

Probabilités conditionnelles

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/qfgrfj



Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Exprimer la proportion $\frac{1}{3}$ sous forme de pourcentage arrondi à l'unité.
2. Calculer 10 % de $\frac{4}{5}$ sous forme décimale.

Évolution et variations

3. Quelle évolution revient à multiplier par 0,4 ?
4. Que valait 150 avant d'avoir baissé de 25 % ?
5. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 10 % puis diminué de 50 % ?
6. Le taux d'évolution nécessaire à compenser une hausse de 16 % est une baisse...
 - a. inférieure à 16 %
 - b. égale à 16 %
 - c. supérieure à 16 %

7. La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.

Le tarif du kWh d'électricité augmente chaque année de 0,01 €.

8. Classer dans l'ordre croissant $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{6}$.

9. Simplifier $F = (11^3)^4 \times \frac{1}{11^8}$.

10. Convertir 15 m² en cm².

11. Construire le tableau de signes de $-2(x - 1)^2$ sur \mathbb{R} .

12. On donne $y_A = ax_A + b$.
Exprimer b en fonction de a , x_A et y_A .

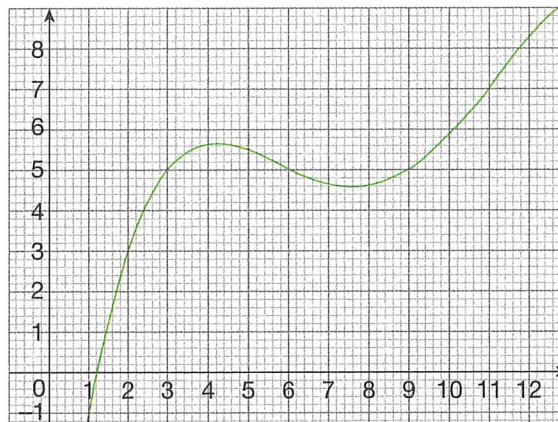
13. La concentration molaire, exprimée en mol·L⁻¹ est donnée par la formule suivante : $C = \frac{n}{V}$ où n est la quantité de matière (en mol) et V est le volume en L.
Quelle est la concentration molaire dans une solution de 50 cl où la quantité de matière est de 3 mol ?

14. Factoriser $F = 3(x - 7) - (x - 7)^2$.

15. Dériver $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 17$.

Fonctions et représentations

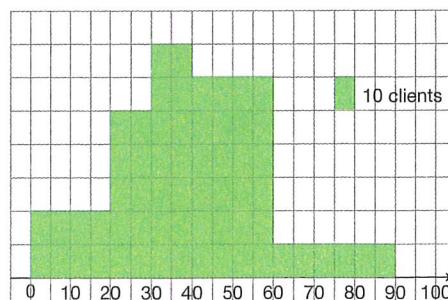
16. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



- a. Combien 5 a-t-il d'antécédents par f ?
- b. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 5$.
- c. Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$?
17. Construire le tableau de signes de $-6(x + 12)(x - \frac{1}{2})$.

Représentations graphiques de données chiffrées

18. L'histogramme ci-dessous représente les temps passés par les clients dans un supermarché, exprimés en minutes un jour donné. Quel est le nombre de clients ayant passé entre 40 et 60 minutes dans le supermarché ?



1

Calculer une probabilité conditionnelle

Pour calculer une probabilité conditionnelle $P_A(B)$ où A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$, deux cas se présentent :

- On ne dispose pas d'un arbre pondéré :
- Si on dispose de $P(A)$ et de $P(A \cap B)$, on utilise la formule $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
- Si on dispose de l'effectif n_A de A et de l'effectif $n_{A \cap B}$ de $A \cap B$, on utilise la formule $P_A(B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$.
- On dispose d'un arbre pondéré : voir méthode 2 (p. 227).

Exercice résolu A

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

- 1 Calculer $P_A(B)$.
- 2 Calculer $P_B(A)$.

SOLUTION

$$1. P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2. P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Exercice résolu B

Un pâtissier confectionne des gâteaux fourrés avec trois farces différentes : datte, noix et pistache, et deux tailles : petite ou grande.

La répartition des gâteaux est la suivante :

On prend un gâteau au hasard et on considère les événements suivants :

- D : « le gâteau est fourré à la datte ».
- N : « le gâteau est fourré à la noix ».
- P : « le gâteau est fourré à la pistache ».
- G : « le gâteau est de grande taille ».

- 1 Calculer $P_G(N)$.

- 2 Calculer $P_D(\bar{G})$.

- 3 Calculer la probabilité que le gâteau soit fourré à la datte sachant qu'il est de petite taille.

- 4 Calculer la probabilité que le gâteau soit fourré à la noix sachant qu'il est de petite taille.

Taille \ Farce	Datte	Noix	Pistache	Total
	Petite	30	27	23
Grande	9	7	4	20
Total	39	34	27	100

SOLUTION

$$1. P_G(N) = \frac{n_{G \cap N}}{n_G} = \frac{7}{20}$$

$$2. P_D(\bar{G}) = \frac{n_{D \cap \bar{G}}}{n_D} = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$$

$$3. P_{\bar{G}}(D) = \frac{n_{\bar{G} \cap D}}{n_{\bar{G}}} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

$$4. P_{\bar{G}}(N) = \frac{n_{\bar{G} \cap N}}{n_{\bar{G}}} = \frac{27}{80}$$

Exercices d'application directe

1 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,2$.

a. Calculer $P_A(B)$.

b. Calculer $P_B(A)$.

2 Soit A et B deux événements tels que $P(E) = 0,6$, $P(F) = 0,45$ et $P(E \cap F) = 0,25$.

a. Calculer $P_F(E)$.

b. Calculer $P_E(F)$.

