Terminale

CHAPITRE 7

THÈME 2 / Statistiques et probabilités

Variables aléatoires discrètes finies

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/tx26rx

Entretenir ses automatismes

Proportions et pourcentages

1. Exprimer la proportion 0,1 sous forme de pourcentage.

2. Calculer 35 % de 40 % sous forme de pourcentage.

Évolution et variations

3. Quelle évolution revient à mutliplier par 1,2 ?

4. Que valait 48 avant d'avoir augmenté de 20 %

5. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 100 % puis a diminué de 50 % ?

6. Le taux d'évolution nécessaire à compenser une baisse de 32 % est une hausse…
a. inférieure à 32 % **b.** égale à 32 %
c. supérieure à 32 %

7. Factoriser puis simplifier $G = 2^{20} - 2^{19}$.

8. Estimer l'ordre de grandeur de 923^4.

9. Convertir 12 cl en cm^3.

10. Résoudre $3x^2 = 48$.

11. Construire le tableau de signes de $(3x + 1)(2 - x)$ sur $\mathbb{R}$.

12. On donne $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Exprimer BC en fonction de AB et AC.

13. La tension U, en volt, est donnée par $U = RI$ où R est la résistance (en ohms) et I est l'intensité (en ampères).
Si $R = 20\ \Omega$ et $I = 15$ mA, que vaut la tension ?

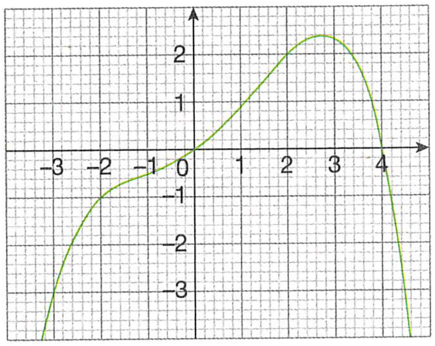
14. Dériver $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 0{,}5x^2 - \dfrac{5}{2}x + 120$.

15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + 4$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

Fonctions et représentations

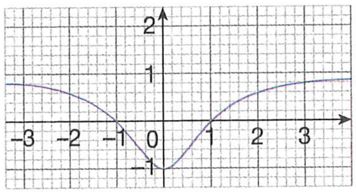
16. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée.

a. Quelle est l'image de 2 par f ?
b. Résoudre $f(x) > 0$.
c. Combien 3 admet-il d'antécédents ?



17. Construire le tableau de signes de $11(x - 5)(x - 7)$.

18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée.



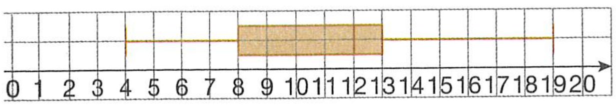
Donner le tableau de variations et le tableau de signes de f.

19. Déterminer les coordonnées des points d'intersections des courbes $y = 3(x - 2)$ et $y = (x - 2)^2$.

20. On considère les points $A\left(2\ ;\dfrac{15}{4}\right)$ et $B\left(\dfrac{21}{8}\ ;5\right)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Représentations graphiques de données chiffrées

21. On a représenté le diagramme en boîte ci-dessous avec les notes obtenues par les élèves d'une classe à un devoir de mathématiques.



Quelle est la proportion des élèves ayant obtenu 13 ou plus ?

1 Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire

- Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire, le protocole est le suivant :
  – on dresse le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire (sauf bien sûr si on en dispose déjà).
  – on applique la formule de l'espérance.
- Pour interpréter l'espérance d'une variable aléatoire, on utilise le fait que l'espérance est la valeur moyenne de la variable aléatoire.

Remarque
On vérifie que la somme des probabilités du tableau vaut bien 1.

Exercice résolu A

Dans un refuge de montagne, le gardien a constaté que chaque année, 80 % des clients choisissent le plat du jour à 18 € et que 25 % choisissent le dessert du jour à 7 €, ces choix étant indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale à la dépense d'un client sur ces propositions de la carte du refuge.

On considère les événements suivants :
- J : « le client choisit le plat du jour »
- D : « le client choisit le dessert du refuge »

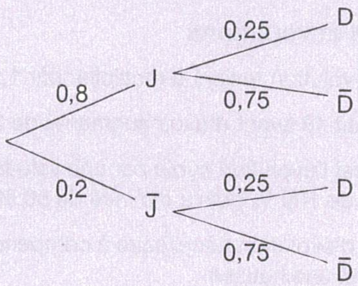
1 Représenter cette situation par un arbre pondéré.

