

Probabilités conditionnelles

Avant de démarrer

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/qfgrfj



Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Exprimer la proportion $\frac{1}{3}$ sous forme de pourcentage arrondi à l'unité.
2. Calculer 10 % de $\frac{4}{5}$ sous forme décimale.

Évolution et variations

3. Quelle évolution revient à multiplier par 0,4 ?
4. Que valait 150 avant d'avoir baissé de 25 % ?
5. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 10 % puis diminué de 50 % ?
6. Le taux d'évolution nécessaire à compenser une hausse de 16 % est une baisse...
 - a. inférieure à 16 %
 - b. égale à 16 %
 - c. supérieure à 16 %

7. La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.
Le tarif du kWh d'électricité augmente chaque année de 0,01 €.

8. Classer dans l'ordre croissant $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{7}{6}$.

9. Simplifier $F = (11^3)^4 \times \frac{1}{11^8}$.

10. Convertir 15 m² en cm².

11. Construire le tableau de signes de $-2(x - 1)^2$ sur \mathbb{R} .

12. On donne $y_A = ax_A + b$.
Exprimer b en fonction de a , x_A et y_A .

13. La concentration molaire, exprimée en mol \times L⁻¹ est donnée par la formule suivante : $C = \frac{n}{V}$ où n est la quantité de matière (en mol) et V est le volume en L.
Quelle est la concentration molaire dans une solution de 50 cl où la quantité de matière est de 3 mol ?

14. Factoriser $F = 3(x - 7) - (x - 7)^2$.

15. Dériver $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 17$.

Fonctions et représentations

16. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

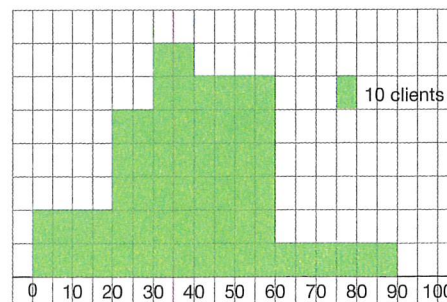


- a. Combien 5 a-t-il d'antécédents par f ?
- b. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$.
- c. Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$?

17. Construire le tableau de signes de $-6(x + 12)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Représentations graphiques de données chiffrées

18. L'histogramme ci-dessous représente les temps passés par les clients dans un supermarché, exprimés en minutes un jour donné. Quel est le nombre de clients ayant passé entre 40 et 60 minutes dans le supermarché ?



1 Calculer une probabilité conditionnelle

Pour calculer une probabilité conditionnelle $P_A(B)$ où A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$, deux cas se présentent :

- On ne dispose pas d'un arbre pondéré :
 - Si on dispose de $P(A)$ et de $P(A \cap B)$, on utilise la formule $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
 - Si on dispose de l'effectif n_A de A et de l'effectif $n_{A \cap B}$ de $A \cap B$, on utilise la formule $P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$.
- On dispose d'un arbre pondéré : voir méthode 2 (p. 227).

Exercice résolu A

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

- 1 Calculer $P_A(B)$.
- 2 Calculer $P_B(A)$.

SOLUTION

1. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25$
2. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$

Exercice résolu B

Un pâtissier confectionne des gâteaux fourrés avec trois farces différentes : datte, noix et pistache, et deux tailles : petite ou grande.

La répartition des gâteaux est la suivante :

On prend un gâteau au hasard et on considère les événements suivants :

- D : « le gâteau est fourré à la datte ».
- N : « le gâteau est fourré à la noix ».
- P : « le gâteau est fourré à la pistache ».
- G : « le gâteau est de grande taille ».

- 1 Calculer $P_G(N)$.
- 2 Calculer $P_D(\bar{G})$.
- 3 Calculer la probabilité que le gâteau soit fourré à la datte sachant qu'il est de petite taille.
- 4 Calculer la probabilité que le gâteau soit fourré à la noix sachant qu'il est de petite taille.

Taille \ Farce	Datte	Noix	Pistache	Total
Petite	30	27	23	80
Grande	9	7	4	20
Total	39	34	27	100

SOLUTION

1. $P_G(N) = \frac{n_{G \cap N}}{n_G} = \frac{7}{20}$
2. $P_D(\bar{G}) = \frac{n_{D \cap \bar{G}}}{n_D} = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$
3. $P_{\bar{G}}(D) = \frac{n_{\bar{G} \cap D}}{n_{\bar{G}}} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$
4. $P_{\bar{G}}(N) = \frac{n_{\bar{G} \cap N}}{n_{\bar{G}}} = \frac{27}{80}$

Exercices d'application directe

1 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,2$.

a. Calculer $P_A(B)$.

b. Calculer $P_B(A)$.

2 Soit A et B deux événements tels que $P(E) = 0,6$, $P(F) = 0,45$ et $P(E \cap F) = 0,25$.

a. Calculer $P_F(E)$.

b. Calculer $P_E(F)$.

3 Un joueur de football étudie ses statistiques sur une saison et constate que :

- la probabilité qu'il soit titulaire est de 0,8.
- la probabilité qu'il marque est de 0,32.
- la probabilité qu'il soit titulaire et qu'il marque est de 0,24.

On note T l'événement « le joueur est titulaire » et M l'événement « le joueur marque ».

a. Calculer $P_T(M)$.

b. Calculer la probabilité que le joueur soit titulaire sachant qu'il marque.

