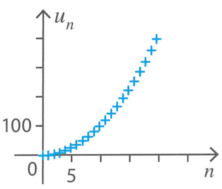
En observant les valeurs u_n lorsque n est très grand, on peut conjecturer :



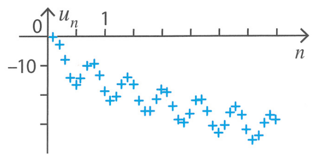
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$



- (u_n) n'a pas de limite.



- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

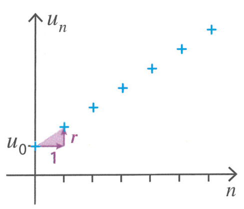
Suites particulières

- **Suites arithmétiques**

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases} \Leftrightarrow u_n = u_0 + nr$$

ou

$$\begin{cases} u_p \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases} \Leftrightarrow u_n = u_p + (n - p)r$$



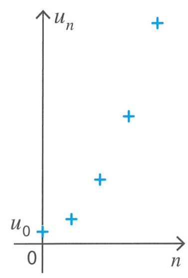
- Si r est positif, (u_n) est croissante.
- Si r est négatif, (u_n) est décroissante.
- Si r est nul, (u_n) est constante.

- **Suites géométriques**

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases} \Leftrightarrow u_n = u_0 \times q^n$$

ou

$$\begin{cases} u_p \text{ donné} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases} \Leftrightarrow u_n = u_p \times q^{n-p}$$



- Si $q > 1$, (q^n) est croissante.
- Si $q = 1$, (q^n) est constante.
- Si $0 < q < 1$, (q^n) est décroissante.
- Si $q = 0$, (q^n) est constante à partir du rang 1.
- Si $q < 0$, (q^n) n'est pas monotone.

Tester ses connaissances

Effectuer les exercices 1 à 8 et vérifiez vos réponses.
Si nécessaire, révisez les points de cours en texte ou en vidéo.

1 La suite (u_n) est définie par la formule explicite $u_n = 5 + \sqrt{n}$ et la suite (v_n) est définie par son premier terme $v_0 = 16$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = 5 + \sqrt{v_n}$.
1. Calculer à la main u_0, u_1, v_1 et v_2.
2. Déterminer à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice les 20 premiers termes des deux suites.
3. Écrire un algorithme qui permet de calculer le terme de rang n de la suite (v_n).

2 La suite (w_n) est définie par son premier terme $w_0 = -2$ et chaque terme est la somme du rang du terme précédent et du double du terme précédent.
- Calculer w_3.

3 On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -3.
1. Donner la formule explicite de u_n puis calculer u_{10}.
2. Déterminer l'indice du premier terme négatif.

4 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = 7$ et de raison 2.
- Donner la formule explicite de v_n puis calculer v_8.

5 On a constaté que la population d'une petite ville, initialement de 8 500 personnes, diminue de 7 % par an.
1. Quel sera le nombre d'habitants de cette ville au bout de 5 ans ?
2. Si cette évolution perdure, au bout de combien d'années le nombre d'habitants aura-t-il été divisé par 2 ?

6 Calculer les sommes suivantes.
$S = 18 + 19 + 20 + \ldots + 100$
$S' = 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

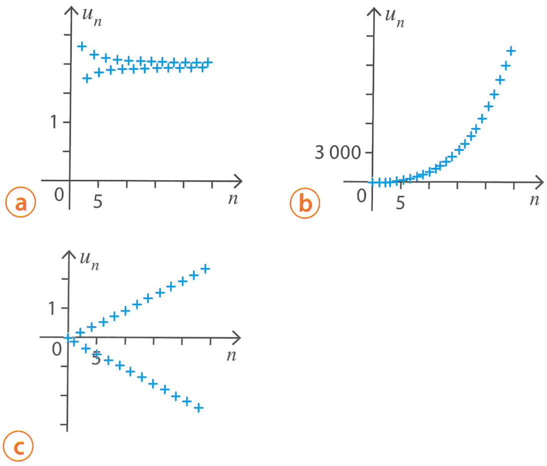
7 Étudier le sens de variation de chaque suite ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = u_n - 5, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

