Terminale

CHAPITRE 3

THÈME 1 / Analyse

Fonctions exponentielles

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/kyqv1r

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Calculer 15 % de 50 €.

2. Calculer $\frac{1}{3}$ de 36 % sous forme fractionnaire.

Évolution et variations

3. Augmenter de 0,75 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 320 quand il a baissé de 60 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 15 à 10 ? Arrondir à 10^{-2}.

6. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a diminué de 20 % puis de 40 % ?

7. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une hausse de 100 %.

Calculs numériques et algébriques

8. Simplifier $B = 5^7 \times 5^{-2}$.

9. 856 élèves sont inscrits dans un lycée. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'élèves dans ce lycée ?

10. Convertir 52 L en m^3.

11. Résoudre $-2x \leqslant 4x - 12$.

12. On donne $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$. Exprimer V_D en fonction de t et V_A.

13. Le coût moyen de production C_M est donné par la formule suivante, où C_T représente le coût total de production et N représente le nombre d'objets produits. Calculer le coût moyen de production sachant que $C_T = 1\,500$ et $N = 30$.

14. Développer et réduire $B = -(x + 2)^2$.

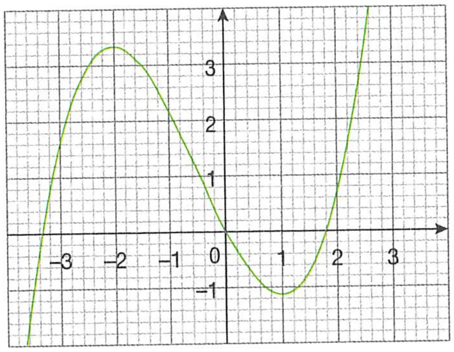
15. Dériver $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Fonctions et représentations

17. Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$.

a. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b. Donner une valeur approchée de $f(-3)$.
c. Déterminer $f'(-2)$.

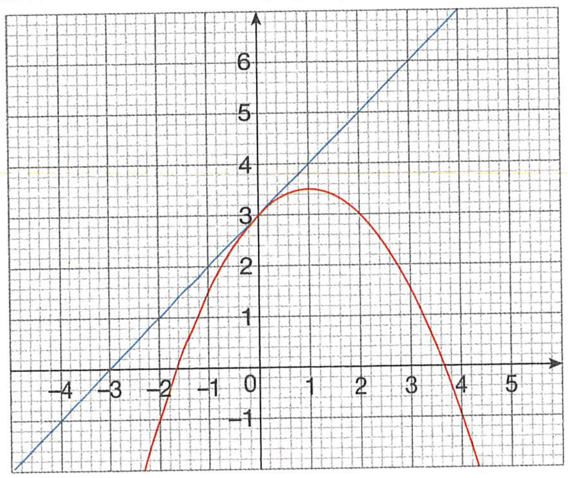


18. Construire le tableau de signes de $-5(x + 2)(x - 7)$.

19. Le point A(–3 ; 20) appartient-il à la courbe d'équation $y = -x^3 - x^2 - x - 1$?

20. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = -x + 2$.

21. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(1)$.



1 Étudier les variations des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$

On utilise les propriétés sur le sens de variation des fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$.

- **Si $a \in]0\,;1[$:**

– la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante.

– plus a est proche de 0, plus la décroissance de la fonction $x \mapsto a^x$ est rapide.

- **Si $a > 1$:**

– la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.

– plus a est grand, plus la croissance de la fonction $x \mapsto a^x$ est rapide.