2 Calculer l'espérance de X.

3 Interpréter le résultat obtenu.

SOLUTION

1. La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



2. Le chemin $J \cap D$ correspond à X = 25 et $P(J \cap D) = 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2$.
Le chemin $J \cap \overline{D}$ correspond à X = 18 et $P(J \cap \overline{D}) = 0{,}8 \times 0{,}75 = 0{,}6$.
Le chemin $\overline{J} \cap D$ correspond à X = 7 et $P(\overline{J} \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}25 = 0{,}05$.
Le chemin $\overline{J} \cap \overline{D}$ correspond à X = 0 et $P(\overline{J} \cap \overline{D}) = 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}15$.
Les valeurs prises par X sont donc 0 ; 7 ; 18 ; 25 et on peut dresser ci-contre le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	0	7	18	25
$P(X = x_i)$	0,15	0,05	0,6	0,2

On applique ensuite la formule de l'espérance :
$E(X) = 0{,}15 \times 0 + 0{,}05 \times 7 + 0{,}6 \times 18 + 0{,}2 \times 25 = 16{,}15$

3. On en déduit que la dépense moyenne d'un client sur ces propositions de la carte du refuge est en moyenne de 16,15 €.

Exercices d'application directe

1 Dans chacun des cas suivants, calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

a.

x_i	2	8	11	34
$P(X = x_i)$	0,29	0,16	0,3	0,25

E(X) = ...

b.

x_i	6	- 4	1	0
$P(X = x_i)$	0,18	0,33	0,01	0,48

E(X) = ...

2 Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

a.

x_i	9	17	22
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	....

P(X = 22) = ...

E(X) = ...

b.

x_i	–6	3	10	20	24
$P(X = x_i)$	0,02	0,47	0,14	....	0,21

P(X = 20) = ...

E(X) = ...

3 On joue au jeu suivant : on lance un dé équilibré, on gagne 4 € si la face obtenue est 6, on gagne 2 € si la face obtenue est 5, et on perd 1 € sinon.
On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par G ?

Les valeurs prises par G sont ....

b. Déterminer la loi de probabilité de G.

P(G = 4) = ...

P(G = 2) = ...

P(G = -1) = ...

D'où la loi de probabilité de G est :

x_i	4	2	–1
$P(X = x_i)$	....	....	....

c. Calculer l'espérance de G.

E(G) = ...

d. Interpréter le résultat obtenu.

....

....

e. Le jeu est-il favorable au joueur ou à l'organisateur ?

....

....

4 Dans une classe, il y a un élève de 15 ans, 8 élèves de 16 ans, 18 élèves de 17 ans et un élève de 18 ans. On note X la variable aléatoire égale à l'âge d'un élève choisi au hasard.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

....

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

....

....

....

....

D'où la loi de probabilité de X est :

....	....	....	....	....
....	....	....	....	....

c. Calculer l'espérance de X.

....

d. Interpréter le résultat obtenu.

....

5 Un bureau de moniteurs de canyoning propose la grille tarifaire suivante pour deux parcours différents (tarif par personne) :

Nombre de personnes	2	3	5 et plus
Version courte	79 €	49 €	29 €
Version longue	99 €	69 €	49 €

Par expérience, le bureau des moniteurs a constaté qu'au cours d'une saison :
– 16 % des clients se présentent par groupes de deux, 27 % par groupes de trois et le reste par groupes de cinq et plus.
– Parmi les groupes de deux, 28 % choisissent la version longue du canyon.
- Parmi les groupes de trois, 33 % choisissent la version longue du canyon.
- Parmi les groupes de cinq et plus, 74 % choisissent la version longue du canyon.

Soit X la variable aléatoire égale au prix payé par un client.

On considère les événements suivants :
• D : « le client se présente dans un groupe de deux ».
• T : « le client se présente dans un groupe de trois ».
• C : « le client se présente dans un groupe de cinq et plus ».

a. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X.

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

Le chemin .... correspond à X = ...

et P(..................) = ...

On peut donc dresser le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	....	....	....	....	....	....
$P(X = x_i)$	....	....	....	....	....	....

c. Calculer l'espérance de X.

....

d. Interpréter le résultat obtenu.

....

2 Calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal

Pour calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal, le protocole est le suivant :

- On construit un tableau à double entrée avec les valeurs de n dans la première colonne (de 1 à n) et les valeurs de k (de 0 à n) dans la première ligne.
- On barre ou on grise les cases où $k > n$.
- On complète la première ligne, la première colonne et la diagonale avec des 1.
- Pour calculer la valeur des cases manquantes, on utilise la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Exercice résolu B

1 Donner les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{3}{0}$, $\binom{5}{0}$ et $\binom{2}{2}$.

2 Construire le triangle de Pascal pour $n = 5$.

3 En déduire les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{5}{3}$ et $\binom{4}{2}$.

SOLUTION

1. $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$ et $\binom{2}{2} = 1$.