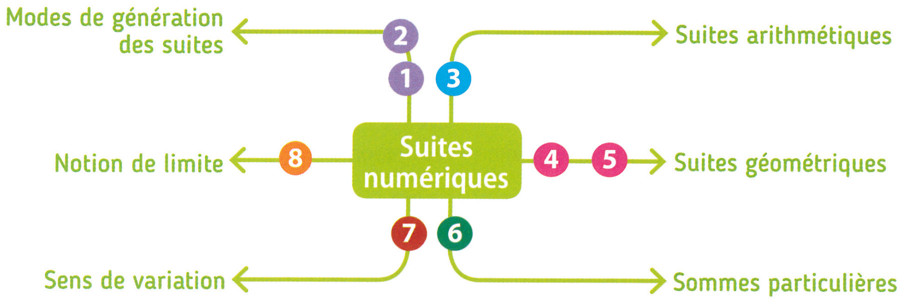
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2n + u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

8 Quelle est, parmi les suites représentées ci-dessous, celle qui semble avoir une limite finie ?



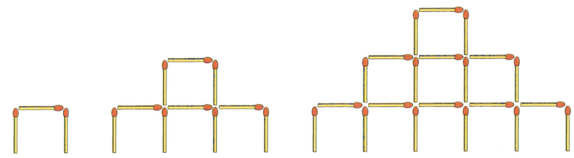
CORRIGÉS DES EXERCICES



TP Algorithmique et programmation en Python

TP 1 Pyramide d'allumettes

Objectif
Calculer une somme de termes et un seuil.



1 étage 2 étages 3 étages

On s'intéresse à des pyramides construites avec des allumettes comme ci-contre.
En poursuivant ainsi, on obtient des pyramides à autant d'étages que l'on souhaite à condition, bien sûr, d'avoir assez d'allumettes.

① On considère la fonction pyramide ci-dessous programmée en langage Python.

a. Compléter le tableau suivant qui donne les différentes valeurs prises par les variables i, S et a au cours de l'exécution de l'instruction pyramide(3).

```python
def pyramide(n):
    a=3
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+a
        a=a+4
    return S
```

i	//////////	0	1	2
S	0			
a	3			

b. Que représentent les différentes valeurs prises par la variable a ?

c. À quoi correspond le nombre renvoyé par pyramide(3) ?

② On souhaite connaître le nombre maximal d'étages que l'on peut construire avec 1 000 allumettes.

a. La fonction nb_etages ci-contre renvoie le nombre maximal d'étages que l'on peut construire avec un nombre N d'allumettes.
La compléter puis répondre au problème.

```python
def nb_etages(N):
    n=0
    while pyramide(n) ...:
        n=...
    return...
```

b. Modifier cette fonction de sorte qu'elle renvoie aussi le nombre d'allumettes restantes.

TP 2 Atteindre les limites

Objectif
Conjecturer une limite avec les listes et les graphiques.

① **a.** Quelle est l'expression de la suite (u_n) associée à la fonction terme_u ci-dessous (lignes 1 à 5) ?

b. Copier ou ouvrir le script et l'exécuter.

c. Dans la console, qu'obtient-on en saisissant :

```
>>> terme_u(0)
>>> terme u(4)
>>> terme_u(9)
```

```python
1 def terme_u(n):
2     u=10
3     for i in range(n):
4         u=0.5*u+2
5     return u
6
7 x=[n for n in range(10)]
8 y=[terme_u(n) for n in range(10)]
```

d. Que contient la variable x (ligne 7) ? Et la variable y (ligne 8) ? (On peut afficher x et y dans la console).

e. Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

```python
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 plt.scatter(x,y)
12 plt.show()
```

f. Compléter le script précédent avec les lignes 10 à 12 puis l'exécuter. Qu'obtient-on ?

② Afficher la liste puis le graphique des 15 premiers termes des suites suivantes puis conjecturer leur comportement quand n tend vers $+\infty$.

a. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n^2+3}{n+1}$.

b. (t_n) arithmétique de premier terme -4 et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

c. (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = -1{,}5 \\ w_{n+1} = \sqrt{w_n + 2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

d. (k_n) géométrique de premier terme 2 et de raison -3.

TP 3 Suite de Syracuse

Objectif
Manipuler les listes.

On appelle suite de Syracuse une suite (u_n) d'entiers naturels définie de la manière suivante :
- le premier terme u_0 est un entier naturel non nul que l'on pourra choisir ;
- pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair ; $u_{n+1} = 3u_n + 1$ sinon.

