Terminale

CHAPITRE 4

THÈME 1 / Analyse

Fonction logarithme décimal

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/ndyp80

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. $\frac{1}{3}$ des 240 élèves d'un collège ne pratiquent pas d'activité sportive. Combien d'élèves sont concernés ?

2. Calculer 12 % de $\frac{2}{3}$ sous forme décimale.

Évolution et variations

3. Baisser de 0,5 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 500 quand il a baissé de 75 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 2 à 6 ?

6. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 20 % puis diminué de 40 % ?

7. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une baisse de 50 %.

8. La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.

Le directeur d'une société proposant des contrats annuels d'entretien de photocopieurs remarque que, chaque année, 14 % de contrats supplémentaires sont souscrits puis 7 sont résiliés.

9. Calculer sous forme de fraction irréductible $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$.

10. Écrire sous la forme 3^k le nombre $C = \frac{3^9}{27} \times \frac{9}{3^4}$.

11. Convertir 153 minutes en heure minute.

12. Résoudre $\frac{1}{2}x = 2x - 5$.

13. Construire le tableau de signes de $-2x + 8$ sur $\mathbb{R}$.

14. On donne $u_n = 3 + 4n$. Exprimer n en fonction de u_n.

15. Le prix au kg est donné par la formule :

$$\text{prix au kg} = \frac{\text{prix}}{\text{masse (en kg)}}.$$

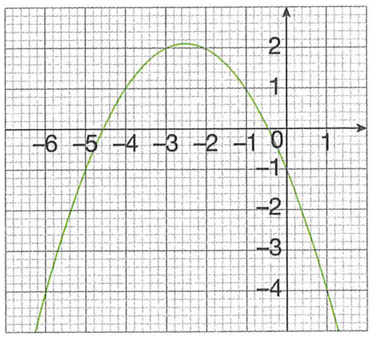
Un paquet de pâtes de 500 g coûte 0,65 €.
Quel est le prix au kilo de cet article ?

16. Développer et réduire $C = -3(x - 5)(x + 5)$.

17. Dériver $f(t) = 5t^2 + 1$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 7x - 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Fonctions et représentations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Quelle est l'image de 1 par f ?
b. Quels sont les antécédents de 1 par f ?
c. Établir le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.
d. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

18. Déterminer l'ordonnée du point de la courbe d'équation $y = 2(x - 4)(x + 6)$ dont l'abscisse est 2.

19. Tracer dans un repère orthonormé la droite passant par A(5 ; 3) et de coefficient directeur 3.

20. On considère les points A(−5 ; 3) et B(3 ; −7).
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Données chiffrées

21. La distance à vol d'oiseau entre Paris et Cherbourg est de 300 km. Représenter par un segment cette distance à l'échelle $\frac{1}{30\,000\,000}$.

Cours et méthodes

1 Utiliser les propriétés algébriques du logarithme décimal

On applique les formules suivantes :

Soit a et b deux nombres strictement positifs et x un nombre réel.

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ (formule fondamentale du logarithme décimal)
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^x) = x\log(a)$

Exercice résolu A

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a. $A = \log(20) + \log(50)$

b. $B = \log(5) + \log(8) + \log(25)$

c. $C = \log(800) - \log(8)$

d. $D = \log(11000) - \log(11)$

e. $E = \log(30) + \log(700) - \log(21)$

f. $F = \log(4) - \log(40)$

g. $G = \log(40000) - \log(20) - \log(2)$

h. $H = \log(160) - 4\log(2)$

i. Soit x un réel, $I = 3\log(x^2) - \log(x^6) + \log(0{,}01^5)$

SOLUTION

a. $A = \log(20) + \log(50) = \log(20 \times 50) = \log(1000) = \log(10^3) = 3$

b. $B = \log(5) + \log(8) + \log(25) + \log(10) = \log(5 \times 8 \times 25 \times 10) = \log(1000) = \log(10^4) = 4$

c. $C = \log(800) - \log(8) = \log\left(\frac{800}{8}\right) = \log(100) = \log(10^2) = 2$

d. $D = \log(11000) - \log(11) = \log\left(\frac{11\,000}{11}\right) = \log(1000) = \log(10^3) = 3$

e. $E = \log(30) + \log(700) - \log(21) = \log(30 \times 700) - \log(21) = \log(21000) - \log(21)$