2. On complète d'abord la première ligne, la première colonne et la diagonale avec des 1 :

n \ k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1		1			
3	1			1		
4	1				1	
5	1					1

Ensuite on complète le reste des cases en utilisant la formule de Pascal :

n \ k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

3. Par lecture sur la table ci-dessus, on trouve : $\binom{5}{3} = 10$ et $\binom{4}{2} = 6$.

Exercices d'application directe

6 a. Donner les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{4}{0}$, $\binom{1}{1}$ et $\binom{2}{0}$.

b. Construire le triangle de Pascal pour $n = 4$.

n \ k	0	1	2	3	4
1	……	……			
2	……	……	……		
3	……	……	……	……	
4	……	……	……	……	……

c. En déduire les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{3}{2}$.

7 a. Donner les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{6}{0}$, $\binom{4}{0}$ et $\binom{5}{5}$.

b. Construire le triangle de Pascal pour $n = 6$.

c. En déduire les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{6}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{6}{5}$.

8 a. Donner les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{6}{6}$, $\binom{7}{0}$ et $\binom{7}{7}$.

b. Construire le triangle de Pascal pour $n = 7$.

c. En déduire les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{4}$ et $\binom{6}{3}$.

9 a. Donner la valeur de $\binom{12}{0}$ et de $\binom{12}{12}$.

b. On donne $\binom{12}{5} = 792$ et $\binom{12}{6} = 924$.
En déduire la valeur de $\binom{13}{6}$.

10 a. Donner la valeur de $\binom{20}{0}$ et de $\binom{20}{20}$.

b. On donne $\binom{20}{14} = 38760$ et $\binom{20}{15} = 15504$.

En déduire la valeur de $\binom{21}{15}$.

3 Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale

Pour déterminer si une variable aléatoire X relève de la loi binomiale, on examine si les conditions suivantes sont vérifiées :

- On a une succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.
- Ces épreuves sont identiques et indépendantes.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans la succession d'épreuves considérées.

Si ces conditions sont vérifiées, alors la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Exercice résolu C

À l'entraînement, un footballeur a un score de 80 % de réussite sur penalty.
Il tire une série de 10 penaltys consécutifs et on estime que les tirs sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de penaltys réussis dans la série.

Quelle est la loi suivie par X ?

SOLUTION

Chaque penalty est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,8.

On répète 10 fois cette épreuve de manière identique et indépendante.

Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}8)$.

Exercices d'application directe

11 À la période de la galette des rois, un boulanger place dans 1 % des galettes des fèves qui font gagner une sortie de spéléologie aux clients qui les ont obtenues.
Une mairie achète 180 galettes pour les membres de son personnel et on suppose que le nombre de galettes dans le commerce est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler cette situation à un tirage avec remise de 180 galettes.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de fèves gagnantes dans ce lot. Quelle est la loi suivie par X ?

12 Le responsable de la chaîne de production d'une usine de téléphones portables constate que 2,5 % des batteries sont défectueuses et il examine un lot de 1 000 batteries fabriquées.
On suppose que le nombre de batteries produites est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler cette situation à un tirage avec remise de 1 000 batteries.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de batteries défectueuses dans le lot.

Quelle est la loi suivie par X ?

13 Il était une fois un pays merveilleux où 97 % des élèves ne faisaient jamais de fautes en mathématiques.
Dans ce pays merveilleux, on considère un lycée de 1 500 élèves et on suppose qu'il y a suffisamment d'élèves dans le pays pour qu'on puisse assimiler cette situation à un tirage avec remise de 1 500 élèves.
Soit N la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves de ce lycée ne faisant jamais de fautes en mathématiques

Quelle est la loi suivie par N ?

14 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la situation peut être modélisée par une loi binomiale, et si oui, préciser ses paramètres :

a. Dans un jeu de 52 cartes, on prélève une première carte, puis sans remise, une deuxième et on regarde le nombre d'as obtenus.

b. Dans un jeu de 52 cartes, on prélève une première carte, puis avec remise, une deuxième et on regarde le nombre d'as obtenus.

c. Un candidat aux élections présidentielles possède 12 % d'intentions de vote.
On interroge 60 personnes dans la population et on compte le nombre de personnes qui ont l'intention de voter pour ce candidat.

d. On choisit une lettre au hasard dans l'alphabet et on répète 15 fois cette expérience en choisissant à chaque fois la lettre dans tout l'alphabet.
On regarde alors si l'on obtient la lettre A, la lettre R ou la lettre T.