4 On considère deux événements X et Y tels que :

- la probabilité que X se produise est de 0,55.
- la probabilité que Y se produise est de 0,75.
- la probabilité que X et Y se produisent en même temps est de 0,15.

a. Calculer la probabilité de Y sachant X.

b. Calculer la probabilité de X sachant Y.

5 Dans un lycée, on constate que :

- 58 % des élèves font leur travail de manière régulière.
- 29 % des élèves obtiennent de très bons résultats.
- 22 % des élèves font leur travail de manière régulière et obtiennent de très bons résultats.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée et on considère les événements suivants :

- R : « l'élève choisi travaille de manière régulière ».
- T : « l'élève choisi obtient de très bons résultats ».

a. Calculer la probabilité que l'élève choisi obtienne de très bons résultats sachant qu'il travaille de manière régulière.

$P_R(T) =$

b. Calculer la probabilité que l'élève choisi travaille de manière régulière sachant qu'il obtient de très bons résultats.

6 Un commercial dans le secteur automobile récapitule ses ventes de l'année dans le tableau suivant :

Type \ Moteur	Citadine	Berline	SUV	Monospace	Total
Essence	33	28		2	66
Diesel	17	21	4	5	
Total	44				

On choisit une voiture au hasard et on considère les événements suivants :

- C : « la voiture choisie est une citadine ».
- B : « la voiture choisie est une berline ».
- S : « la voiture choisie est un SUV ».
- M : « la voiture choisie est un monospace ».
- E : « la voiture choisie a un moteur essence ».

a. Compléter le tableau précédent.

b. Calculer $P_E(C)$.

c. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit un SUV sachant qu'elle a un moteur diesel.

d. Calculer $P_B(E)$.

e. Calculer la probabilité que la voiture choisie ait un moteur diesel sachant que c'est un monospace.

f. Calculer $P_{\bar{E}}(S)$.

g. Calculer la probabilité que la voiture choisie ait un moteur essence sachant que c'est une citadine.

7 Un restaurant propose trois menus différents : *Fruits de mer*, *Montagnard* et *Terroir*.

Cette semaine, les choix des clients ont été les suivants :

Menu Service	Fruits de mer	Montagnard	Terroir	Total
Midi	18		25	58
Soir		19	28	
Total	44			

On choisit un client au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « le client a choisi un menu *Fruits de mer* ».
- M : « le client a choisi un menu *Montagnard* ».
- T : « le client a choisi un menu *Terroir* ».
- S : « le client est venu au service du soir ».

a. Compléter le tableau précédent.

b. Calculer $P_S(T)$.

c. Calculer $P_{\bar{F}}(S)$.

d. Calculer $P_{\bar{S}}(M)$.

e. Calculer la probabilité que le client ait choisi un menu *Montagnard* sachant qu'il est venu au service du soir.

f. Calculer la probabilité que le client soit venu au service du midi sachant qu'il a choisi un menu *Terroir*.

8 Une ville touristique propose la répartition suivante pour les appartements de location et les hôtels :

Logement \ Note	1	2	3	4	5
Hôtel	3	12	46	33	21
Appartement de location	7	6	28	41	30

On choisit un logement au hasard.

a. Calculer la probabilité que le logement ait la note 4 sachant que c'est un hôtel.

b. Calculer la probabilité que le logement ait la note maximale sachant que c'est un appartement de location.

c. Calculer la probabilité que le logement soit un hôtel sachant qu'il a obtenu la note 4.

d. Calculer la probabilité que le logement soit un hôtel sachant qu'il a obtenu la note 1.

e. Calculer la probabilité que le logement soit un appartement sachant qu'il a obtenu la note 5.

2 Construire et utiliser un arbre de probabilités

- Pour construire un arbre de probabilités, le protocole est le suivant :
 - on représente la structure générale de l'arbre avec les branches et les événements. Pour trouver dans quel ordre placer les événements, on regarde attentivement quels sont ceux qui conditionnent les autres.
 - on indique les probabilités données par l'énoncé sur les branches correspondantes.
 - on complète si nécessaire les probabilités manquantes grâce à la règle des nœuds (la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud vaut 1).
- Pour déterminer une probabilité conditionnelle, on la lit directement sur l'arbre si le conditionnement se fait par un événement du premier niveau de l'arbre. Sinon, on est ramené à la méthode 1 (p. 224).
- Pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements, on multiplie les probabilités portées par les branches du chemin qui représente cette intersection d'événements.

Exercice résolu

Un paquet de nougats en contient 40 avec deux parfums différents : nature ou châtaigne, et deux types : dur ou mou.

De plus :

- 10 nougats sont au parfum châtaigne et parmi eux, 6 sont durs.
- parmi les nougats au parfum nature, 24 sont durs.

On choisit au hasard un nougat dans le paquet et on considère les événements suivants :

- C : « le nougat choisi est au parfum châtaigne ».
- D : « le nougat choisi est dur ».

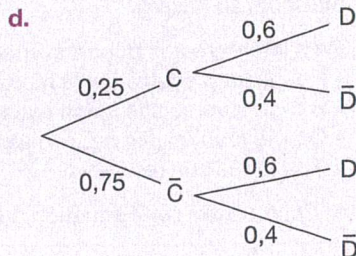
- Calculer $P(C)$.
- Calculer $P_C(D)$.
- Calculer $P_{\bar{C}}(D)$.
- Construire un arbre de probabilités représentant cette situation.
- Calculer $P(C \cap D)$.
- Calculer $P(\bar{C} \cap D)$.
- Calculer la probabilité que le nougat choisi soit au parfum châtaigne et mou.
- Calculer la probabilité que le nougat choisi soit au parfum nature et mou.