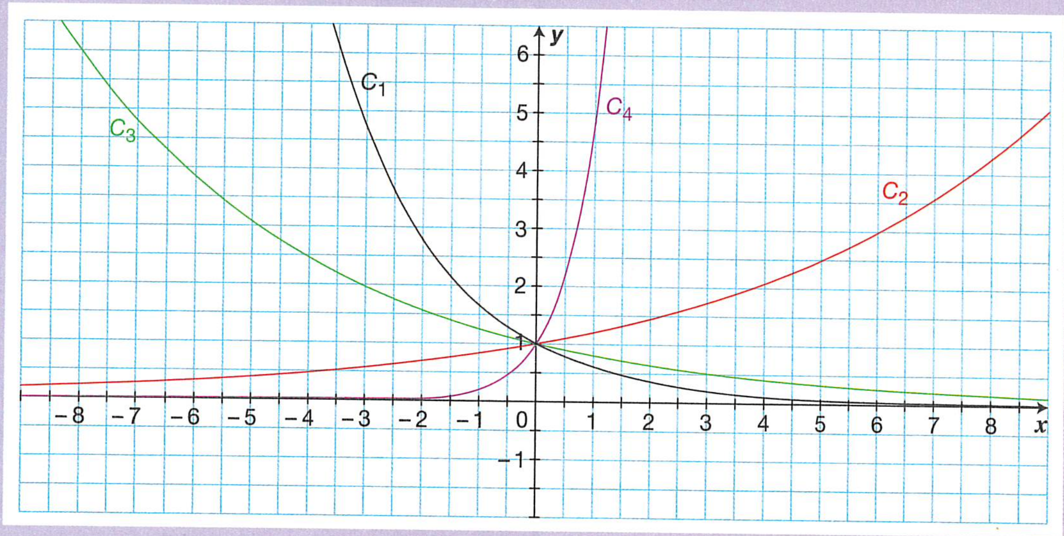
De plus :

- si $k > 0$, les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto ka^x$ ont le même sens de variation.
- si $k < 0$, les fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto ka^x$ ont des sens de variation opposés.

Exercice résolu A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes des fonctions f, g, h, et i définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

- $f(x) = 1{,}2^x$
- $g(x) = 5{,}1^x$
- $h(x) = 0{,}6^x$
- $i(x) = 0{,}8^x$



Associer à chaque fonction le nom de sa courbe représentative.
On justifiera soigneusement la réponse.

SOLUTION

Les courbes des fonctions f et g sont strictement croissantes car $1{,}2 > 1$ et $5{,}1 > 1$.

Les courbes des fonctions h et i sont strictement décroissantes car $0 < 0{,}6 < 1$ et $0 < 0{,}8 < 1$.

De plus :

- $5{,}1 > 1{,}2$ donc la fonction g croît plus vite que la fonction f.
- $0{,}6 < 0{,}8$ donc la fonction h décroît plus vite que la fonction i.

D'où :

- la courbe C_2 représente la fonction f.
- la courbe C_4 représente la fonction g.
- la courbe C_1 représente la fonction h.
- la courbe C_3 représente la fonction i.

Exercice résolu B

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = 0{,}954^x$ **b.** $g(x) = 3{,}31^x$
c. $h(x) = 1{,}012^x$ **d.** $i(x) = 0{,}5^x$
e. $k(x) = -5{,}3 \times 13{,}16^x$ **f.** $\ell(x) = 2 \times 0{,}18^x$
g. $m(x) = -87 \times 0{,}21^x$ **h.** $n(x) = 0{,}1981 \times 47{,}44^x$

SOLUTION

a. $0 < 0{,}954 < 1$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. $3{,}31 > 1$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $1{,}012 > 1$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d. $0 < 0{,}5 < 1$ donc i est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e. $13{,}16 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 13{,}16^x$ est strictement croissante.
Or $-5{,}3 < 0$.
Donc k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

f. $0 < 0{,}18 < 1$ donc la fonction $x \mapsto 0{,}18^x$ est strictement décroissante.
Or $2 > 0$.
Donc ℓ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

g. $0 < 0{,}21 < 1$ donc la fonction $x \mapsto 0{,}21^x$ est strictement décroissante.
Or $-87 < 0$.
Donc m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h. $47{,}44 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 47{,}44^x$ est strictement croissante.
Or $0{,}1981 > 0$.
Donc n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice résolu C

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux nombres sans calculatrice :

a. $0{,}954^{1,2}$ et $0{,}954^{28}$. **b.** $88{,}4^{100}$ et $88{,}4^{24,63}$.
c. $33^{-8,4}$ et $33^{1,7}$. **d.** $0{,}1^{-27,69}$ et $0{,}1^{-27}$.

SOLUTION

a. $0 < 0{,}954 < 1$ donc $x \mapsto 0{,}954^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Or $1{,}2 < 28$.
D'où $0{,}954^{1,2} > 0{,}954^{28}$.