15 Dans chaque cas, déterminer si la situation peut être modélisée par une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

a. Une urne contient 8 jetons blancs, 6 jetons rouges et 4 jetons bleus.
On tire au hasard un jeton de l'urne et on regarde s'il est rouge, puis on le remet dans l'urne. On répète cette expérience 7 fois.

b. On lance un de 3 fois de suite et on regarde si l'on obtient un nombre strictement inferieur à 3, égal à 3 ou strictement supérieur à 3.

c. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes, on regarde si c'est un As et on la remet dans le jeu. On répète l'expérience 4 fois.

d. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes, on regarde si c'est un As et on ne la remet pas dans le jeu. On répète l'expérience 4 fois.

4 Calculer et interpréter des probabilités dans le cas d'une loi binomiale

1. Pour calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, le protocole est le suivant :

- Si on cherche $P(X = k)$, on applique la formule :
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Si on cherche $P(X \leqslant k)$, on calcule :
$P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$
- Si on cherche $P(X \geqslant k)$, on calcule :
$P(X = k) + P(X = k + 1) + \ldots + P(X = n)$ ou $1 - P(X \leqslant k - 1)$, en fonction de ce qui est plus rapide.

2. Pour interpréter une probabilité dans le cadre d'une loi binomiale, on retient que de manière générale :

- $P(X = k)$ est la probabilité que X soit exactement égale à k.
- $P(X \leqslant k)$ est la probabilité que X soit au plus égale à k.
- $P(X \geqslant k)$ est la probabilité que X soit au moins égale à k.

Exercice résolu D

On reprend l'énoncé de l'exercice résolu **C**.
On a vu que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}8)$. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*

1 Calculer $P(X = 9)$.
2 Interpréter cette probabilité.
3 Calculer $P(X \geqslant 9)$.
4 Interpréter cette probabilité.

SOLUTION

1. $P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0{,}8^9 \times (1-0{,}8)^{10-9}$
$= 10 \times 0{,}8^9 \times 0{,}21$ car $= \binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$
$= 2 \times 0{,}8^9$
$\approx 0{,}268$

2. $P(X = 9)$ est la probabilité que le footballeur réussisse exactement 9 tirs dans la série.

3. $P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$
$= 2 \times 0{,}8^9 + \binom{10}{10} 0{,}8^{10} (1-0{,}8)^{10-10}$
$= 2 \times 0{,}8^9 + 1 \times 0{,}8^{10} \times 0{,}2^0$ car $= \binom{10}{10} = 1$
$= 2 \times 0{,}8^9 + 0{,}8^{10} \times 1$ car $0{,}2^0 = 1$
$= 2 \times 0{,}8^9 + 0{,}8^{10}$
$\approx 0{,}376$

4. $P(X \geqslant 9)$ est la probabilité que le footballeur réussisse au moins 9 tirs dans la série.

Exercices d'application directe

16 On reprend l'énoncé de l'exercice **11**.
On a vu que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(180\ ;\ 0{,}01)$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

a. Calculer $P(X = 1)$.

....

....

....

....

....

b. Interpréter cette probabilité.

....

....

c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.

....

....

....

....

....

d. Interpréter cette probabilité.

e. Calculer $P(X > 1)$.

16 On reprend l'énoncé de l'exercice **12**.
On a vu que X suit la loi binomiale $B(1000 ; 0{,}025)$.
On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

a. Calculer $P(X = 0)$.

b. Interpréter cette probabilité.

c. Calculer $P(X \geqslant 1)$.

d. Interpréter cette probabilité.

17 On reprend l'énoncé de l'exercice **13**.
On a vu que X suit la loi binomiale $B(1500 ; 0{,}97)$.
On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

a. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 499 élèves ne faisant jamais de fautes en mathématiques.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 1 499 élèves ne faisant jamais de fautes en mathématiques.

18 Dans un jeu de 52 cartes, on prélève une carte, on la remet, et on répète 8 fois cette expérience.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'as obtenus.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer $P(X = 3)$.

c. Interpréter ce résultat.

d. Calculer la probabilité d'avoir au moins un as.

e. Calculer la probabilité d'avoir au moins deux as.