$E = \log\left(\frac{21\,000}{21}\right) = \log(1000) = \log(10^3) = 3$

f. $F = \log(4) - \log(40) = \log\left(\frac{4}{40}\right) = \log(0{,}1) = \log(10^{-1}) = -1$

g. $G = \log(400\,000) - \log(20) - \log(2) = \log\left(\frac{400\,000}{20}\right) - \log(2)$

$G = \log(20\,000) - \log(2) = \log\left(\frac{20\,000}{2}\right) = \log(10\,000) = \log(10^4) = 4$

h. $H = \log(160) - 4\log(2) = \log(160) - \log(2^4) = \log(160) - \log(16) = \log\left(\frac{160}{16}\right)$

$H = \log(10) = \log(10^1) = 1$

i. $I = 3\log(x^2) - \log(x^6) + \log(0{,}01^5) = \log((x^2)^3) - \log(x^6) + \log(0{,}01^5)$

$I = \log(x^6) - \log(x^6) + \log(0{,}01^5) = \log(0{,}01^5) = \log((10^{-2})^5)$

$I = \log(10^{-10}) = -10$

Exercices d'application directe

1 Sans calculatrice, simplifier au maximum les expressions suivantes :

a. $A = \log(250) + \log(4)$

= ....

= ....

b. $B = \log(0{,}2) + \log(50)$

= ....

= ....

c. $C = \log(60) - \log(6)$

= ....

= ....

d. $D = \log(843) - \log(8\,430)$

= ....

= ....

e. $E = \log(2) + 2\log(5) + \log(200)$

= ....

= ....

f. $F = \log(34) - \log(3\,400)$

= ....

= ....

g. $G = \log(80) + \log(90) - \log(72)$

= ....

= ....

h. $H = \log(2) - \log(20\,000)$

= ....

= ....

i. $I = \log(390\,000\,000) - \log(3) - \log(1\,300)$

= ....

= ....

j. $J = \log(5\,000) - \log(0{,}5) + \log(10^2)$

= ....

= ....

k. $K = 2\log(4) - 4\log(2)$

= ....

= ....

l. $L = \log(125 \times 10^8) - 3\log(5)$

= ....

= ....

m. Soit x un réel.

$M = 7\log(100) + 4\log(x^3) - 2\log(x^6)$

= ....

= ....

2 Soit a et b des réels strictement positifs.
Exprimer en fonction de $\log(a)$ et/ou $\log(b)$ les réels suivants :

a. $A = \log\left(\frac{a}{b}\right) - \log(b)$

= ....

= ....

b. $B = 2\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\left(\frac{b}{a}\right) - \log\left(\frac{10}{a}\right)$

= ....

= ....

c. $C = 10\log(a) + 7\log\left(\frac{a}{b}\right) - 3\log(a)$

= ....

= ....

d. $D = \log(100) \times (\log(a^2) - \log(a))\left(1 + \log\left(\frac{b}{10}\right)\right)$

= ....

= ....

3 Soit a, b et c des réels strictement positifs.
Exprimer les réels suivants sous la forme d'un seul logarithme.

a. $A = \log(a) + \log(b) + \log(c)$

= ....

= ....

= ....

b. $B = 3\log(a) + 2\log\left(\frac{1}{b}\right)$

= ....

= ....

= ....

c. $C = 5\log(a) - 4\log(b)$

= ....

= ....

= ....

d. $D = 2(\log(a) + \log(b)) - 3\log(c)$

= ....

= ....

= ....

= ....

2 Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation ou une inéquation

1. Soit a et b des réels strictement positifs avec $a \neq 1$.

Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $a^x = b$ ou une d'inconnue x du type $a^x < b$:

- on applique le logarithme décimal de chaque côté et pour les inéquations, on rappelle que l'ordre est conservé car la fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- on applique les propriétés algébriques de la fonction log et les règles de calcul sur les équations et inéquations.

2. Soit a et b des réels avec $a \neq 0$ et b strictement positif.

Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $x^a = b$ ou une inéquation d'inconnue x du type $x^a < b$:

- on applique le logarithme décimal de chaque côté et pour les inéquations, on rappelle que l'ordre est conservé car la fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- on applique les propriétés algébriques de la fonction log et les règles de calcul sur les équations et inéquations.
- on applique la fonction exponentielle de base 10 de chaque côté et pour les inéquations, on rappelle que l'ordre est conservé car la fonction exponentielle de base 10 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice résolu B

1 Résoudre l'équation $3^x = 104$.

2 Résoudre l'inéquation $9^x < 5{,}1$.

3 Résoudre l'inéquation $0{,}6^x < 34$.

SOLUTION

1. $3^x = 104 \Leftrightarrow \log(3^x) = \log(104)$

$\Leftrightarrow x\log(3) = \log(104)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log(104)}{\log(3)}$

d'où : $S = \left\{\dfrac{\log(104)}{\log(3)}\right\}$.