SOLUTION

a. $P(C) = \frac{10}{40} = 0,25$

b. $P_C(D) = \frac{6}{10} = 0,6$

c. $P_{\bar{C}}(D) = \frac{24}{30} = 0,8$



e. $P(C \cap D) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$

f. $P(\bar{C} \cap D) = 0,75 \times 0,8 = 0,6$

g. La probabilité que le nougat choisi soit au parfum châtaigne et mou est :
 $P(C \cap \bar{D}) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$.

h. La probabilité que le nougat choisi soit au parfum nature et mou est :
 $P(\bar{C} \cap \bar{D}) = 0,75 \times 0,2 = 0,15$.

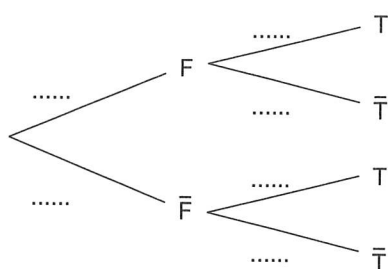
Exercices d'application directe

9 Une usine fabrique des chargeurs de batterie pour téléphones portables. 96 % des chargeurs fabriqués fonctionnent et un test de fiabilité est effectué sur chaque chargeur. Si un chargeur est défectueux, la probabilité que le test le rejette est de 0,97. Toutefois, si un chargeur fonctionne, le test peut tout de même le rejeter avec une probabilité de 0,05.

On choisit un chargeur au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « le chargeur fonctionne ».
- T : « le chargeur est accepté par le test ».

a. Compléter l'arbre de probabilités suivant pour qu'il corresponde à cette situation.



b. Donner $P_F(T)$ et $P_{\bar{F}}(T)$.

c. Calculer la probabilité qu'un chargeur ne fonctionne pas et que le chargeur soit accepté par le test.

d. Calculer $P(F \cap T)$.

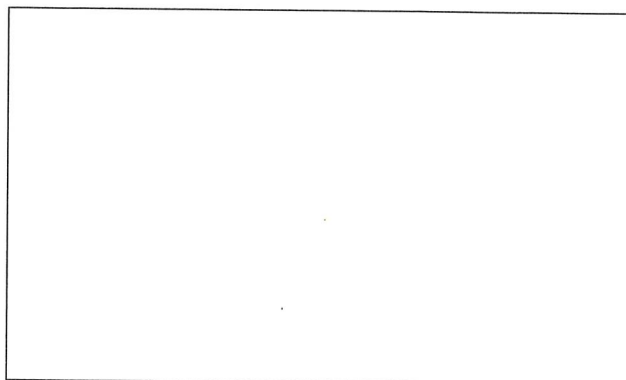
e. Calculer $P(F \cap \bar{T})$.

10 Un vendeur de jeux électroniques constate qu'en moyenne :
– sur 20 clients se présentant dans son magasin, un seul achète une console de jeux.
– parmi ceux qui achètent une console de jeux, 92 % achètent également un jeu.
– parmi ceux qui n'achètent pas de console de jeux, 17 % achètent tout de même un jeu.

On interroge un client au hasard à la sortie de ce magasin et on considère les événements suivants :

- C : « il a acheté une console ».
- J : « il a acheté un jeu ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.



b. Donner les probabilités $P_C(J)$ et $P_{\bar{C}}(J)$.

c. Calculer la probabilité que le client ait acheté une console de jeux et un jeu.

d. Décrire par une phrase l'événement $\bar{C} \cap J$.

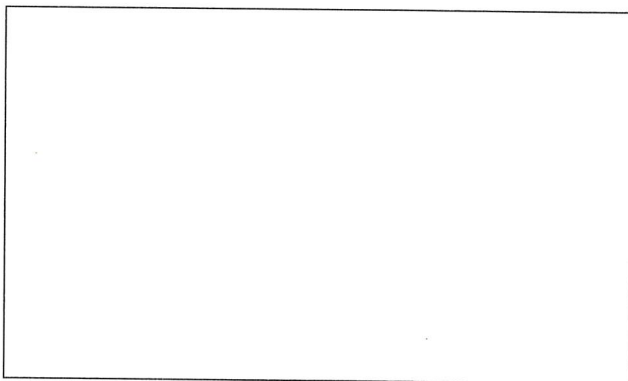
e. Calculer $P(\bar{C} \cap J)$.

11 La probabilité qu'une maison résiste au souffle du grand méchant loup est de 0,15 si elle est en paille, 0,44 si elle est en bois et 0,97 si elle est en briques. Les trois petits cochons ont chacun construit une maison : la première en paille, la deuxième en bois et la troisième en briques. Le loup arrive et souffle sur une de ces trois maisons, au hasard.

On s'intéresse aux quatre événements suivants :

- P : « le loup souffle sur la maison en paille ».
- B : « le loup souffle sur la maison en bois ».
- Q : « le loup souffle sur la maison en briques ».
- R : « la maison résiste ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.



b. Donner les probabilités conditionnelles $P_B(R)$, $P_Q(R)$ et $P_B(\bar{R})$.

c. Décrire par une phrase l'événement $B \cap R$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $B \cap R$.

e. Décrire par une phrase l'événement $Q \cap R$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $Q \cap R$.