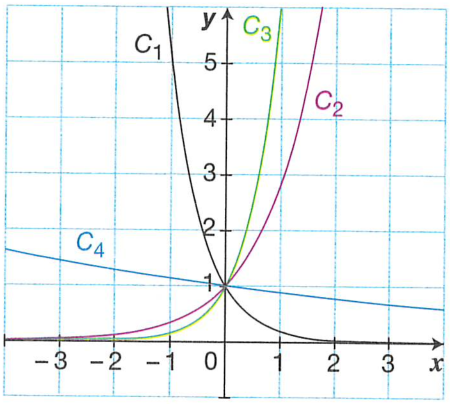
b. $88{,}4 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 88{,}4^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $100 > 24{,}63$.
D'où $88{,}4^{100} > 88{,}4^{24,63}$.

c. $33 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 33^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $-8{,}4 < 1{,}7$.
D'où $33^{-8,4} < 33^{1,7}$.

d. $0 < 0{,}1 < 1$ donc la fonction $x \mapsto 0{,}1^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Or $-27{,}69 < -27$.
D'où $0{,}1^{-27,69} > 0{,}1^{-27}$.

Exercices d'application directe

1 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes des fonctions f, g, h, et k définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :
- $f(x) = 0{,}89^x$
- $g(x) = 0{,}2^x$
- $h(x) = 6{,}3^x$
- $k(x) = 2{,}8^x$



Associer à chaque fonction le nom de sa courbe représentative. On justifiera soigneusement la réponse.

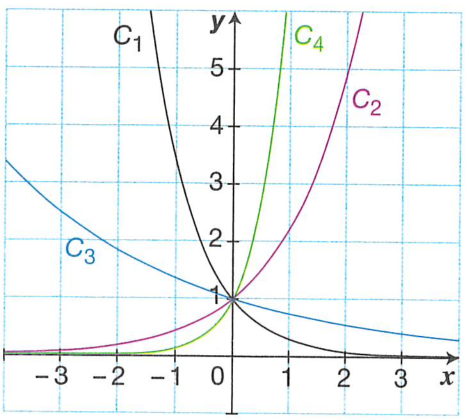
Les courbes des fonctions .... et .... sont strictement croissantes car .... et ....

Les courbes des fonctions .... et .... sont strictement décroissantes car .... et ....

De plus :
- .... > .... donc la fonction .... croît plus vite que la fonction ....
- .... < .... donc la fonction .... décroît plus vite que la fonction ....

D'où :
- la courbe .... représente la fonction f.
- la courbe .... représente la fonction g.
- la courbe .... représente la fonction h.
- la courbe .... représente la fonction k.

2 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :
- $f_1(x) = 0{,}74^x$
- $f_2(x) = 7{,}2^x$
- $f_3(x) = 0{,}3^x$
- $f_4(x) = 2{,}19^x$



Associer à chaque fonction le nom de sa courbe représentative. On justifiera soigneusement la réponse.

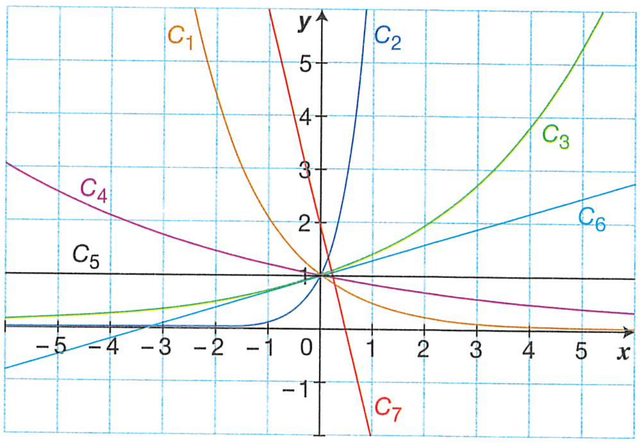
Les courbes des fonctions .... et .... sont strictement croissantes car .... et ....

Les courbes des fonctions .... et .... sont strictement décroissantes car .... et ....

De plus :
- .... > .... donc la fonction .... croît plus vite que la fonction ....
- .... < .... donc la fonction .... décroît plus vite que la fonction ....

D'où :
- la courbe .... représente la fonction f_1.
- la courbe .... représente la fonction f_2.
- la courbe .... représente la fonction f_3.
- la courbe .... représente la fonction f_4.