2. $9^x < 5{,}1 \Leftrightarrow \log(9^x) < \log(5{,}1)$ car log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\Leftrightarrow x\log(9) < \log(5{,}1)$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{\log(5{,}1)}{\log(9)}$ car $\log(9) > 0$ puisque $9 > 1$.

D'où : $S = \left]-\infty\,;\dfrac{\log(5{,}1)}{\log(9)}\right[$.

3. $0{,}6^x < 34 \Leftrightarrow \log(0{,}6^x) < \log(34)$ car log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\Leftrightarrow x\log(0{,}6) < \log(34)$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\log(34)}{\log(0{,}6)}$ car $\log(0{,}6) < 0$ puisque $0 < 0{,}6 < 1$.

D'où : $S = \left]\dfrac{\log(34)}{\log(0{,}6)}\,;+\infty\right[$.

Exercice résolu B

1 Résoudre l'équation $x^{7,2} = 1789$.

2 Résoudre l'inéquation $x^{-4} \geqslant 28$.

SOLUTION

1. $x^{7,2} = 1789 \Leftrightarrow \log(x^{7,2}) = \log(1789)$

$\Leftrightarrow 7{,}2\log(x) = \log(1789)$

$\Leftrightarrow \log(x) = \dfrac{\log(1789)}{7{,}2}$

$\Leftrightarrow 10^{\log(x)} = 10^{\frac{\log(1789)}{7,2}}$

$\Leftrightarrow x = 10^{\frac{\log(1789)}{7,2}}$

D'où : $S = \left\{10^{\frac{\log(1789)}{7,2}}\right\}$.

2. $x^{-4} \geqslant 28 \Leftrightarrow \log(x^{-4}) \geqslant \log(28)$ car log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\Leftrightarrow -4\log(x) \geqslant \log(28)$

$\Leftrightarrow \log(x) \leqslant \dfrac{\log(28)}{-4}$

$\Leftrightarrow 10^{\log(x)} \leqslant 10^{\frac{\log(28)}{-4}}$ car la fonction exponentielle de base 10 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x \leqslant 10^{\frac{\log(28)}{-4}}$

D'où : $S = \left]-\infty\,; 10^{\frac{\log(28)}{-4}}\right[$.

Exercices d'application directe

4 Résoudre l'équation $27^x = 31\,681$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

5 Résoudre l'équation $0{,}19^x = 35$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

6 Résoudre l'inéquation $0{,}2^x > 71$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

7 Résoudre l'inéquation $88^x \leqslant 6{,}3$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

8 Résoudre l'inéquation $254^x < 0{,}1$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

9 Résoudre l'inéquation $0{,}99^x \geqslant 736$.

....

....

....

....

D'où : S = ...

10 Résoudre l'équation $x^{-61,2} = 237$.

D'où : S = ……

11 Résoudre l'équation $x^{225} = 318\,468$.

D'où : S = ……

12 Résoudre l'inéquation $x^{81} \geqslant 46\,382,5$.

D'où : S = ……

13 Résoudre l'inéquation $x^{-13} < 974$.

D'où : S = ……

14 Résoudre l'inéquation $x^{-0,6} < 78,4$.

D'où : S = ……

15 Résoudre l'inéquation $x^{38} < 166\,498,9$.

D'où : S = ……

16 Résoudre l'équation $6^{x} = 256$.

17 Résoudre l'équation $x^{-1,9} = 27,3$.

18 Résoudre l'inéquation $3,3^{x} \geqslant 144$.

19 Résoudre l'inéquation $x^{5,8} \geqslant 91$.

20 Résoudre l'inéquation $x^{-8} < 816$.

21 Résoudre les équations suivantes.

a. $10^x = 500$ **b.** $2^x = 2048$ **c.** $7^x = 343$

22 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^5 = 500$
b. $x^3 = 1\,728$
c. $x^2 = 0{,}9\,025$
d. $x^{10} = 59\,049$

23 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^3 = 0{,}006\,859$
b. $x^2 = 0{,}5\,929$
c. $x^4 = 1\,296$
d. $x^4 = 311{,}1\,696$
e. $x^6 = 46\,656$