12 Une urne contient 6 billes rouges et 4 billes bleues. On prend une bille au hasard dans l'urne puis, sans remise, on en prend une seconde et on considère les événements suivants :

- U : « la première bille choisie est rouge ».
- D : « la seconde bille choisie est rouge ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Donner les probabilités conditionnelles $P_U(D)$ et $P_U(\bar{D})$.

c. Décrire par une phrase l'événement $U \cap D$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $U \cap D$.

e. Décrire par une phrase l'événement $\bar{U} \cap \bar{D}$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{U} \cap \bar{D}$.

13 Dans un lycée, il y a 51 % de filles et 49 % de garçons, et pour le cours d'EPS du premier trimestre, chaque élève doit choisir un sport parmi escalade, athlétisme et handball.

Parmi les filles, 40 % choisissent l'escalade, 35 % choisissent l'athlétisme et le reste choisit le handball. Parmi les garçons, 34 % choisissent l'escalade, 36 % choisissent l'athlétisme et le reste choisit le handball.

On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- F : « l'élève choisi est une fille ».
- E : « l'élève a choisi l'escalade ».
- A : « l'élève choisit l'athlétisme ».
- H : « l'élève choisit le handball ».

a. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b. Donner les probabilités conditionnelles $P_F(A)$, $P_F(H)$ et $P_{\bar{F}}(E)$.

c. Décrire par une phrase l'événement $F \cap E$.

d. Calculer la probabilité de l'événement $F \cap E$.

e. Décrire par une phrase l'événement $\bar{F} \cap E$.

f. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap E$.

g. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap A$.

h. Calculer la probabilité de l'événement $\bar{F} \cap H$.

3 Appliquer la formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exercice résolu D

On reprend l'énoncé de l'exercice résolu C (méthode 2).

- 1 Calculer la probabilité que le nougat soit dur.
- 2 Calculer de deux manières différentes la probabilité que le nougat soit mou.

SOLUTION

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D) = 0,25 \times 0,6 + 0,75 \times 0,8 = 0,75$$

2. Méthode 1 : d'après la formule des probabilités totales,

$$P(\bar{D}) = P(C \cap \bar{D}) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) = 0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,2 = 0,25$$

$$\text{Méthode 2 : } P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,75 = 0,25$$

Exercices d'application directe

14 On reprend l'énoncé de l'exercice 9.

a. Calculer $P(T)$.

.....

.....

b. Calculer de deux manières différentes la probabilité que le chargeur ne soit pas accepté par le test.

Méthode 1 :

.....

.....

.....

Méthode 2 :

.....

.....

15 On reprend l'énoncé de l'exercice 10.

a. Calculer la probabilité que le client n'ait pas acheté de jeu.

.....

.....

b. Calculer $P(J)$ de deux manières différentes.

Méthode 1 :

.....

.....

.....

Méthode 2 :

.....

.....

16 On reprend l'énoncé de l'exercice 11.

a. Calculer la probabilité que la maison résiste.

.....

.....

.....

b. Calculer de deux manières différentes la probabilité que la maison ne résiste pas.

Méthode 1 :

.....

.....

.....

Méthode 2 :

.....

.....

17 On reprend l'énoncé de l'exercice 12.

a. Calculer $P(D)$.

.....


.....

.....

10

.....

c. Calculer de deux manières différentes la probabilité que l'élève choisisse le handball.

[illegible][illegible]

.....

.....

.....


.....

.....

.....

.....

.....



(continued)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 104

4 Étudier l'indépendance de deux événements

Pour étudier l'indépendance, on utilise la définition ou la propriété suivantes.

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Soit A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Exercice résolu ①

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,15$.

2. $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,3$.

3. $P(A) = 0,74$, $P(B) = 0,55$ et $P_A(B) = 0,55$.

4. $P(A) = 0,74$, $P(B) = 0,55$ et $P_B(A) = 0,55$.

SOLUTION

1. $P(A \cap B) = 0,15$

$P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,25 = 0,15 = P(A \cap B)$

Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

D'où : A et B sont indépendants.

2. $P(A \cap B) = 0,3$

$P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,5 = 0,4 \neq P(A \cap B)$

Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

D'où : A et B ne sont pas indépendants.

3. $P_A(B) = 0,55 = P(B)$

Donc A et B sont indépendants.

4. $P_B(A) = 0,55 \neq P(A)$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

Exercices d'application directe

21 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

a. $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,15$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,18$.

.....

.....

.....

.....

.....

c. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ et $P_A(B) = 0,18$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d. $P(A) = 0,26$, $P(B) = 0,32$ et $P_B(A) = 0,26$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

D'ou :

[illegible][illegible][illegible]

.....

[The page contains faint horizontal lines, likely representing scanning artifacts or bleed-through from another document.]

[illegible][illegible]

.....

.....

- 28** Dans un lycée on constate que :
- 83 % des élèves font du sport régulièrement.
 - 47 % des élèves lisent régulièrement.
 - 21 % des élèves font les deux.
- On choisit un élève au hasard dans cet établissement.

- a. Sachant que c'est un élève qui fait du sport régulièrement, calculer la probabilité qu'il lise aussi régulièrement.
- b. Sachant que c'est un élève qui lit régulièrement, calculer la probabilité qu'il fasse aussi du sport régulièrement.

- 29** Une entreprise effectue un sondage auprès de ses employés à propos de leurs temps de parcours pour se rendre sur leur lieu de travail ainsi que leurs moyens de locomotion. Les résultats, en nombre d'employés, sont résumés dans le tableau suivant :

	À pied	En voiture	En transport en commun	Autre
≤ 30 min.	12	6	15	3
> 30 min.	1	6	5	0

On choisit un employé au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

V : « L'employé vient en voiture. »

M : « L'employé met moins de 30 min. »

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

- a. Calculer les probabilités $p(V)$ et $p(M)$.
- b. Calculer $p(V \cap M)$. Que représente cette probabilité ?
- c. Calculer $p_V(M)$. Que représente cette probabilité ?
- d. Calculer $p_M(V)$. Que représente cette probabilité ?