3 Un joueur de football étudie ses statistiques sur une saison et constate que :

- la probabilité qu'il soit titulaire est de 0,8.
- la probabilité qu'il marque est de 0,32.
- la probabilité qu'il soit titulaire et qu'il marque est de 0,24.

On note T l'événement « le joueur est titulaire » et M l'événement « le joueur marque ».

a. Calculer $P_T(M)$.

b. Calculer la probabilité que le joueur soit titulaire sachant qu'il marque.

4 On considère deux événements X et Y tels que :

- la probabilité que X se produise est de 0,55.
- la probabilité que Y se produise est de 0,75.
- la probabilité que X et Y se produisent en même temps est de 0,15.

a. Calculer la probabilité de Y sachant X.

b. Calculer la probabilité de X sachant Y.

5 Dans un lycée, on constate que :

- 58 % des élèves font leur travail de manière régulière.
- 29 % des élèves obtiennent de très bons résultats.
- 22 % des élèves font leur travail de manière régulière et obtiennent de très bons résultats.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et on considère les événements suivants :

- R : « l'élève choisi travaille de manière régulière ».
- T : « l'élève choisi obtient de très bons résultats ».

a. Calculer la probabilité que l'élève choisi obtienne de très bons résultats sachant qu'il travaille de manière régulière.

$$P_R(T) = \dots$$

b. Calculer la probabilité que l'élève choisi travaille de manière régulière sachant qu'il obtient de très bons résultats.

6 Un commercial dans le secteur automobile récapitule ses ventes de l'année dans le tableau suivant :

Type Moteur	Citadine	Berline	SUV	Monospace	Total
Essence	33	28		2	66
Diesel	17	21	4	5	
Total	44				

On choisit une voiture au hasard et on considère les événements suivants :

- C : « la voiture choisie est une citadine ».
- B : « la voiture choisie est une berline ».
- S : « la voiture choisie est un SUV ».
- M : « la voiture choisie est un monospace ».
- E : « la voiture choisie a un moteur essence ».

a. Compléter le tableau précédent.

b. Calculer $P_E(C)$.

c. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit un SUV sachant qu'elle a un moteur diesel.

d. Calculer $P_B(E)$.

e. Calculer la probabilité que la voiture choisie ait un moteur diesel sachant que c'est un monospace.

f. Calculer $P_E(S)$.

g. Calculer la probabilité que la voiture choisie ait un moteur essence sachant que c'est une citadine.

7 Un restaurant propose trois menus différents : *Fruits de mer*, *Montagnard* et *Terroir*.

Cette semaine, les choix des clients ont été les suivants :

Menu Service \	Fruits de mer	Montagnard	Terroir	Total
Midi	18		25	58
Soir		19	28	
Total	44			

On choisit un client au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « le client a choisi un menu *Fruits de mer* ».
- M : « le client a choisi un menu *Montagnard* ».
- T : « le client a choisi un menu *Terroir* ».
- S : « le client est venu au service du soir ».

a. Compléter le tableau précédent.

b. Calculer $P_S(T)$.

c. Calculer $P_F(S)$.

d. Calculer $P_{\bar{S}}(M)$.

e. Calculer la probabilité que le client ait choisi un menu *Montagnard* sachant qu'il est venu au service du soir.

f. Calculer la probabilité que le client soit venu au service du midi sachant qu'il a choisi un menu *Terroir*.

8 Une ville touristique propose la répartition suivante pour les appartements de location et les hôtels :

Logement \ Note	1	2	3	4	5
Hôtel	3	12	46	33	21
Appartement de location	7	6	28	41	30

On choisit un logement au hasard.

a. Calculer la probabilité que le logement ait la note 4 sachant que c'est un hôtel.

b. Calculer la probabilité que le logement ait la note maximale sachant que c'est un appartement de location.

c. Calculer la probabilité que le logement soit un hôtel sachant qu'il a obtenu la note 4.

d. Calculer la probabilité que le logement soit un hôtel sachant qu'il a obtenu la note 1.

e. Calculer la probabilité que le logement soit un appartement sachant qu'il a obtenu la note 5.

2 Construire et utiliser un arbre de probabilités

1. Pour construire un arbre de probabilités, le protocole est le suivant :

- on représente la structure générale de l'arbre avec les branches et les événements.
Pour trouver dans quel ordre placer les événements, on regarde attentivement quels sont ceux qui conditionnent les autres.

- on indique les probabilités données par l'énoncé sur les branches correspondantes.
- on complète si nécessaire les probabilités manquantes grâce à la règle des nœuds (la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut 1).

2. Pour déterminer une probabilité conditionnelle, on la lit directement sur l'arbre si le conditionnement se fait par un événement du premier niveau de l'arbre. Sinon, on est ramené à la méthode 1 (p. 224).

3. Pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements, on multiplie les probabilités portées par les branches du chemin qui représente cette intersection d'événements.

Exercice résolu C

Un paquet de nougats en contient 40 avec deux parfums différents : nature ou châtaigne, et deux types : dur ou mou.

De plus :

- 10 nougats sont au parfum châtaigne et parmi eux, 6 sont durs.
- parmi les nougats au parfum nature, 24 sont durs.

On choisit au hasard un nougat dans le paquet et on considère les événements suivants :

- C : « le nougat choisi est au parfum châtaigne ».
- D : « le nougat choisi est dur ».

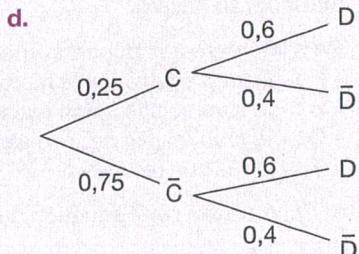
- Calculer $P(C)$.
- Calculer $P_C(D)$.
- Calculer $P_{\bar{C}}(D)$.
- Construire un arbre de probabilités représentant cette situation.
- Calculer $P(C \cap D)$.
- Calculer $P(\bar{C} \cap D)$.
- Calculer la probabilité que le nougat choisi soit au parfum châtaigne et mou.
- Calculer la probabilité que le nougat choisi soit au parfum nature et mou.