24 Résoudre les équations suivantes.

a. $8^x = 32768$
b. $12^x + 1^3 = 1729$
c. $10^3 + 9^x = 1729$
d. $6^x + 1 = 7777$

25 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $8^x \leqslant 32\,768$
b. $11^x < 1\,331$
c. $5^x \geqslant 15\,625$
d. $1{,}2^x > 2{,}0736$

26 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $3^x \leqslant 243$
b. $12^x < 1\,728$
c. $11^x \geqslant 14\,641$
d. $1{,}9^x > 3{,}61$

27 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^3 \leqslant 50{,}653$
b. $x^5 < 371\,293$
c. $x^4 \geqslant 4\,304{,}6\,721$
d. $x^2 > 400 - 39$

28 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^7 \leqslant 128$
b. $x^3 < 91{,}125$
c. $x^2 \geqslant 90 - 9$
d. $x^4 > 72 + 9$

29 Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

a. $2^x = 8$; $3^x = 9$ et $4^x = 10$.
b. $2^x < 8$; $3^x < 9$ et $4^x < 10$.
c. $x^5 = 729$; $x^6 = 729$ et $x^7 = 729$.
d. $x^5 > 729$; $x^6 > 729$ et $x^7 > 729$.

30 Calculer à la main les nombres suivants.

a. $10^{\log(9)}$
b. $10^{\log\left(\frac{100}{25}\right)} \times 10^{\log(1)}$
c. $\dfrac{10^{\log(\sqrt{0{,}01})}}{10^{\log(0{,}0001)}}$
d. $\log(10^{2{,}7})$
e. $\log(10^3) + \log(10^{-\sqrt{9}})$
f. $\log(10^{36}) \times \log(10^{-6})$

31 Calculer à la main les nombres suivants.

a. $\log\left(\dfrac{10 \times 100}{10^4}\right)$
b. $10^{\log(7)}$
c. $10^{\log\left(\frac{125}{25}\right)} \times 10^{\log(1)}$
d. $\log(2 \times 54 \times \sqrt{64})$
e. $\sqrt{\log(10^9)}$

32 On place une somme donnée sur un livret qui rapporte 1 % d'intérêts nets par an (les intérêts sont composés). On cherche à savoir combien d'années seront nécessaires pour doubler son capital.

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $1{,}01^n \geqslant 2$.
b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

33 Soit x un réel strictement positif. Écrire les nombres suivants sous la forme $n + k \times \log(x)$ où n et k sont des entiers relatifs.

a. $A = \log(10x)$
b. $B = \log(1000x)$
c. $C = \log(0{,}01x)$
d. $D = \log(0{,}1x) + \log(100x) + \log(0{,}001x)$
e. $E = \log(2000x) - \log(2x) + \log(1000x)$
f. $F = \log(0{,}002x) + \log(50x)$
g. $G = \log(14x) - \log(70x) + \log(500x)$
h. $H = \log(10^4x) + \log(10^3x) + \log(10^2x) + \log(10^1x)$

34 Soit x un réel strictement positif. Écrire les nombres suivants sous la forme $k \cdot \log(x)$ où k est un entier relatif.

a. $A = \log(x^5)$
b. $B = 2\log(x^3) - \log(x^{10})$
c. $C = 20 + 5\log\left(\dfrac{x^{11}}{10^4}\right) - 3\log(x^{17})$

35 Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel, montrer qu'alors $\log\left(\dfrac{1}{a^n}\right) = -n \times \log(a)$.

36 On rappelle pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif tel que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

a. Soit a un réel strictement positif. Déterminer une écriture de $\log(a)$ en fonction de $\log(\sqrt{a})$.
b. En déduire une écriture de $\log(\sqrt{a})$ en fonction de $\log(a)$.
c. Soit a un réel strictement positif. Déterminer une écriture de $\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ en fonction de $\log(a)$.

37 Sur $]0\,;+\infty[$, on définit la fonction cologarithme notée colog par $\text{colog}(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. Combien vaut colog(1000) ?
b. Combien vaut colog(0,01) ?
c. Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer qu'alors $\text{colog}(ab) = \text{colog}(a) + \text{colog}(b)$.
d. Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer qu'alors $\text{colog}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \text{colog}(a) - \text{colog}(b)$.