- 30** On considère deux événements B et J tels que $p(B) = 0,5$, $p(J) = 0,75$ et $p(J \cap B) = 0,3$.
Calculer $p_J(B)$ et $p_B(J)$.

- 31** Adam fait l'inventaire de ses tee-shirts et résume le tout dans un tableau :

	Manches courtes	Manches longues
Unis	4	2
À motifs	3	1

- a. Recopier le tableau précédent en ajoutant une ligne et une colonne « Total » et en les complétant.
- b. Adam prend un tee-shirt au hasard. On considère les événements suivants :
- U : « Adam a pris un tee-shirt uni. »
- C : « Adam a pris un tee-shirt à manches courtes. »
- Donner les probabilités $p(U)$ et $p(C)$ et $p_U(C)$.
- c. Exprimer l'événement $U \cap C$ par une phrase et calculer sa probabilité.
- d. Exprimer l'événement $U \cap C$ par une phrase et calculer sa probabilité.


- 32** Quand Thomas prend une paire de chaussettes au hasard dans son tiroir, il constate que :
- il a deux chances sur quinze que ce soit une paire de chaussettes blanches trouées.
 - il a deux chances sur cinq que ce soit une paire de chaussettes blanches.
 - il a trois chances sur dix que ce soit une paire de chaussettes trouées.

- a. Il prend une paire de chaussettes blanches. Calculer la probabilité qu'elles soient trouées.
- b. Il prend une paire de chaussettes trouées. Calculer la probabilité qu'elles soient blanches.

- 33** Aujourd'hui :
- la probabilité qu'il y ait du soleil est de 0,8.
 - la probabilité qu'il fasse chaud est de 0,6.
 - la probabilité qu'il y ait du soleil et qu'il fasse chaud est de 0,5.

On note S l'événement « il y a du soleil » et C l'événement « il fait chaud ».

- a. Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?
- b. Calculer les probabilités $p_C(S)$ et $p_S(C)$.

- 34**  **TABLEUR** A , B , C et E étant des événements, on utilise un tableur pour calculer des probabilités conditionnelles.

	A	B	C
1	$p(E) =$	0,7	
2			
3	$p(A \cap E)$	$p(B \cap E)$	$p(C \cap E)$
4	0,21	0,37	0,12
5			
6	$p_E(A)$	$p_E(B)$	$p_E(C)$
7			

La cellule B1 contient $p(E)$ tandis que les cellules A4, B4 et C4 contiennent respectivement les probabilités des événements $A \cap E$, $B \cap E$ et $C \cap E$.

On voudrait que les cellules A7, B7 et C7 contiennent respectivement les probabilités $p_E(A)$, $p_E(B)$ et $p_E(C)$.

Quelle formule doit-on saisir dans la cellule A7 pour permettre, une fois étirée vers la droite, de compléter la ligne ?

- 35** A et B sont deux événements.
- a. On sait que $p(A) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,3$. Calculer $p_A(B)$.
- b. On sait que $p(A) = 0,7$ et $p_A(B) = 0,2$. Calculer $p(A \cap B)$.
- c. On sait que $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $p_A(B) = \frac{3}{4}$. Calculer $p(A)$.
- 36** A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,35$, $p_B(A) = 0,4$ et $p_A(B) = 0,24$
- a. Calculer $p(A \cap B)$.
- b. En déduire $p(B)$.

37 Jérémie dort huit heures par jour dont une heure avec ses écouteurs sur les oreilles. En fait, il a ses écouteurs sur les oreilles pendant quatre heures par journée de 24 heures. On s'intéresse à Jérémie à un moment pris au hasard. On note D l'événement « Jérémie dort » et E l'événement « Jérémie à ses écouteurs sur les oreilles ».

- Calculer $p(D \cap E)$, $p(\bar{D} \cap E)$, $p_{\bar{D}}(E)$ et $p_E(\bar{D})$.
- Que représente l'événement $\bar{D} \cap \bar{E}$? Calculer sa probabilité.

38 Dans un magasin, on constate que :

- 24 % des piles sont des piles AAA.
- 10 % des piles AAA sont des piles rechargeables.
- 32 % des piles rechargeables sont des piles AAA.

On prend une pile au hasard dans ce magasin et on s'intéresse aux événements :

A : « C'est une pile AAA. »

R : « C'est une pile rechargeable. »

- Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?
- Calculer $p(A \cap R)$.
- En déduire $p(R)$. Traduire ce résultat par une phrase.

39 On considère deux événements X et Y . On sait que $p(X) = 0,89$, $p(Y) = 0,66$ et $p_X(Y) = 0,51$.

- Calculer $p(X \cap Y)$.
- En déduire $p_Y(X)$. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

40 7 % des céréales d'un rayon sont sans gluten. 14 % des céréales de ce rayon sont bio. 94 % des céréales sans gluten sont bio.

On prend un paquet de céréales au hasard dans ce rayon et on note :

G l'événement « elles sont sans gluten »,

B l'événement « elles sont bio ».

- Quelles sont les probabilités données dans cet énoncé ?
- Calculer $p(G \cap B)$.
- Si je prends un paquet de céréales bio dans ce rayon, quelle est la probabilité qu'elles soient sans gluten ?