SOLUTION

a. $P(C) = \frac{10}{40} = 0,25$

b. $P_C(D) = \frac{6}{10} = 0,6$

c. $P_{\bar{C}}(D) = \frac{24}{30} = 0,8$



e. $P(C \cap D) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$

f. $P(\bar{C} \cap D) = 0,75 \times 0,8 = 0,6$

g. La probabilité que le nougat choisi soit au parfum châtaigne et mou est :
 $P(C \cap \bar{D}) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$.

h. La probabilité que le nougat choisi soit au parfum nature et mou est :
 $P(\bar{C} \cap \bar{D}) = 0,75 \times 0,2 = 0,15$.

Exercices d'application directe

- 9** Une usine fabrique des chargeurs de batterie pour téléphones portables.

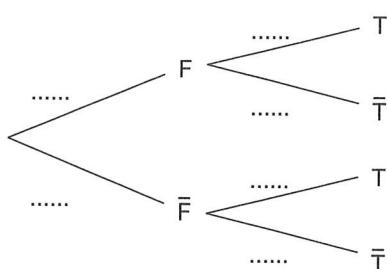
96 % des chargeurs fabriqués fonctionnent et un test de fiabilité est effectué sur chaque chargeur.

Si un chargeur est défectueux, la probabilité que le test le rejette est de 0,97. Toutefois, si un chargeur fonctionne, le test peut tout de même le rejeter avec une probabilité de 0,05.

On choisit un chargeur au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « le chargeur fonctionne ».
- T : « le chargeur est accepté par le test ».

- a. Compléter l'arbre de probabilités suivant pour qu'il corresponde à cette situation.



- b. Donner $P_F(T)$ et $P_{\bar{F}}(T)$.

- c. Calculer la probabilité qu'un chargeur ne fonctionne pas et que le chargeur soit accepté par le test.

- d. Calculer $P(F \cap T)$.

- e. Calculer $P(F \cap \bar{T})$.

- 10** Un vendeur de jeux électroniques constate qu'en moyenne :

- sur 20 clients se présentant dans son magasin, un seul achète une console de jeux.
- parmi ceux qui achètent une console de jeux, 92 % achètent également un jeu.
- parmi ceux qui n'achètent pas de console de jeux, 17 % achètent tout de même un jeu.

On interroge un client au hasard à la sortie de ce magasin et on considère les événements suivants :

- C : « il a acheté une console ».
- J : « il a acheté un jeu ».

- a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

- b. Donner les probabilités $P_C(J)$ et $P_C(\bar{J})$.

- c. Calculer la probabilité que le client ait acheté une console de jeux et un jeu.

- d. Décrire par une phrase l'événement $\bar{C} \cap J$.

- e. Calculer $P(\bar{C} \cap J)$.

- 11** La probabilité qu'une maison résiste au souffle du grand méchant loup est de 0,15 si elle est en paille, 0,44 si elle est en bois et 0,97 si elle est en briques.

Les trois petits cochons ont chacun construit une maison : la première en paille, la deuxième en bois et la troisième en briques. Le loup arrive et souffle sur une de ces trois maisons, au hasard.

On s'intéresse aux quatre événements suivants :

- P : « le loup souffle sur la maison en paille ».
- B : « le loup souffle sur la maison en bois ».
- Q : « le loup souffle sur la maison en briques ».
- R : « la maison résiste ».

- a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Donner les probabilités conditionnelles $P_B(R)$, $P_Q(R)$ et $P_B(\bar{R})$.

c. Décrire par une phrase l'événement $B \cap R$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $B \cap R$.

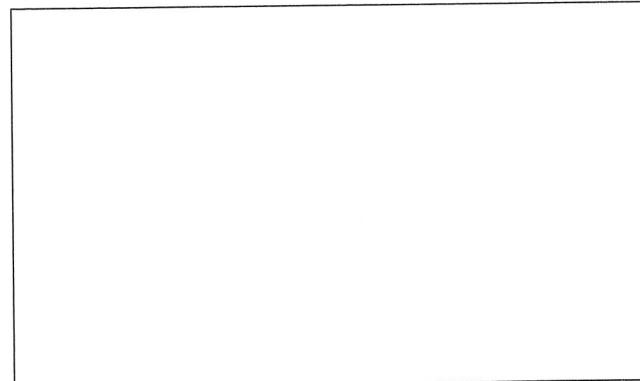
e. Décrire par une phrase l'événement $Q \cap R$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $Q \cap R$.

12 Une urne contient 6 billes rouges et 4 billes bleues. On prend une bille au hasard dans l'urne puis, sans remise, on en prend une seconde et on considère les événements suivants :

- U : « la première bille choisie est rouge ».
- D : « la seconde bille choisie est rouge ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.



b. Donner les probabilités conditionnelles $P_U(D)$ et $P_{\bar{U}}(\bar{D})$.

c. Décrire par une phrase l'événement $U \cap D$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $U \cap D$.

e. Décrire par une phrase l'événement $\bar{U} \cap \bar{D}$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{U} \cap \bar{D}$.