38 **Logarithme décimal et pH en chimie**

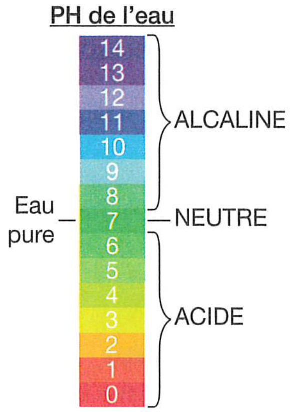
Calculer

En chimie des solutions, il existe un indicateur d'acidité appelé *potentiel hydrogène* et noté pH. Il est défini à partir d'un logarithme décimal comme suit : $pH = -\log([H^+])$ où $[H^+]$ désigne la concentration en ions hydrogènes.
Les pH inférieurs à 7 désignent des milieux acides, les pH supérieurs à 7 désignent des milieux basiques.
On peut par exemple se poser les questions suivantes :

Exercices d'approfondissement

a. Sachant que, dans le jus de citron, la concentration en ions hydrogène est d'environ 0,003162, déterminer le pH du jus de citron.

b. Sachant que le pH de l'eau de mer est de 8,2, déterminer la concentration en ions hydrogène dans l'eau de mer.

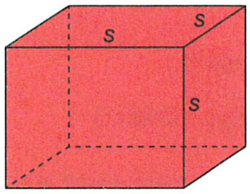


39 On considère un cube dont les côtés sont de longueur s.

a. Si a est strictement positif, démontrer que $a^b = 10^{b\log(a)}$.

b. Quelle est la valeur maximale de s pour que le volume d'un tel cube ne dépasse pas 512 ?

c. Quelle est la valeur maximale de s pour que la surface totale de ses faces ne dépasse pas 486 ?



40 Louis et Manon sont deux élèves qui ont écrit une succession d'inégalités. Chacun a commis une erreur.
Ainsi, Louis démontre que $32 < 16$ et Manon, quant à elle, trouve que $10 > 16$.
Pour chacun d'entre eux, justifier les étapes justes de leur raisonnement et repérer l'erreur.

a. Production de Louis

$$5 > 4$$
$$\Rightarrow 5\log\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) > \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right) > \left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{32 < 16}$$

b. Production de Manon

$$5 > 4$$
$$\Rightarrow 5\log\left(\frac{1}{2}\right) < 4\log\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) < \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right) < \left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{10 > 16}$$

41 Inflation de l'essence

Chercher – Calculer

En 2020, un litre d'essence coûte 1,50 €. On estime que chaque année ce prix subit une inflation de 3 %. On veut savoir en quelle année, notée n, le prix dépassera 1,70 € selon ce modèle.

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $1{,}5 \times 1{,}03^{n-2020} \geqslant 1{,}7$.

b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

42 Prix d'une heure de téléphone

Calculer – Chercher

Le coût moyen du prix d'une heure de téléphone vaut en moyenne 1,31 € en 2020 chez les principaux opérateurs. Ce prix bas résulte d'une diminution des coûts de 20 % par an du fait des progrès technologiques. On souhaite savoir quelle était la dernière année, notée n, où le prix d'une heure de téléphone dépassait les 5 €.

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $\dfrac{1{,}31}{0{,}8^{2020-n}} > 5$.

b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

43 Taux moyen de placement

Raisonner – Calculer

Un particulier place 1 000 € en intérêts composés à un taux annuel de t %. Au bout de 7 ans, son capital s'élève à 1 407,10 €.

1. a. Déterminer le taux t du placement.

b. Quel serait le capital du client si celui-ci avait épargné une 8e année ?

c. Calculer le nombre d'années qu'il aurait fallu à ce particulier pour au moins doubler sa mise ?

2. Déterminer si placer son argent (en intérêts composés) pendant deux ans à 7 % puis deux ans à 3 % revient au même que de le placer à 5 % pendant 4 ans.

44 Vétusté d'un véhicule

Modéliser – Calculer

En 2020, un particulier achète une voiture neuve 12 000 € et dépense 300 € pour son entretien.
On estime que, chaque année la valeur de la voiture diminue de 20 % et que les frais d'entretien augmentent dans le même temps de 10 %. Le but du problème est de déterminer à partir de quand la voiture coûte plus cher en entretien que sa valeur marchande.

1. a. Exprimer v_n la valeur marchande de la voiture l'année $2020 + n$.

b. Exprimer c_n le coût de l'entretien de la voiture l'année $2020 + n$.

2. Dire à partir de combien d'années la voiture vaut moins que la moitié de son prix d'achat.

3. Déterminer à partir de combien d'années la voiture coûte plus que 550 € d'entretien.

4. Montrer que pour résoudre le problème, on est amené à résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1{,}1}{0{,}8}\right)^n > 40$.