41 Des grille-pains proviennent de trois usines différentes, A, B et C. Un quart des grille-pains proviennent de l'usine A, un tiers de l'usine B et le reste de l'usine C.

La probabilité qu'un grille-pain soit défectueux dépend de l'usine de fabrication. 5 % des grille-pains provenant de l'usine A sont défectueux, contre 2 % pour l'usine B et 3 % pour l'usine C.

On prend un grille-pain au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

A : « Le grille-pain provient de l'usine A. »

B : « Le grille-pain provient de l'usine B. »

C : « Le grille-pain provient de l'usine C. »

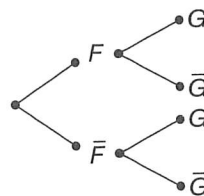
D : « Le grille-pain est défectueux. »

a. Calculer $p(C)$.

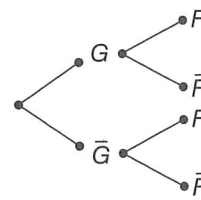
b. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

c. Calculer la probabilité qu'un grille-pain pris au hasard provienne de l'usine C et soit en état de fonctionner.

42 L'énoncé d'un exercice donne les valeurs de $p(G \cap F)$ et de $p_G(F)$. Quel arbre faut-il choisir pour représenter la situation ?

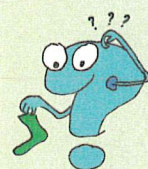


arbre n°1



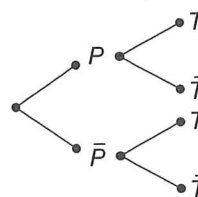
arbre n°2

43 On considère l'énoncé suivant :

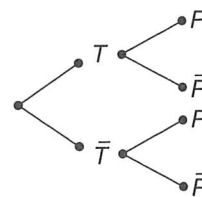


Comme tous les matins, Monsieur Indécis se demande comment il va s'habiller. Il commence par lancer une pièce de monnaie pour savoir quel placard il va ouvrir puis il lance un dé pour connaître le numéro du tiroir contenant ses vêtements pour la journée.

En notant P l'événement « il ouvre le placard de gauche » et T l'événement « il ouvre le tiroir du haut », lequel de ces deux arbres est le plus adapté à cet énoncé ?



arbre n°1



arbre n°2

44 Deux événements L et M sont tels que :

$$p(L) = \frac{5}{6}, p_L(M) = \frac{3}{5} \text{ et } p_{\bar{L}}(\bar{M}) = \frac{1}{10}.$$

- Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation et y placer ces trois probabilités.
- Compléter cet arbre en indiquant les probabilités sur chaque branche restante.
- Calculer $p(L \cap M)$.

45 Sur l'étalage d'un fromager, il y a 70 % de fromages de vache et le reste de fromages de chèvre. 82 % des fromages de vache sont à pâte dure contre 26 % des fromages de chèvre.

On prend un fromage au hasard sur cet étalage et on considère les événements :

V : « C'est un fromage de vache. »

C : « C'est un fromage de chèvre. »

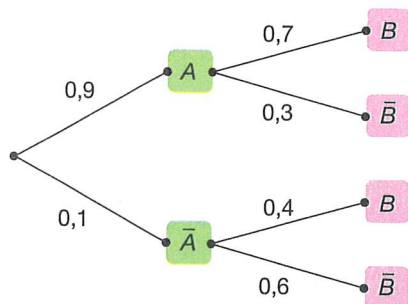
D : « C'est un fromage à pâte dure. »

- Construire un arbre de probabilités correspondant à la situation décrite dans cet énoncé.
- Calculer la probabilité que ce soit un fromage de chèvre à pâte dure.

46 Demain, il y a une chance sur dix qu'il pleuve. S'il pleut, il y a six chances sur sept qu'Augustin prenne son parapluie et s'il ne pleut pas il y a tout de même une chance sur cinq qu'il le prenne.

- Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
- Calculer la probabilité qu'Augustin sorte avec son parapluie sans avoir à l'utiliser.

47 Une situation est représentée par l'arbre suivant :



- Lire sur cet arbre les probabilités suivantes : $p(A)$, $p(\bar{A})$, $p_A(B)$ et $p_{\bar{A}}(B)$.
- En déduire les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$.
- En déduire $p(B)$.

48 Une urne contient trois boules portant respectivement les numéros 2, 4 et 6. Un jeu consiste à prendre une boule au hasard parmi les trois puis à lancer un dé classique équilibré. On gagne si le numéro indiqué sur le dé est supérieur ou égal à celui inscrit sur la boule. Lors d'une partie, on considère les événements suivants :
D : « La boule porte le numéro 2. »
Q : « La boule porte le numéro 4. »
S : « La boule porte le numéro 6. »
G : « Le joueur a gagné. »

- Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne.

49 Lors d'un match de football, l'avant-centre a le ballon et doit le passer à un de ses ailiers. Il y a deux chances sur trois qu'il le passe à celui de gauche contre une chance sur trois pour celui de droite. L'ailier de gauche a une chance sur cinq de mettre un but et celui de droite a une chance sur quatre. On note G l'événement « il fait la passe à l'ailier de gauche », D l'événement « il fait la passe à l'ailier de droite » et B l'événement « son équipe marque un but ».

- Représenter cette situation par un arbre pondéré.
- Calculer $p(G \cap B)$ et $p(D \cap B)$.
- Quelle est la probabilité qu'un but soit marqué ?