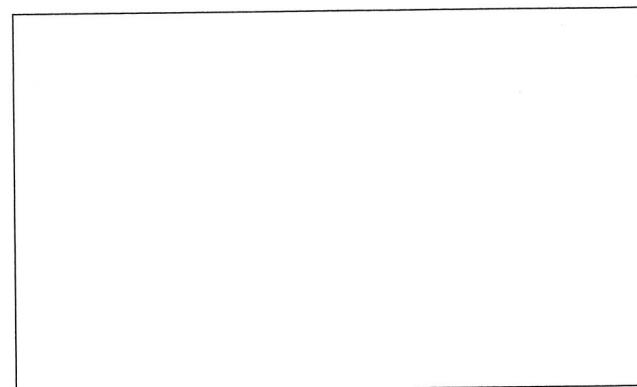
13 Dans un lycée, il y a 51 % de filles et 49 % de garçons, et pour le cours d'EPS du premier trimestre, chaque élève doit choisir un sport parmi escalade, athlétisme et handball.

Parmi les filles, 40 % choisissent l'escalade, 35 % choisissent l'athlétisme et le reste choisit le handball. Parmi les garçons, 34 % choisissent l'escalade, 36 % choisissent l'athlétisme et le reste choisit le handball.

On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « l'élève choisi est une fille ».
- E : « l'élève a choisi l'escalade ».
- A : « l'élève choisit l'athlétisme ».
- H : « l'élève choisit le handball ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.



b. Donner les probabilités conditionnelles $P_F(A)$, $P_F(H)$ et $P_F(E)$.

c. Décrire par une phrase l'événement $F \cap E$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $F \cap E$.

e. Décrire par une phrase l'événement $\bar{F} \cap E$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap E$.

g. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap A$.

h. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap H$.

3 Appliquer la formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exercice résolu ⑩

On reprend l'énoncé de l'exercice résolu C (méthode 2).

- 1 Calculer la probabilité que le nougat soit dur.
- 2 Calculer de deux manières différentes la probabilité que le nougat soit mou.

SOLUTION

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D) = 0,25 \times 0,6 + 0,75 \times 0,8 = 0,75$$

2. Méthode 1 : d'après la formule des probabilités totales,
 $P(\bar{D}) = P(C \cap \bar{D}) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) = 0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,2 = 0,25$

Méthode 2 : $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,75 = 0,25$

Exercices d'application directe

14 On reprend l'énoncé de l'exercice 9.

- a. Calculer $P(T)$.

b. Calculer de deux manières différentes la probabilité que le chargeur ne soit pas accepté par le test.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

15 On reprend l'énoncé de l'exercice 10.

- a. Calculer la probabilité que le client n'ait pas acheté de jeu.

b. Calculer $P(J)$ de deux manières différentes.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

16 On reprend l'énoncé de l'exercice 11.

- a. Calculer la probabilité que la maison résiste.

b. Calculer de deux manières différentes la probabilité que la maison ne résiste pas.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

17 On reprend l'énoncé de l'exercice 12.

- a. Calculer $P(D)$.

Cours et méthodes

b. Calculer $P(\bar{D})$ de deux manières différentes.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

18 On reprend l'énoncé de l'exercice **13**.

a. Calculer la probabilité que l'élève choisisse l'athlétisme.

b. Calculer la probabilité que l'élève choisisse l'escalade.

c. Calculer de deux manières différentes la probabilité que l'élève choisisse le handball.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

19 Il était une fois un pays merveilleux où 97 % des élèves apprenaient leurs leçons chaque jour. Parmi ces élèves, 99 % obtenaient d'excellents résultats et parmi ceux qui n'apprenaient pas leurs leçons chaque jour, seulement 16 % obtenaient d'excellents résultats.

On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- R : l'élève choisi apprend ses leçons chaque jour.
- E : l'élève choisi obtient d'excellents résultats.

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité que l'élève apprend ses leçons chaque jour et obtient d'excellents résultats.

c. Calculer la probabilité que l'élève obtienne d'excellents résultats.

d. L'élève obtient d'excellents résultats. Quelle est la probabilité qu'il n'apprenne pas ses leçons régulièrement?

20 Un magasin de vêtements propose des pantalons en coton et en lin avec trois coupes différentes : serrée, droite ou large.

Dans ce magasin, 74 % des pantalons sont en coton et parmi ceux-ci, 26 % sont serrés, 44 % sont droits et les autres sont larges.

Parmi les pantalons en lin, 8 % sont serrés, 38 % sont droits et les autres sont larges.

On choisit un pantalon au hasard et on considère les événements suivants :

- C : le pantalon choisi est en coton.
- S : la coupe est serrée.
- D : la coupe est droite.
- L : la coupe est large.

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité que la coupe soit droite.

c. La coupe est droite. Quelle est la probabilité que ce soit un pantalon en coton ?

4

Étudier l'indépendance de deux événements

Pour étudier l'indépendance, on utilise la définition ou la propriété suivantes.

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Soit A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Exercice résolu D

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

- 1 $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,15$.
- 2 $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,3$.
- 3 $P(A) = 0,74$, $P(B) = 0,55$ et $P_A(B) = 0,55$.
- 4 $P(A) = 0,74$, $P(B) = 0,55$ et $P_B(A) = 0,55$.

SOLUTION

1. $P(A \cap B) = 0,15$

$$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,25 = 0,15 = P(A \cap B)$$

Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

D'où : A et B sont indépendants.

2. $P(A \cap B) = 0,3$

$$P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,5 = 0,4 \neq P(A \cap B)$$

Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

D'où : A et B ne sont pas indépendants.

3. $P_A(B) = 0,55 = P(B)$

Donc A et B sont indépendants.