19 Un candidat aux élections présidentielles possède 12 % d'intentions de vote.
On interroge 60 personnes dans la population et on suppose qu'il y a suffisamment de personnes dans le pays pour qu'on puisse assimiler cette situation à un tirage avec remise de 60 personnes.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui ont l'intention de voter pour ce candidat.
On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 7 personnes qui ont l'intention de voter pour ce candidat.

Aide : $\binom{60}{7} = 386\,206\,920$.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne qui a l'intention de voter pour ce candidat.

Exercices d'approfondissement

20 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

a_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = a_i)$	0,3	0,25	0,20	0,10	0,10	0,05

a. Donner la valeur de $P(X = 2)$.

b. Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leqslant 2\}$?

c. Calculer $P(X \leqslant 2)$.

d. Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

e. Calculer l'espérance de X.

21 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

a_1	0	1	2	3	4	5
$P(X = a_i)$		0,2	0,17	0,38	0,08	0,02

a. Compléter le tableau.

b. Donner la probabilité que X soit au moins égale à 1.

c. Calculer l'espérance de X.

22 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.
Dans chaque cas, calculer l'espérance de X.

a.

a_i	0	1	2	3
$P(X = a_i)$	0,3	0,2	0,4	0,1

b.

a_i	−2	1	7	10
$P(X = a_i)$	0,6	0,2	0,15	0,05

23 *Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*
Lors d'un jeu, on lance un dé non truqué à 6 faces. Si on fait moins de 3, on gagne 1 €, si on fait 4 ou 5, on gagne 2 € et si on fait 6, on gagne 5 €. Puis on lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si on fait pile, le gain est doublé, sinon, on perd le gain.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. On note X la variable aléatoire égale au gain final du joueur.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Donner l'espérance de X.

3. Pour pouvoir participer à ce jeu, le joueur doit payer 2 € la partie. On appelle gain algébrique le gain final du joueur auquel on a ôté la mise et on note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?

b. Donner l'espérance de Y.

24 On donne $\binom{13}{12} = 78$; $\binom{13}{13} = 286$; $\binom{13}{14} = 715$

et $\binom{13}{15} = 1287$.

Donner les valeurs de :

a. $\binom{13}{10}$; $\binom{13}{11}$; $\binom{13}{12}$ et $\binom{13}{13}$.

b. $\binom{13}{8}$; $\binom{13}{9}$; $\binom{13}{10}$ et $\binom{13}{11}$.

c. $\binom{14}{12}$; $\binom{14}{13}$ et $\binom{14}{14}$.

d. $\binom{15}{13}$ et $\binom{15}{12}$.

25 Construire le triangle de Pascal pour n allant de 1 à 10.

26 Dans chaque cas, déterminer si la situation peut être modélisée par une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

a. Dans une entreprise, on contrôle la conformité des boulons fabriqués. La notice de la machine indique que 98 % des boulons sont conformes. On prélève 15 boulons et on assimile ce tirage à un tirage avec remise, car le nombre de boulons est important.

b. Dans une classe de maternelle, 1 enfant sur 3 est enfant unique. On interroge au hasard 3 enfants dans la classe.

c. Une entreprise fabrique, en très grande quantité, des médicaments. On admet que 3 % des médicaments produits par l'entreprise n'ont pas une masse acceptable. On contrôle la masse de 70 médicaments. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélèvement de 70 médicaments à un tirage avec remise.

27 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}28$.
Calculer, en arrondissant à 10^{-4} :

a. $P(X = 0)$ **b.** $P(X = 1)$ **c.** $P(X = 2)$ **d.** $P(X \leqslant 2)$

28 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0{,}58$.
Calculer, en arrondissant à 10^{-4} :

a. $P(X = 0)$ **b.** $P(X = 1)$ **c.** $P(X = 2)$ **d.** $P(X \geqslant 2)$

29 Nino, qui joue au ping-pong, gagne 60 % de ses parties. Il joue huit matchs par semaine lors de ses entraînements.

a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties remportées par Nino une semaine donnée. On admet que X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres.

b. Calculer $P(X = 6)$. Arrondir au millième. Interpréter le résultat dans le contexte.

30 Dans une grande ville, 8 % des élèves ont eu une mention très bien au baccalauréat.
Un journaliste interviewe au hasard 4 élèves.
On suppose que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves interrogés par le journaliste ayant eu une mention très bien au baccalauréat.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

c. Calculer $P(X = 0)$. Arrondir au centième. Interpréter le résultat dans le contexte.

d. Quelle est la probabilité que le journaliste interviewe exactement un élève ayant eu une mention très bien ?

e. Quelle est la probabilité que le journaliste interviewe au moins un élève ayant eu une mention très bien ?