1 **a.** Que remarque-t-on lorsqu'on calcule les premiers termes de la suite de Syracuse en prenant $u_0 = 1$?
b. Le nombre 1 figure-t-il dans la suite de Syracuse de premier terme $u_0 = 10$?
La conjecture de Syracuse (datant de 1928 et non encore démontrée à ce jour) s'énonce ainsi :
« Quel que soit l'entier naturel non nul choisi pour u_0,
le nombre 1 est atteint par un terme de la suite. »
On appelle **temps de vol** de la suite l'indice du premier terme de la suite qui vaut 1.
On appelle **altitude du vol** de la suite la valeur du plus grand terme de la suite.

2 Copier le script ci-dessous dans l'éditeur Python.

```python
def Syracuse(u):
    if u%2==0:
        u=u//2
    else:
        u=3*u+1
    return u

def Liste_Syracuse(u):
    L=[u]
    while u!=1:
        L.append(Syracuse(u))
        u=Syracuse(u)
    return L
```

a. Quel nombre est renvoyé par `Syracuse(6)` ? `Syracuse(7)` ?
b. À quel test correspond `u%2==0` ?
c. Quel est le rôle de la fonction `Syracuse` ?

3 **a.** Que retourne l'instruction `Liste_Syracuse(14)` écrite dans la console ?
b. Que fait l'instruction `L.append(Syracuse(u))` ?
c. Est-on sûr que pour tout entier naturel u non nul, `Liste_Syracuse(u)` renvoie une liste ?

4 On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur de la liste L et `max(L)` renvoie la plus grande valeur de la liste L.
a. Si $u_0 = 7$, quelle est la durée du vol de la suite et quelle est son altitude ?
b. Écrire un programme qui détermine la plus petite valeur de u_0 qui donne un temps de vol supérieur à 100.
c. Quelle est alors l'altitude de ce vol ?
Déterminer deux autres valeurs de u_0 qui donnent la même altitude.

Boîte à outils

MÉMENTO PYTHON : VOIR RABATS

- Pour désigner une liste de nombres, on utilise des crochets en début et fin de liste et des virgules pour séparer les nombres.
`L=[4,2,8,11,3]`
- Les listes peuvent être définies en « compréhension ».
`L=[n**2 for n in range(4)]` est la liste `[0,1,4,9]`.

TP 4 Comparaison de placements CALCULATRICE

Objectif
Utiliser le mode Suite (ou Menu RECUR).

On va comparer deux types de placement d'un capital C_0 au taux annuel de t % :

• le placement à intérêts simples (chaque année, le capital augmente de la valeur constante $C_0 \times \frac{t}{100}$).

• le placement à intérêts composés (chaque année, le capital augmente de t %).

On veut placer 1 000 euros sur un compte. Deux placements sont alors proposés :

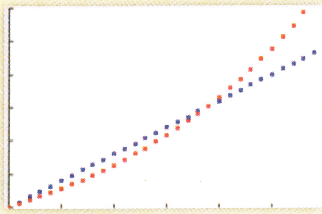
– l'un au taux annuel de 8 % à intérêts simples (P1) ;

– l'autre au taux annuel de 5 % à intérêts composés (P2).

1. On note u_n (resp. v_n) la valeur acquise par le capital au bout de n années avec le placement P1 (resp. P2).
Expliquer les formules de récurrence $u_{n+1} = u_n + 80$ et $v_{n+1} = 1{,}05v_n$ pour tout entier naturel n.

n	u	v
0	1000	1000
1	1080	1050
2	1160	1102.5
3	1240	1157.6
4	1320	1215.5
5	1400	1276.3
6	1480	1340.1
7	1560	1407.1
8	1640	1477.5
9	1720	1551.3
10	1800	1628.9

2. **a.** Utiliser le mode suite (ou Menu RECUR) de la calculatrice afin d'afficher le tableau de valeurs des 11 premiers termes de ces deux suites.
b. Quel est le placement le plus intéressant au bout des 10 premières années ?
c. Déterminer à l'aide de la calculatrice le premier rang n tel que $u_n < v_n$.
Interpréter ce résultat en termes de placement.
d. Représenter graphiquement les 30 premiers termes de ces deux suites, en adaptant au mieux la fenêtre graphique.



3. **a.** Les suites (u_n) et (v_n) étudiées précédemment sont des suites particulières : comment les nomme-t-on ?
b. Exprimer les termes généraux u_n et v_n en fonction de n.
c. Reprendre la question **2** en utilisant les formules explicites obtenues à la question précédente.