4. $P_B(A) = 0,55 \neq P(A)$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

Exercices d'application directe

- 21** Dans chacun des cas suivants, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

a. $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,15$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

b. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,18$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

c. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ et $P_A(B) = 0,18$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

d. $P(A) = 0,26$, $P(B) = 0,32$ et $P_B(A) = 0,26$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Cours et méthodes

22 On reprend l'énoncé de l'exercice résolu **C** (méthode 2).

Les événements C et D sont-ils indépendants ?

$$P(C \cap D) = \dots$$

$$P(C) \times P(D) = \dots$$

Donc \dots

D'où : \dots

23 On reprend l'énoncé des exercices **9** et **14**.

Les événements F et T sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

24 On reprend l'énoncé des exercices **10** et **15**.

Les événements C et J sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

25 On reprend l'énoncé des exercices **11** et **16**.

a. Les événements B et R sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

b. Les événements Q et \bar{R} sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

26 On reprend l'énoncé des exercices **12** et **17**.

a. Les événements U et D sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

b. \bar{U} et D sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

27 On reprend l'énoncé des exercices **13** et **18**.

a. Les événements F et E sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

b. Les événements F et H sont-ils indépendants ?

\dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots
 \dots

Exercices d'approfondissement

28 Dans un lycée on constate que :

- 83 % des élèves font du sport régulièrement.
- 47 % des élèves lisent régulièrement.
- 21 % des élèves font les deux.

On choisit un élève au hasard dans cet établissement.

- Sachant que c'est un élève qui fait du sport régulièrement, calculer la probabilité qu'il lise aussi régulièrement.
- Sachant que c'est un élève qui lit régulièrement, calculer la probabilité qu'il fasse aussi du sport régulièrement.

29 Une entreprise effectue un sondage auprès de ses employés à propos de leurs temps de parcours pour se rendre sur leur lieu de travail ainsi que leurs moyens de locomotion. Les résultats, en nombre d'employés, sont résumés dans le tableau suivant :

	À pieds	En voiture	En transport en commun	Autre
$\leq 30 \text{ min.}$	12	6	15	3
$> 30 \text{ min.}$	1	6	5	0

On choisit un employé au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

V : « L'employé vient en voiture. »

M : « L'employé met moins de 30 min. »

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

- Calculer les probabilités $p(V)$ et $p(M)$.
- Calculer $p(V \cap M)$. Que représente cette probabilité ?
- Calculer $p_V(M)$. Que représente cette probabilité ?
- Calculer $p_M(V)$. Que représente cette probabilité ?

30 On considère deux événements B et J tels que $p(B) = 0,5$, $p(J) = 0,75$ et $p(J \cap B) = 0,3$.

Calculer $p_J(B)$ et $p_B(J)$.

31 Adam fait l'inventaire de ses tee-shirts et résume le tout dans un tableau :

	Manches courtes	Manches longues
Unis	4	2
À motifs	3	1

- Recopier le tableau précédent en ajoutant une ligne et une colonne « Total » et en les complétant.

- Adam prend un tee-shirt au hasard. On considère les événements suivants :

U : « Adam a pris un tee-shirt uni. »

C : « Adam a pris un tee-shirt à manches courtes. »

Donner les probabilités $p(U)$ et $p(C)$ et $p_U(C)$.

- Exprimer l'événement $U \cap C$ par une phrase et calculer sa probabilité.

- Exprimer l'événement $U \cap C$ par une phrase et calculer sa probabilité.

32 Quand Thomas prend une paire de chaussettes au hasard dans son tiroir, il constate que :

- il a deux chances sur quinze que ce soit une paire de chaussettes blanches trouées.
- il a deux chances sur cinq que ce soit une paire de chaussettes blanches.
- il a trois chances sur dix que ce soit une paire de chaussettes trouées.

- Il prend une paire de chaussettes blanches. Calculer la probabilité qu'elles soient trouées.

- Il prend une paire de chaussettes trouées. Calculer la probabilité qu'elles soient blanches.

33 Aujourd'hui :

- la probabilité qu'il y ait du soleil est de 0,8.
- la probabilité qu'il fasse chaud est de 0,6.
- la probabilité qu'il y ait du soleil et qu'il fasse chaud est de 0,5.

On note S l'événement « il y a du soleil » et C l'événement « il fait chaud ».

- Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?
- Calculer les probabilités $p_C(S)$ et $p_S(C)$.

34 TABLEUR  A, B, C et E étant des événements, on utilise un tableur pour calculer des probabilités conditionnelles.

	A	B	C
1	$p(E) =$	0,7	
2			
3	$p(A \cap E)$	$p(B \cap E)$	$p(C \cap E)$
4	0,21	0,37	0,12
5			
6	$p_E(A)$	$p_E(B)$	$p_E(C)$
7			

La cellule B1 contient $p(E)$ tandis que les cellules A4, B4 et C4 contiennent respectivement les probabilités des événements $A \cap E$, $B \cap E$ et $C \cap E$.

On voudrait que les cellules A7, B7 et C7 contiennent respectivement les probabilités $p_E(A)$, $p_E(B)$ et $p_E(C)$.

Quelle formule doit-on saisir dans la cellule A7 qui permette, une fois étirée vers la droite, de compléter la ligne ?

35 A et B sont deux événements.

- On sait que $p(A) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,3$. Calculer $p_A(B)$.
- On sait que $p(A) = 0,7$ et $p_A(B) = 0,2$. Calculer $p(A \cap B)$.
- On sait que $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $p_A(B) = \frac{3}{4}$. Calculer $p(A)$.

36 A et B sont deux événements tels que :

$$p(A) = 0,35, p_B(A) = 0,4 \text{ et } p_A(B) = 0,24$$

- Calculer $p(A \cap B)$.

- En déduire $p(B)$.

Exercices d'approfondissement

37 Jérémy dort huit heures par jour dont une heure avec ses écouteurs sur les oreilles. En fait, il a ses écouteurs sur les oreilles pendant quatre heures par journée de 24 heures.

On s'intéresse à Jérémy à un moment pris au hasard. On note D l'événement « Jérémy dort » et E l'événement « Jérémy a ses écouteurs sur les oreilles ».

a. Calculer $p(D \cap E)$, $p(\bar{D} \cap E)$, $p_{\bar{D}}(E)$ et $p_E(\bar{D})$.

b. Que représente l'événement $\bar{D} \cap \bar{E}$? Calculer sa probabilité.