31 Dans un pays du moyen orient, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est de 0,15. On effectue 9 forages, et le résultat obtenu pour un forage est indépendant des autres forages.

a. Définir une variable aléatoire X suivant une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que deux des forages conduisent à une nappe de pétrole ? Arrondir à 10^{-3}.

c. Calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

32 *Les résultats seront arrondis au millième.*
Dans un camping, 25 % des usagers sont des retraités. On interroge les 6 premiers clients qui sortent du camping sur leurs habitudes de vacances. On note X la variable aléatoire égale au nombre de retraités interrogés.

a. Préciser les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

b. Calculer $P(X = 2)$.

c. Calculer $P(X \leqslant 2)$ et interpréter la valeur dans le contexte.

d. Calculer $P(X \geqslant 2)$ et interpréter la valeur dans le contexte.

33 Le budget cinéma

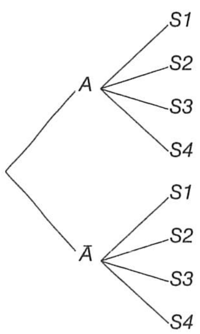
Représenter – Calculer

On arrondira les résultats à 10^{-4}.
Dans un petit cinéma, 30 % des clients ont une carte d'abonnement mensuel qui coûte 10 € et qui permet de payer la place de cinéma au prix de 6 € au lieu de 10 €. On admet que le nombre de séances auxquelles assiste un client ne dépend pas de s'il est abonné ou non. Voici les statistiques du cinéma :

Nbre de séances/mois	1	2	3	4
% de clients	65	22	11	2

On utilise les notations suivantes :
A : « le client est abonné »
$S1$: « le client assiste à une séance dans le mois »
$S2$: « le client assiste à deux séances dans le mois »
$S3$: « le client assiste à trois séances dans le mois »
$S4$: « le client assiste à quatre séances dans le mois »
On note X la variable aléatoire égale au budget mensuel dépensé pour aller au cinéma pour un client.

a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. À chaque chemin, donner la valeur de X correspondante.

c. Calculer $P(X = 30)$.

d. Quelle est la probabilité qu'un client dépense au moins 30 € par mois pour aller au cinéma ?

e. En moyenne, combien peut-on espérer qu'un client dépense chaque mois ?

34 L'escape game

Représenter – Calculer

Un *escape game* propose la grille tarifaire suivante :

Nbre de joueurs	3	4	5	6
Tarif pour 1 h 00	84	96	110	120
Tarif pour 1 h 30	96	120	140	150

Les statistiques de l'entreprise affichent que la moitié des équipes sont composées de 5 joueurs, 10 % des équipes sont composées de 3 joueurs, et il y a deux fois plus d'équipes de 6 que d'équipes de 4. Les deux tiers des équipes choisissent le jeu qui dure 1 heure.

On utilise les notations suivantes :
A : « l'équipe est composée de 3 joueurs »
B : « l'équipe est composée de 4 joueurs »
C : « l'équipe est composée de 5 joueurs »
D : « l'équipe est composée de 6 joueurs »
E : « le jeu dure 1 h »
F : « le jeu dure 1 h 30 »

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. On note X la variable aléatoire égale au prix payé par personne. Les probabilités seront arrondies au millième.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

b. Quelle est la probabilité qu'un joueur paye exactement 20 € ?

c. Calculer $P(X = 28)$.

d. Calculer $P(X \leqslant 22)$ et interpréter le résultat dans le contexte.

e. Calculer l'espérance $E(X)$. Que représente cette valeur ?

35 Les bracelets

Calculer – Communiquer

Zoe et Adam vendent des bracelets sur le marché. Ils ne fixent pas de prix, mais laissent les acheteurs leur donner la somme qu'ils souhaitent. Ils supposent que les résultats du 1er mois (indiqué dans le tableau) resteront les mêmes chaque mois. Le cout de fabrication d'un bracelet est de 2,50 €.

Prix payé	1 €	2 €	3 €	4 €	5 €	6 €
Nombres d'acheteurs	8	14	26	18	10	4

Une semaine donnée, Zoe et Adam ont vendu 9 bracelets. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bracelets sur lesquels Zoe et Adam font un bénéfice.

a. Justifier que X suit une loi binomiale.

b. Calculer la probabilité que la vente de 8 des 9 bracelets soit rentable. Arrondir au millième.

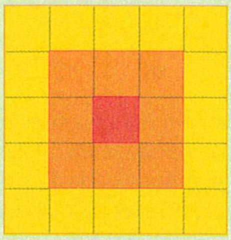
c. Calculer $P(X \geqslant 8)$. Interpréter le résultat dans le contexte.