TP 5 La suite de Fibonacci

Objectif
Conjecturer une limite.

La suite de Fibonacci est la suite (F_n) définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Le nombre $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est appelé le nombre d'or.

	A	B	C
1	n	F_n	F_{n+1}/F_n
2	0	1	
3	1	1	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		

1. Dans la colonne B, calculer les premiers termes de la suite de Fibonacci.

2. Pour tout entier naturel n, on note $Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
Dans la colonne C, calculer les premiers termes de la suite (Q_n) et en donner une représentation graphique.
Conjecturer alors son comportement quand n tend vers $+\infty$.
Dans la cellule D1, déterminer une valeur approchée du nombre d'or. Que peut-on constater ?

TP 6 Étude de trois propositions d'embauche TABLEUR

Objectif
Comparer des nombres avec le tableur.

Un jeune actif reçoit trois propositions de rémunération lors de son embauche dans une entreprise le 1er janvier 2019. L'évolution des salaires mensuels nets pour chacune des trois propositions est détaillée ci-dessous.

Proposition A :
1 450 € en 2019, puis augmentation de 40 € chaque année suivante.

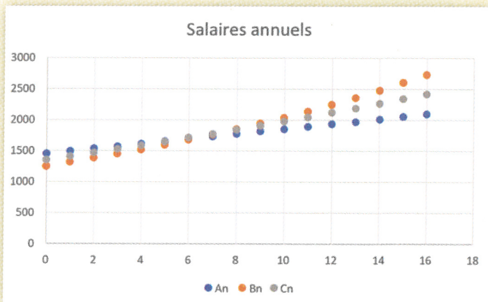
Proposition B :
1 250 € en 2019, puis augmentation de 5 % chaque année suivante.

Proposition C :
1 350 € en 2019, puis augmentation de 2 % suivie d'une augmentation de 30 € chaque année suivante.

On note A_n le montant du salaire mensuel net de la proposition A en 2019 + n, B_n le montant du salaire mensuel net de la proposition B en 2019 + n, et enfin C_n le montant du salaire mensuel net de la proposition C en 2019 + n.

	A	B	C	D	E
1	Année	n	A_n	B_n	C_n
2	2019	0	1450	1250	1350
3	2020	1			
4	2021	2			
5	2022	3			
6	2023	4			
7	2024	5			
8	2025	6			
9	2026	7			
10	2027	8			
11	2028	9			
12	2029	10			
13	2030	11			
14	2031	12			
15	2032	13			
16	2033	14			
17	2034	15			
18	2035	16			

1. Reproduire la feuille de calcul ci-dessus.
2. **a.** Quelle formule peut-on saisir en C3 qui, par recopie vers le bas, permet d'obtenir la colonne C ?
b. Quelle formule peut-on saisir en D3 qui, par recopie vers le bas, permet d'obtenir la colonne D ?
c. Quelle formule peut-on saisir en E3 qui, par recopie vers le bas, permet d'obtenir la colonne E ?
3. **a.** Faire apparaître sur la feuille de calcul un graphique comme ci-dessous puis le commenter.
b. Quelle proposition donne le meilleur salaire en 2030 ?
Est-ce que cela veut dire que si le jeune actif change d'entreprise en 2030, c'est cette proposition qu'il doit choisir en 2019 ? Expliquer.
4. Le jeune actif choisit la proposition B. Combien d'années devrait-il rester dans cette entreprise pour que ce choix soit le plus rentable ? On peut utiliser les colonnes F, G et H du tableur pour calculer les sommes totales perçues depuis janvier 2019 pour chacune des trois propositions.

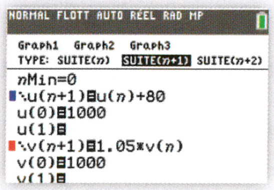


Boîte à outils

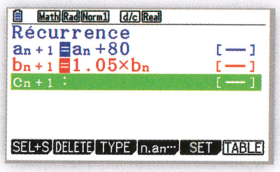
Calculatrice

- Pour afficher le tableau de valeurs :

Sur TI : « déf table » et « table ».



Sur Casio : « SET » et « TABL »



- Pour afficher le graphique :

Sur TI : « fenêtre » et « graphe ».
Sur Casio : « V-Window » et « G-PLT ».

Tableur

- Pour tracer un graphique, sélectionner les cellules contenant les données à représenter, puis dans l'onglet « Insertion » choisir le type de graphique souhaité.