38 Dans un magasin, on constate que :

- 24 % des piles sont des piles AAA.
- 10 % des piles AAA sont des piles rechargeables.
- 32 % des piles rechargeables sont des piles AAA.

On prend une pile au hasard dans ce magasin et on s'intéresse aux événements :

A : « C'est une pile AAA. »

R : « C'est une pile rechargeable. »

a. Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?

b. Calculer $p(A \cap R)$.

c. En déduire $p(R)$. Traduire ce résultat par une phrase.

39 On considère deux événements X et Y .

On sait que $p(X) = 0,89$, $p(Y) = 0,66$ et $p_X(Y) = 0,51$.

a. Calculer $p(X \cap Y)$.

b. En déduire $p_Y(X)$. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

40 7 % des céréales d'un rayon sont sans gluten. 14 % des céréales de ce rayon sont bio. 94 % des céréales sans gluten sont bio.

On prend un paquet de céréales au hasard dans ce rayon et on note :

G l'événement « elles sont sans gluten »,

B l'événement « elles sont bio ».

a. Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?

b. Calculer $p(G \cap B)$.

c. Si je prends un paquet de céréales bio dans ce rayon, quelle est la probabilité qu'elles soient sans gluten ?

41 Des grilles-pains proviennent de trois usines différentes, A, B et C. Un quart des grilles-pains proviennent de l'usine A, un tiers de l'usine B et le reste de l'usine C.

La probabilité qu'un grille-pain soit défectueux dépend de l'usine de fabrication. 5 % des grilles-pains provenant de l'usine A sont défectueux, contre 2 % pour l'usine B et 3 % pour l'usine C.

On prend un grille-pain au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

A : « Le grille-pain provient de l'usine A. »

B : « Le grille-pain provient de l'usine B. »

C : « Le grille-pain provient de l'usine C. »

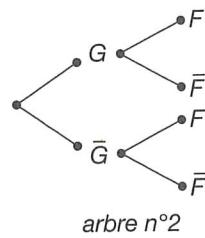
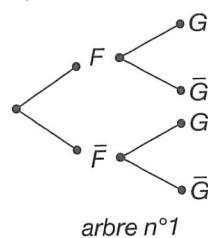
D : « Le grille-pain est défectueux. »

a. Calculer $p(C)$.

b. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

c. Calculer la probabilité qu'un grille-pain pris au hasard provienne de l'usine C et soit en état de fonctionner.

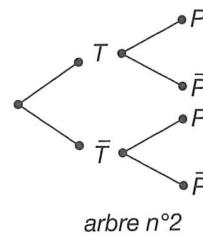
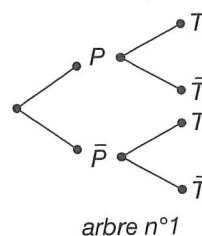
42 L'énoncé d'un exercice donne les valeurs de $p(G \cap F)$ et de $p_G(F)$. Quel arbre faut-il choisir pour représenter la situation ?



43 On considère l'énoncé suivant :

Comme tous les matins, Monsieur Indécis se demande comment il va s'habiller. Il commence par lancer une pièce de monnaie pour savoir quel placard il va ouvrir puis il lance un dé pour connaître le numéro du tiroir contenant ses vêtements pour la journée.

En notant P l'événement « il ouvre le placard de gauche » et T l'événement « il ouvre le tiroir du haut », lequel de ces deux arbres est le plus adapté à cet énoncé ?



44 Deux événements L et M sont tels que :

$$p(L) = \frac{5}{6}, p_L(M) = \frac{3}{5} \text{ et } p_{\bar{L}}(\bar{M}) = \frac{1}{10}.$$

a. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation et y placer ces trois probabilités.

b. Compléter cet arbre en indiquant les probabilités sur chaque branche restante.

c. Calculer $p(L \cap M)$.

45 Sur l'étalage d'un fromager, il y a 70 % de fromages de vache et le reste de fromages de chèvre. 82 % des fromages de vache sont à pâte dure contre 26 % des fromages de chèvre.

On prend un fromage au hasard sur cet étalage et on considère les événements :

V : « C'est un fromage de vache. »

C : « C'est un fromage de chèvre. »

D : « C'est un fromage à pâte dure. »

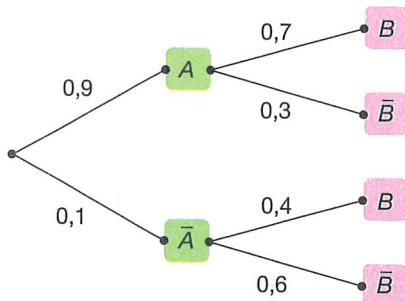
a. Construire un arbre de probabilités correspondant à la situation décrite dans cet énoncé.

b. Calculer la probabilité que ce soit un fromage de chèvre à pâte dure.

46 Demain, il y a une chance sur dix qu'il pleuve. S'il pleut, il y a six chances sur sept qu'Augustin prenne son parapluie et s'il ne pleut pas il y a tout de même une chance sur cinq qu'il le prenne.

- Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
- Calculer la probabilité qu'Augustin sorte avec son parapluie sans avoir à l'utiliser.

47 Une situation est représentée par l'arbre suivant :



- Lire sur cet arbre les probabilités suivantes : $p(A)$, $p(\bar{A})$, $p_A(B)$ et $p_{\bar{A}}(B)$.
- En déduire les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$.
- En déduire $p(B)$.