5. Répondre finalement au problème posé.

PYTHON

1 Intérêts composés

SITUATION

Un financier place une somme de 20 millions d'euros dans un paradis fiscal au taux de 3 % annuel (en intérêts composés). Il compte immobiliser cet argent jusqu'à ce qu'il obtienne une somme de 25 millions d'euros.

⇨ **Le but du problème est de déterminer le nombre d'années où il devra placer son argent.**

A Avec un algorithme

On travaillera, dans la suite, en millions d'euros.

On a programmé la fonction suivante :

```
Fonction Intérêts(n)
    K← 20
    n← 0
        Tant que K < 25
            n← n+1
            K← 20 × 1,03ⁿ
        Fin Tant que
    Retourner n
Fin Fonction
```

1 Expliquer la ligne $n \leftarrow n+1$ de l'algorithme.

2 Expliquer la ligne $K \leftarrow 20 \times 1{,}03^n$ de l'algorithme.

3 Expliquer ce que retourne la fonction *Intérêts(n)*.

4 Programmer et faire tourner cet algorithme avec Python et répondre au problème posé.

B Avec le tableur

On considère la feuille de calculs ci-contre :

	A	B
1	0	20
2	1	20,6
3	2	21,218
4	3	21,85454

1 Quelle formule a été saisie en A2, puis tirée vers le bas ?

2 Quelle formule a été saisie en B2, puis tirée vers le bas ?

3 Répondre au problème posé et retrouver le résultat de la partie **A**.

Pour aller plus loin

Autre méthode de résolution

On note K_n le capital du financier après n années de placement.

1 Déterminer K_1 et K_2.

2 Exprimer K_n en fonction de n.

3 Montrer que, pour résoudre le problème, il suffit de résoudre l'inéquation $1{,}03^n \geqslant 1{,}25$.

4 Montrer que l'équation précédente est équivalente à $n \times \log(1{,}03) \geqslant \log(1{,}25)$.

5 Déterminer finalement le nombre d'années nécessaires au financier pour dépasser les 25 millions d'euros.

Travaux pratiques

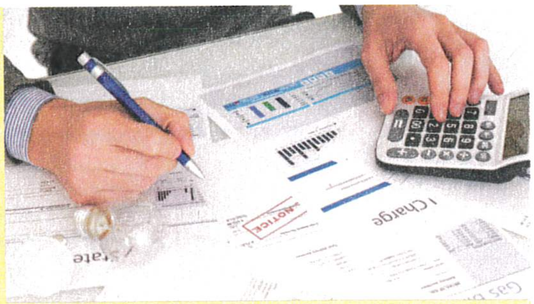
TABLEUR 2 Prix du gaz

SITUATION

Un étudiant paie ses factures de gaz à la fin de chaque année et s'aperçoit qu'il a dépensé à l'année 2016 + n la somme de :

$f(n) = 120 + 15\log(n+25)$ euros.

⇨ **Le but du TP est d'étudier l'évolution de prix de ses factures de gaz.**



Il fait un relevé de ses factures entre 2016 et 2020 sur tableur et obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2016	2017	2018	2019	2020
2	Facture de gaz (en euros)	140,97	141,22	141,47	141,71	
3	Hausse en pourcentage d'une année sur l'autre					

1. Calculer la facture que l'étudiant devra payer en 2020.

2. Quelle formule a été saisie en C2, puis tirée vers la droite ?

3. Déterminer si les sommes payées chaque année sont les termes d'une suite arithmétique.

4. Quel pourcentage de hausse représente le fait de passer d'une facture de 140,97 euros en 2016 à une facture de 141,22 euros en 2017 ?

5. Quelle formule doit-on écrire en C3, à tirer vers la droite pour calculer les pourcentages de hausse demandés ?

6. Créer un nuage de points représentant les montants payés en fonction des années.

7. On veut calculer dans la cellule D6 le montant total des sommes depensées entre 2016 et 2020 par l'étudiant pour ses factures. Quelle formule peut être écrite dans la cellule D6 ? Quelle sera alors cette somme ?

Pour aller plus loin

7. Utiliser le tableur pour déterminer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, l'étudiant dépensera plus de 143 euros.

8. Créer, sur le tableur, une quatrième ligne donnant le cumul de ses factures jusqu'à l'année 2016 + n.

9. Afficher également le graphique de ce cumul. Est-ce une droite ?