Exercices d'approfondissement

36 Le palet breton

Représenter – Chercher

Mathéo s'entraîne à jouer au palet breton. Pour cela, il lance ses deux palets sur la planche ci-dessous.
Il crée les règles suivantes : si un palet est dans la zone jaune, il marque 1 point, s'il est dans le zone orange, il marque 3 points et s'il est dans la zone rouge, il marque 10 points. On considère que Mathéo lance tous ses palets sur la planche, et qu'ils atterrissent à un endroit au hasard sur la planche.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués par Mathéo.



a. Quelle est la probabilité qu'un palet soit dans la zone jaune ?
Dans la zone orange ? Et dans la zone rouge ?

b. Construire l'arbre de probabilité associé à la situation.

c. À l'aide de l'arbre, calculer la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance de X.
Interpréter sa valeur dans le contexte.

37 Le stock de pneus

Chercher – Calculer

Un garagiste choisit 8 pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On sait que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est de 0,07. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 8 pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

c. Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

d. Le garagiste affirme que s'il change les 4 pneus d'une voiture, alors il y a plus d'une chance sur deux pour qu'au moins un des pneus ait un défaut. Que peut-on en penser ?

38 La vaccination

Calculer – Communiquer

Lors d'une vaccination, 3 % des patients vaccinés ne sont pas protégés contre la maladie. On teste au hasard 6 patients. On note X la variable aléatoire égale au nombre de patients protégés contre la maladie.

a. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

b. Calculer $P(X = 6)$, au millième près.

c. Calculer $P(X \geqslant 5)$, au millième près.

d. Calculer $E(X)$.

e. Interpréter les résultats précédents dans le contexte.

39 La réunion de copropriété

Chercher – Communiquer

Les appartements d'un immeuble sont répartis entre 9 propriétaires différents.
Chaque année, se tient une réunion de copropriété afin de prendre des décisions concernant les parties communes de l'immeuble. On estime que 80 % des propriétaires sont présents lors de l'assemblée. Pour pouvoir appliquer les décisions prises par l'assemblée, il faut que plus de la moitié des adhérents soient présents.

Quelle est la probabilité que cela se produise lors de la prochaine réunion ?

40 Vrai ou Faux ?

Chercher – Communiquer

Dans chaque cas, dire si c'est vrai ou faux en justifiant la réponse.

a. En lançant 6 fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir au moins 3 piles est supérieure à 0,65.

b. En lançant 4 fois un dé cubique classique, la probabilité d'obtenir au moins un 6 est supérieure à 0,5.

c. En lançant 8 fois un dé cubique classique, la probabilité d'obtenir au moins deux 6 est inférieure à 0,5.

41 Offres publicitaires

Calculer – Communiquer

Un garage envoie chaque semaine des offres publicitaires à ses clients. Pour faire des économies, le gérant choisit d'envoyer ses offres à seulement 20 % de ses clients, choisis au hasard dans la base de données. On admet que cette base de données est composée d'un nombre très important de clients. La première semaine de septembre, le garage a reçu la visite de 42 clients.

Quelle est la probabilité qu'au moins 5 des 42 clients aient reçu les offres publicitaires ? Arrondir au millième.

Aide
On admet que : $\binom{42}{2} = 861$ et $\binom{42}{3} = 11\,480$ et $\binom{42}{4} = 111\,930$.

PYTHON

1 Billets gagnants

SITUATION Une association organise la vente de tickets de tombola.
Elle décide que 40 % de ses tickets sont gagnants. Kenzo achète 10 tickets.
⇨ **Combien Kenzo peut-il espérer gagner de lots ?**

A Générer le triangle de Pascal pour $n = 10$

1 Dans l'éditeur Python, noter l'instruction : `T=[[] for i in range(10)]`
Afficher T et décrire l'objet contenu dans la variable T.

2 Dans l'éditeur Python, noter l'instruction : `T[0]=[1,1]`
Afficher T : on vient de définir la première ligne du triangle de Pascal.

3 Recopier et compléter les instructions suivantes afin que le triangle de Pascal pour $n = 10$ soit contenu dans la variable T(i représente le numéro de la ligne et k représente le numéro de la colonne).

```
for i in range(1,   ):
    T[i].append(1)                            #Cette instruction définit les 1 de la première colonne.
    for k in range(1,i+1):
        T[i].append(T[   ][   ]+T[   ][ ])    #Cette instruction utilise la formule de Pascal pour...
                                              #...calculer les valeurs de la ligne i en fonction de celles de la ligne i-1.
    T[i].append(1)                            #Cette instruction définit les 1 de la diagonale.
```

B Représenter la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}4$

On note X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}4$.