48 Une urne contient trois boules portant respectivement les numéros 2, 4 et 6. Un jeu consiste à prendre une boule au hasard parmi les trois puis à lancer un dé classique équilibré. On gagne si le numéro indiqué sur le dé est supérieur ou égal à celui inscrit sur la boule. Lors d'une partie, on considère les événements suivants : D : « La boule porte le numéro 2. » Q : « La boule porte le numéro 4. » S : « La boule porte le numéro 6. » G : « Le joueur a gagné. »

- Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne.

49 Lors d'un match de football, l'avant-centre a le ballon et doit le passer à un de ses ailier. Il y a deux chances sur trois qu'il le passe à celui de gauche contre une chance sur trois pour celui de droite. L'ailier de gauche a une chance sur cinq de mettre un but et celui de droite a une chance sur quatre. On note G l'événement « il fait la passe à l'ailier de gauche », D l'événement « il fait la passe à l'ailier de droite » et B l'événement « son équipe marque un but ».

- Représenter cette situation par un arbre pondéré.
- Calculer $p(G \cap B)$ et $p(D \cap B)$.
- Quelle est la probabilité qu'un but soit marqué ?

50 Gabriel joue à un jeu vidéo dans lequel il se fait attaquer trois fois sur quatre par des zombies le reste du temps par des squelettes. Il arrive à battre 98 % des zombies et 96 % des squelettes.

Quelle est probabilité qu'il batte le prochain monstre qui va l'attaquer ?

51 Un jardinier plante 60 graines d'azalées, 30 de bégonias, 70 de capucines et 40 de dahlias.

On sait que :

- 70 % des azalées vont fleurir.
- 80 % des bégonias vont fleurir.
- 90 % des capucines vont fleurir.
- Tous les dahlias vont fleurir.

Quelle est la probabilité qu'une graine prise au hasard fleurisse ?

52 A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,37$, $p_A(B) = 0,62$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0,42$.

- Représenter cette situation par un arbre pondéré.
- Calculer $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$.
- En déduire $p(B)$.

53 Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 53 % d'entre eux possèdent un ordinateur et que parmi ceux-ci, 64 % possèdent un vélo. L'étude montre aussi que 36 % des élèves de ce lycée ne possède pas de vélo.

On choisit un élève au hasard dans l'établissement et on note O l'événement « l'élève possède un ordinateur » et V l'événement « l'élève possède un vélo ».

Les événements O et V sont-ils indépendants ?

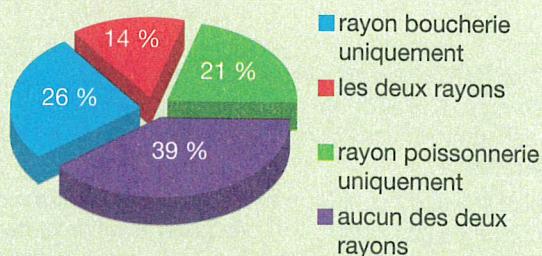
54 Compléter le tableau ci-dessous où les probabilités de deux événements indépendants A et B ont été indiquées.

	B	\bar{B}	Total
A			0,15
\bar{A}			
Total	0,8		

55 Faire les courses

Chercher – Calculer

Le gérant d'un supermarché effectue une étude sur la proportion de clients achetant dans les rayons *boucherie* et *poissonnerie*. Il résume cette étude dans le diagramme suivant :



On choisit un client au hasard à la sortie de ce supermarché et on considère les événements suivants : B : « Le client a acheté quelque chose au rayon *boucherie*. »

P : « Le client a acheté quelque chose au rayon *poissonnerie*. »

- D'après le diagramme, que vaut $p(B \cap P)$?

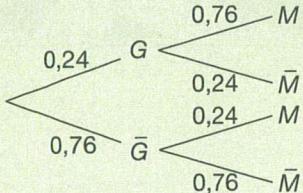
Exercices d'approfondissement

- Quel pourcentage des clients du supermarché achète au rayon boucherie ? En déduire $p(B)$.
- En procédant de la même façon, calculer $p(P)$.
- Sachant que le client a effectué un achat au rayon boucherie, calculer la probabilité qu'il ait également effectué un achat au rayon poissonnerie.
- Les événements B et P sont-ils indépendants ?

56 Événements indépendants

Chercher – Raisonneur

Une situation est représentée par l'arbre suivant :



Les événements G et M sont-ils indépendants ?

57 Une vie de rat

Représenter – Calculer

Un rat fouille dans une poubelle. On s'intéresse aux événements suivants :

R : « C'est la poubelle d'un restaurant. »

N : « Il y a de la nourriture. »

On sait que :

$$p(R) = 0,16, p_R(N) = 0,97 \text{ et } p_{\bar{R}}(N) = 0,36.$$

- Traduire les probabilités précédentes par des phrases.
- Construire un arbre de probabilités correspondant à cet énoncé.
- Calculer la probabilité que le rat trouve de la nourriture dans cette poubelle.
- Sachant que le rat a trouvé de la nourriture, calculer la probabilité que ce soit dans la poubelle d'un restaurant. On arrondira le résultat à 0,01 près.

58 Avec et sans remise

Modéliser – Représenter

Une urne contient quatre boules bleues et six boules rouges. On tire successivement deux boules de l'urne. On note B_1 l'événement « la première boule est bleue » et B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

- On suppose que ce tirage est effectué avec remise, c'est-à-dire que l'on remet la première boule dans l'urne après avoir noté sa couleur.
- Expliquer, sans calcul, pourquoi les événements B_1 et B_2 sont indépendants.
- Que vaut $p_{B_1}(B_2)$?
- Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité de tirer deux boules bleues.
- On suppose que ce tirage est maintenant effectué sans remise, c'est-à-dire que l'on tire une première boule de l'urne, puis une deuxième sans avoir remis la première.
- Expliquer, sans calcul, pourquoi les événements B_1 et B_2 ne sont cette fois pas indépendants.

- Que vaut $p_{B_1}(B_2)$?

- Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité de tirer deux boules bleues.

59 Roméo et Juliette

Modéliser – Représenter

Si Roméo envoie un SMS à Juliette un jour, alors la probabilité qu'il lui en envoie un autre le lendemain est de 0,95. S'il ne lui en a pas envoyé, la probabilité qu'il lui en envoie tout de même un est de 0,65.

On note :

- S_0 l'événement « Roméo envoie un SMS à Juliette aujourd'hui »
- S_1 , l'événement « Roméo enverra un SMS à Juliette demain »

On note p la probabilité que Roméo envoie un message à Juliette aujourd'hui.

- Donner $p(\bar{S}_0)$ en fonction de p .
- En utilisant l'énoncé, donner $p_{S_0}(S_1)$ et $p_{\bar{S}_0}(S_1)$.
- Construire un arbre de probabilités représentant la situation pour aujourd'hui et demain.
- On note S_2 l'événement « Roméo enverra un SMS à Juliette après-demain ». Compléter l'arbre précédent en lui ajoutant les événements S_2 et \bar{S}_2 .

60 Le cou de la vache

Chercher – Modéliser

Marguerite est une vache qui adore regarder les trains. Hélas, si c'est un TGV qui passe, il y a une chance sur six qu'elle se retrouve avec un torticolis.

Dans le cas contraire, elle peut tout de même se retrouver avec le cou coincé une fois sur vingt.

Marguerite sait également que 17 % des trains qui passent devant elle sont des TGV.

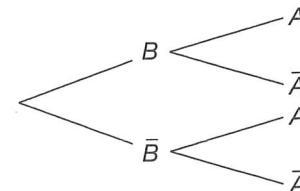
- Construire un arbre adapté à la situation après avoir judicieusement défini les événements utilisés.
- Quelle est la probabilité que le prochain train qui passe provoque un torticolis chez Marguerite ?

61 Retourner un arbre

Représenter – Calculer

A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0,75, p_A(B) = 0,21$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0,37$.

- Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.
- Calculer $p(A \cap B)$.
- Calculer $p(B)$.
- Calculer $p_B(A)$.
- Calculer $p_{\bar{B}}(A)$.
- Utiliser les résultats précédents pour inscrire les probabilités de chaque branche de l'arbre suivant :



1

Des grilles plus ou moins difficiles



SITUATION

Tom fait des parties de mots croisés dans un magazine. Ces grilles de mots croisés ont deux niveaux différents :

débutant et confirmé.

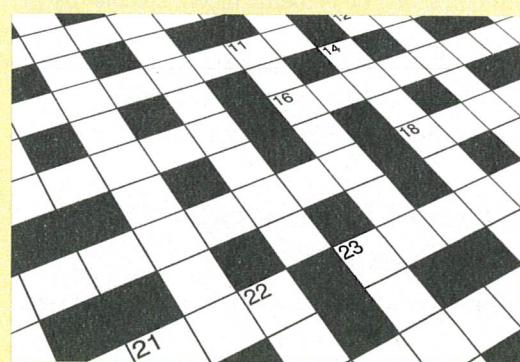
S'il réussit à compléter une grille au niveau débutant, il passe au niveau confirmé pour la grille suivante, sinon il en refait une au niveau débutant.

S'il réussit à compléter une grille au niveau confirmé, il reste au niveau confirmé, sinon il repasse au niveau débutant.

Tom réussit les trois quarts des grilles au niveau débutant et la moitié au niveau confirmé.

Tom commence par faire une grille de niveau débutant.

⇒ Comment modéliser l'évolution du niveau des grilles de Tom ?



A Une simulation avec Python

On aimerait évaluer la proportion de grilles de niveau confirmé auxquelles jouerait Tom s'il essayait de remplir 100 000 grilles de mots croisés en suivant ce protocole.

- 1 Donner un ordre de grandeur du temps que mettrait Tom s'il devait réellement essayer de remplir 100 000 grilles de mots croisés, en imaginant qu'il mette environ 6 minutes par grille.
- 2 Compléter la fonction ci-contre, écrite en Python, afin qu'elle simule le niveau de la grille suivante, si on lui indique en entrée le niveau de la grille que Tom est en train de faire.

Aide

La fonction `random` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre au hasard entre 0 et 1. Il y a donc trois chances sur quatre que la condition « `random() < 0.75` » soit vraie.

```
from random import random

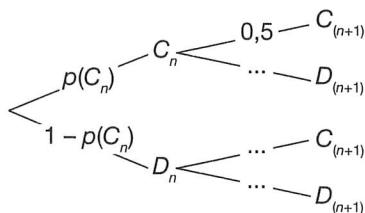
def grille_suivante(niveau):
    if niveau == "débutant":
        if random() < 0.75 :
            return("confirmé")
        else:
            return("débutant")
    else:
        if random() < ..... :
            return(".....")
        else:
            .......
```

B Des calculs de probabilités avec un tableau

On note C_n l'événement « la n ième grille jouée est au niveau confirmé » et D_n l'événement « la n ième grille jouée est au niveau débutant ».

- 1 D'après l'énoncé, pourquoi a-t-on $p(C_1) = 0$?
- 2 Compléter l'arbre ci-contre en indiquant les probabilités sur les branches restantes.
- 3 Utiliser cet arbre pour démontrer que :

$$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times 0,75 + (1 - p(C_n)) \times 0,5$$



On désire utiliser un tableau pour calculer quelques valeurs de $p(C_n)$ sur le modèle ci-contre.

- 4 En utilisant le résultat de la question 3, quelle formule faut-il saisir dans la cellule B3 ?
- 5 Après avoir recopié cette formule vers le bas, que constate-t-on assez rapidement ?
- 6 Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

A	B
Grille	$p(C_n)$
1	0
2	0,75
3	0,5625
4	
⋮	⋮