50 Gabriel joue à un jeu vidéo dans lequel il se fait attaquer trois fois sur quatre par des zombies le reste du temps par des squelettes. Il arrive à battre 98 % des zombies et 96 % des squelettes.

Quelle est probabilité qu'il batte le prochain monstre qui va l'attaquer ?

51 Un jardinier plante 60 graines d'azalées, 30 de bégonias, 70 de capucines et 40 de dahlias.

On sait que :

- 70 % des azalées vont fleurir.
- 80 % des bégonias vont fleurir.
- 90 % des capucines vont fleurir.
- Tous les dahlias vont fleurir.

Quelle est la probabilité qu'une graine prise au hasard fleurisse ?

52 A et B sont deux événements tels que :
 $p(A) = 0,37$, $p_A(B) = 0,62$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0,42$.

- Représenter cette situation par un arbre pondéré.
- Calculer $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$.
- En déduire $p(B)$.

53 Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 53 % d'entre eux possèdent un ordinateur et que parmi ceux-ci, 64 % possèdent un vélo. L'étude montre aussi que 36 % des élèves de ce lycée ne possède pas de vélo. On choisit un élève au hasard dans l'établissement et on note O l'événement « l'élève possède un ordinateur » et V l'événement « l'élève possède un vélo ».

Les événements O et V sont-ils indépendants ?

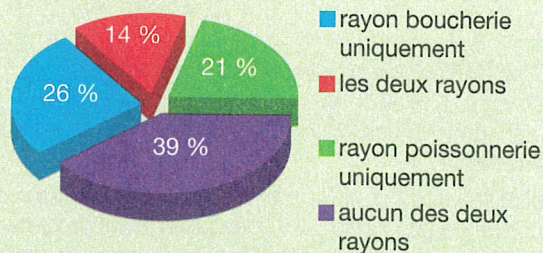
54 Compléter le tableau ci-dessous où les probabilités de deux événements indépendants A et B ont été indiquées.

	B	\bar{B}	Total
A			0,15
\bar{A}			
Total	0,8		

55 Faire les courses

Chercher – Calculer

Le gérant d'un supermarché effectue une étude sur la proportion de clients achetant dans les rayons *boucherie* et *poissonnerie*. Il résume cette étude dans le diagramme suivant :



On choisit un client au hasard à la sortie de ce supermarché et on considère les événements suivants :
B : « Le client a acheté quelque chose au rayon *boucherie*. »
P : « Le client a acheté quelque chose au rayon *poissonnerie*. »

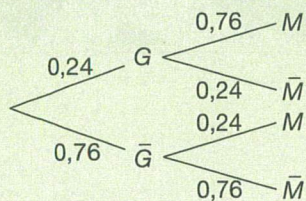
- D'après le diagramme, que vaut $p(B \cap P)$?

- b. Quel pourcentage des clients du supermarché achète au rayon *boucherie* ? En déduire $p(B)$.
- c. En procédant de la même façon, calculer $p(P)$.
- d. Sachant que le client a effectué un achat au rayon *boucherie*, calculer la probabilité qu'il ait également effectué un achat au rayon *poissonnerie*.
- e. Les événements B et P sont-ils indépendants ?

56 Événements indépendants

Chercher – Raisonner

Une situation est représentée par l'arbre suivant :



Les événements G et M sont-ils indépendants ?

57 Une vie de rat

Représenter – Calculer

Un rat fouille dans une poubelle. On s'intéresse aux événements suivants :

R : « C'est la poubelle d'un restaurant. »

N : « Il y a de la nourriture. »

On sait que :

$p(R) = 0,16$, $p_R(N) = 0,97$ et $p_{\bar{R}}(N) = 0,36$.

- a. Traduire les probabilités précédentes par des phrases.
- b. Construire un arbre de probabilités correspondant à cet énoncé.
- c. Calculer la probabilité que le rat trouve de la nourriture dans cette poubelle.
- d. Sachant que le rat a trouvé de la nourriture, calculer la probabilité que ce soit dans la poubelle d'un restaurant. On arrondira le résultat à 0,01 près.

58 Avec et sans remise

Modéliser – Représenter

Une urne contient quatre boules bleues et six boules rouges. On tire successivement deux boules de l'urne. On note B_1 l'événement « la première boule est bleue » et B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

1. On suppose que ce tirage est effectué avec remise, c'est-à-dire que l'on remet la première boule dans l'urne après avoir noté sa couleur.
 - a. Expliquer, sans calcul, pourquoi les événements B_1 et B_2 sont indépendants.
 - b. Que vaut $p_{B_1}(B_2)$?
 - c. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
 - d. Calculer la probabilité de tirer deux boules bleues.
2. On suppose que ce tirage est maintenant effectué sans remise, c'est-à-dire que l'on tire une première boule de l'urne, puis une deuxième sans avoir remis la première.
 - a. Expliquer, sans calcul, pourquoi les événements B_1 et B_2 ne sont cette fois pas indépendants.

- b. Que vaut $p_{B_1}(B_2)$?

- c. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
- d. Calculer la probabilité de tirer deux boules bleues.

59 Roméo et Juliette

Modéliser – Représenter

Si Roméo envoie un SMS à Juliette un jour, alors la probabilité qu'il lui en envoie un autre le lendemain est de 0,95. S'il ne lui en a pas envoyé, la probabilité qu'il lui en envoie tout de même un est de 0,65.