1 Créer une liste L qui contient les valeurs de la variable aléatoire X.

2 Créer la liste M définie de la façon suivante : `M=[T[9][i]*0.4**i*0.6**(10-i) for i in range(11)]`
Que contient la liste M ?

3 Pour afficher le diagramme en barre de la loi binomiale, taper les instructions suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(L,M,0.8,color='g')
plt.show()
```

C Représentation graphique de l'espérance à n fixé

On donne la fonction définie sous Python.

```
def esperance(p):
    E=0
    for k in range(11):
        E=E+k*T[9][k]*p**k*(1-p)**(10-k)
    return(E)
```

1 À quoi sert cette fonction ?

2 Pour représenter l'espérance en fonction des valeurs de p, entrer les instructions suivantes :

```
plt.scatter([i*0.1 for i in range(11)],[esperance(i*0.1) for i in range(11)])
plt.show()
```

3 Que constate-t-on ?

4 Conjecturer une formule donnant esperance(p) en fonction de p.

D Représentation graphique de l'espérance à p fixé

1 Écrire une fonction esperance2(n) donnant l'espérance de la loi binomiale pour $p = 0{,}4$ avec $2 \leqslant n \leqslant 10$.

2 Représenter l'espérance en fonction des valeurs de n.

3 Que constate-t-on ?

4 Conjecturer une formule donnant esperance2(n) en fonction de n.

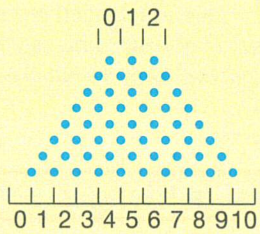
Travaux pratiques

TABLEUR 2 La planche de Galton

SITUATION On lâche un palet dans une case de départ au choix : 0,1 ou 2.
À chaque clou, le palet va à droite ou à gauche avec la même probabilité.
Le palet arrive dans une des cases numérotées de 0 à 10.

Les sommes gagnées sont données dans le tableau suivant :

Case d'arrivée	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Somme (en euros)	15	13	10	5	2	1	3	4	7	14	20



⇨ **Quelle case de départ est-il le plus judicieux de choisir ?**

A Simulation de 100 parties en partant de la case 0

On décide de modéliser la situation ainsi : si le palet va à droite, on affiche 1 ; s'il va à gauche, on affiche 0.

Avec cette modélisation, on obtient le numéro de la case d'arrivée en additionnant les valeurs de la direction prise par le palet.

1 Ouvrir le fichier.

Tableau Excel
liennathan.fr/yh59hv

2 Entrer une formule dans la cellule C4 permettant d'afficher 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
Copier cette cellule jusqu'en J4.

3 Entrer une formule dans la cellule K4 permettant d'afficher le numéro de la case d'arrivée.

4 Dans la case L4, on a entré une formule donnant la somme gagnée.
Copier les cases de C4 à L4 jusqu'à la ligne 103 afin d'obtenir les 101 simulations.

5 Dans la cellule 104, entrer une formule donnant la moyenne des gains obtenus sur 100 parties.

B Comparaison des résultats en fonction de la case de départ

1 À l'aide de simulations, recopier et compléter le tableau ci-dessous.
On pourra changer la case de départ en modifiant la valeur de la cellule B4.

Case de départ	Moyenne 1	Moyenne 2	Moyenne 3	Moyenne 4	Moyenne 5	Moyenne 6	Moyenne 7	Moyenne 8	Moyenne 9	Moyenne 10	Moyenne des moyennes
0											
1											
2											

2 Quelle case de départ semble la plus judicieuse pour gagner le plus possible sur un grand nombre de parties ?

Pour aller plus loin

Calculs théoriques avec la loi binomiale

On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le palet est allé à droite.

3 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

4 Sur la feuille 2, déterminer la loi de probabilité de X à l'aide de la fonction LOI.BINOMIALE :

a. Dans le cellule B4, entrer la formule =LOI.BINOMIALE(B3 ;8 ;0,5 ;FAUX).

b. Copier cette formule jusqu'en J4.

5 Le deuxième tableau affiche ces probabilités en fonction de la case de départ.
Entrer une formule dans la cellule M9 pouvant être copiée vers le bas jusqu'à la cellule M11.

6 Quelle case de départ faut-il choisir pour gagner le plus possible sur un grand nombre de parties ?