3 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 et f_7 définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :
- $f_1(x) = 8{,}22^x$
- $f_2(x) = -4x + 2$
- $f_3(x) = 0{,}48^x$
- $f_4(x) = 1^x$
- $f_5(x) = 0{,}3x + 1$
- $f_6(x) = 1{,}4^x$
- $f_7(x) = 0{,}83^x$



Associer à chaque fonction le nom de sa courbe représentative. On justifiera soigneusement la réponse.

La courbe de la fonction .... est horizontale car cette fonction est ....

Donc la courbe .... représente la fonction ....

Les courbes des fonctions .... et .... sont des droites car les fonctions sont ....

De plus :
- la fonction .... admet un coefficient directeur strictement positif.

• la fonction ...... admet un coefficient directeur strictement négatif.

D'où :

• la courbe ...... représente la fonction ......

• la courbe ...... représente la fonction ....

Les courbes des fonctions ...... et ...... sont strictement croissantes car ...... et ....

Les courbes des fonctions ...... et ...... sont strictement décroissantes car ...... et ....

De plus :

• ...... > ...... donc la fonction ...... croît plus vite que la fonction ......

• ...... < ...... donc la fonction ...... décroît plus vite que la fonction ....

D'où :

• la courbe ...... représente la fonction f_1.
• la courbe ...... représente la fonction f_2.
• la courbe ...... représente la fonction f_3.
• la courbe ...... représente la fonction f_4.
• la courbe ...... représente la fonction f_5.
• la courbe ...... représente la fonction f_6.
• la courbe ...... représente la fonction f_7.

4 Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = 24{,}5^x$
b. $g(x) = 0{,}6^x$
c. $h(x) = 0{,}999^x$
d. $i(x) = 1{,}001^x$
e. $k(x) = 6{,}7 \times 1{,}082^x$
f. $\ell(x) = -5{,}11 \times 104^x$
g. $m(x) = 0{,}83 \times 0{,}96^x$
h. $n(x) = -119 \times 2{,}1416^x$
i. $o(x) = 14 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x$
j. $p(x) = -51 \times \left(\frac{7}{6}\right)^x$

a. $24{,}5 > 1$

donc f est ...... sur $\mathbb{R}$.

b. $0 < 0{,}6 < 1$

donc g est ...... sur $\mathbb{R}$.

c. ......

donc h est ...... sur $\mathbb{R}$.

d. ......

donc i est ...... sur $\mathbb{R}$.

e. $1{,}082 > 1$

donc la fonction $x \mapsto 1{,}082^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or $6{,}7 > 0$.

Donc k est ...... sur $\mathbb{R}$.

f. ......

donc la fonction $x \mapsto 104^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or ......

Donc ℓ est ...... sur $\mathbb{R}$.

g. $0 < 0{,}96 < 1$

donc la fonction $x \mapsto 0{,}96^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or ......

Donc m est ...... sur $\mathbb{R}$.

h. $2{,}1416 > 1$

donc la fonction $x \mapsto 2{,}1416^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or ......

Donc n est ...... sur $\mathbb{R}$.

i. ......

donc la fonction $x \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or ......

Donc o est ...... sur $\mathbb{R}$.

j. ......

donc la fonction $x \mapsto \left(\frac{7}{6}\right)^x$ est ...... sur $\mathbb{R}$.

Or ......

Donc p est ...... sur $\mathbb{R}$.

5 Dans chacun des cas suivants, comparer les deux nombres sans calculatrice.

a. $892^{3{,}15}$ et $892^{2{,}49}$.
b. $0{,}7^{28{,}7}$ et $0{,}7^{113}$.
c. $0{,}96^{-4}$ et $0{,}96^{-3{,}9}$.
d. $1{,}01^{-60}$ et $1{,}01^{0{,}03}$.

a. $892 > 1$

donc $x \mapsto 892^x$ est ......

Or $3{,}15 > 2{,}49$.

D'où $892^{3{,}15}$ ...... $892^{2{,}49}$.

b. ......

donc la fonction $x \mapsto 0{,}7^x$ est ......

Or $28{,}7$ ...... 113.

D'où $0{,}7^{28{,}7}$ ...... $0{,}7^{113}$.

c. ......

donc la fonction $x \mapsto 0{,}96^x$ est ......

Or -4 ...... $-3{,}9$.