On note :

- S_0 l'événement « Roméo envoie un SMS à Juliette aujourd'hui »
- S_1 l'événement « Roméo enverra un SMS à Juliette demain »

On note p la probabilité que Roméo envoie un message à Juliette aujourd'hui.

- a. Donner $p(S_0)$ en fonction de p .
- b. En utilisant l'énoncé, donner $p_{S_0}(S_1)$ et $p_{\bar{S}_0}(S_1)$.
- c. Construire un arbre de probabilités représentant la situation pour aujourd'hui et demain.
- d. On note S_2 l'événement « Roméo enverra un SMS à Juliette après-demain ». Compléter l'arbre précédent en lui ajoutant les événements S_2 et \bar{S}_2 .

60 Le cou de la vache

Chercher – Modéliser

Marguerite est une vache qui adore regarder les trains. Hélas, si c'est un TGV qui passe, il y a une chance sur six qu'elle se retrouve avec un torticolis.

Dans le cas contraire, elle peut tout de même se retrouver avec le cou coincé une fois sur vingt. Marguerite sait également que 17 % des trains qui passent devant elle sont des TGV.

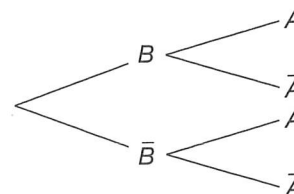
- a. Construire un arbre adapté à la situation après avoir judicieusement défini les événements utilisés.
- b. Quelle est la probabilité que le prochain train qui passe provoque un torticolis chez Marguerite ?

61 Retourner un arbre

Représenter – Calculer

A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0,75$, $p_A(B) = 0,21$ et $p_{\bar{A}}(B) = 0,37$.

- a. Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation.
- b. Calculer $p(A \cap B)$.
- c. Calculer $p(B)$.
- d. Calculer $p_B(A)$.
- e. Calculer $p_{\bar{B}}(A)$.
- f. Utiliser les résultats précédents pour inscrire les probabilités de chaque branche de l'arbre suivant :



1

Des grilles plus ou moins difficiles



SITUATION

Tom fait des parties de mots croisés dans un magazine. Ces grilles de mots croisés ont deux niveaux différents :

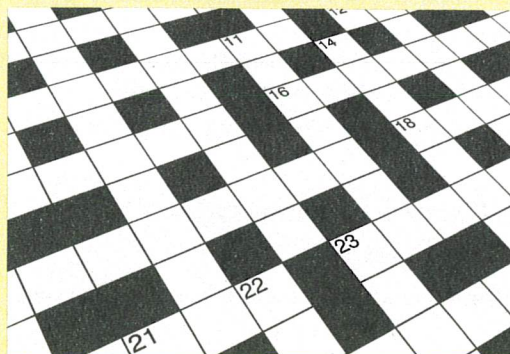
débutant et *confirmé*.

S'il réussit à compléter une grille au niveau *débutant*, il passe au niveau *confirmé* pour la grille suivante, sinon il en refait une au niveau *débutant*.

S'il réussit à compléter une grille au niveau *confirmé*, il reste au niveau *confirmé*, sinon il repasse au niveau *débutant*.

Tom réussit les trois quarts des grilles au niveau *débutant* et la moitié au niveau *confirmé*.

Tom commence par faire une grille de niveau *débutant*.



⇒ Comment modéliser l'évolution du niveau des grilles de Tom ?

A Une simulation avec Python

On aimerait évaluer la proportion de grilles de niveau *confirmé* auxquelles jouerait Tom s'il essayait de remplir 100 000 grilles de mots croisés en suivant ce protocole.

1 Donner un ordre de grandeur du temps que mettrait Tom s'il devait réellement essayer de remplir 100 000 grilles de mots croisés, en imaginant qu'il mette environ 6 minutes par grille.

2 Compléter la fonction ci-contre, écrite en Python, afin qu'elle simule le niveau de la grille suivante, si on lui indique en entrée le niveau de la grille que Tom est en train de faire.

```
from random import random

def grille_suivante(niveau):
    if niveau == "débutant":
        if random() < 0.75 :
            return("confirmé")
        else:
            return("débutant")
    else:
        if random() < ..... :
            return(".....")
        else:
            .....
```

Aide

La fonction `random` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre au hasard entre 0 et 1. Il y a donc trois chances sur quatre que la condition « `random() < 0.75` » soit vraie.

B Des calculs de probabilités avec un tableur

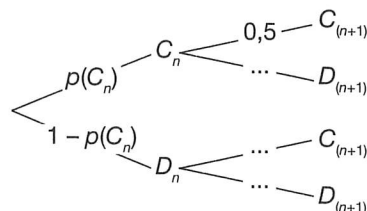
On note C_n l'événement « la n ème grille jouée est au niveau *confirmé* » et D_n l'événement « la n ème grille jouée est au niveau *débutant* ».

1 D'après l'énoncé, pourquoi a-t-on $p(C_1) = 0$?

2 Compléter l'arbre ci-contre en indiquant les probabilités sur les branches restantes.

3 Utiliser cet arbre pour démontrer que :

$$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times 0,75 + (1 - p(C_n)) \times 0,5$$



On désire utiliser un tableur pour calculer quelques valeurs de $p(C_n)$ sur le modèle ci-contre.

4 En utilisant le résultat de la question 3, quelle formule faut-il saisir dans la cellule B3 ?

5 Après avoir recopié cette formule vers le bas, que constate-t-on assez rapidement ?

6 Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

	A	B
1	Grille	$p(C_n)$
2	1	0
3	2	0,75
4	3	0,5625
	⋮	⋮