D'où $0{,}96^{-4}$ ...... $0{,}96^{-3{,}9}$.

d. ......

donc la fonction $x \mapsto 1{,}01^x$ est ......

Or -60 ...... $0{,}03$.

D'où $1{,}01^{-60}$ ...... $1{,}01^{0{,}03}$.

2 Utiliser les propriétés algébriques des fonctions exponentielles

On applique les formules suivantes :
Soit a et b deux nombres strictement positifs et x et y deux nombres réels.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Exercice résolu D

Simplifier les expressions suivantes.

a. $3^{1,2} \times 3^{6,5}$ **b.** $\dfrac{4,7^{-9,1}}{4,7^{8,3}}$ **c.** $11^{0,4} \times 9^{0,4}$

d. $\dfrac{1}{163^{-27,54}}$ **e.** $(35,1^{-13})^{8,2}$ **f.** $\dfrac{12^{-72,3}}{4^{-72,3}}$

SOLUTION

a. $3^{1,2} \times 3^{6,5} = 3^{1,2+6,5} = 3^{7,7}$

b. $\dfrac{4,7^{-9,1}}{4,7^{8,3}} = 4,7^{-9,1-8,3} = 4,7^{-17,4}$

c. $11^{0,4} \times 9^{0,4} = (11 \times 9)^{0,4} = 99^{0,4}$

d. $\dfrac{1}{163^{-27,54}} = 163^{27,54}$

e. $(35,1^{-13})^{8,2} = 35,1^{-13\times 8,2} = 35,1^{-106,6}$

f. $\dfrac{12^{-72,3}}{4^{-72,3}} = \left(\dfrac{12}{4}\right)^{-72,3} = 3^{-72,3}$

Exercices d'application directe

6 Simplifier les expressions suivantes.

a. $9,8^{3,3} \times 20^{3,3} =$ ....

b. $\dfrac{2^{23,1}}{2^5} =$ ....

c. $12,6^{-80,1} \times 12,6^{4,6} =$ ....

d. $\dfrac{1}{\pi^{-16,85}} =$ ....

e. $\dfrac{68^{13,6}}{68^{5,5}} =$ ....

f. $(1,23^4)^{-2,5} =$ ....

7 Soit x un nombre réel. Écrire les nombres suivants sous la forme a^x avec a un réel tel que $a > 0$.

a. $14^x \times 3^x =$ ....
$=$ ....

b. $8^x \times 2^{5x} =$ ....
$=$ ....

c. $6^{5x} \times 4^{-3x} =$ ....
$=$ ....

d. $2^{3x} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^x =$ ....
$=$ ....

e. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x} \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^x =$ ....
$=$ ....

8 Soit x un nombre réel.
Développer et simplifier les expressions suivantes.

a. $A = 6^x(7^x - 8^x) =$ ....
$=$ ....

b. $B = (4^x + 3) \times (4^x - 3^x) =$ ....
$=$ ....

c. $C = (2^x - 1) \times (2^x + 1) =$ ....
$=$ ....

d. $D = (0,6^{2x} - 1) \times (1 - 0,5^x) =$ ....
$=$ ....

9 Soit x un nombre réel.
Écrire les expressions suivantes sous la forme $2^\alpha \times 3^\beta$ où α et β désignent des nombres réels.

a. $A = 6^x =$ ....

b. $B = 24^x =$ ....

c. $C = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x =$ ....

d. $D = \left(\dfrac{8}{3}\right)^x =$ ....

e. $E = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x =$ ....

f. $F = 36^x =$ ....

g. $G = \dfrac{72^x}{16^x \times 3^x} =$ ....

3 Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives

Méthode 1 : on considère n évolutions successives de taux moyen t_m et de taux global T.

- On calcule le coefficient multiplicateur global $C = 1 + T$ où T est le taux d'évolution global.
- On rappelle que les coefficients multiplicateurs se multiplient (comme leur nom l'indique).
- On écrit alors la relation $(C_m)^n = C$ où C_m est le coefficient multiplicateur moyen.
- On en déduit que $(1 + t_m)^n = 1 + T$.

Puis $1 + t_m = (1 + T)^{\frac{1}{n}}$.

Et enfin, $t_m = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$.

Méthode 2 : on applique directement la formule

$t_m = (C^{\frac{1}{n}} - 1) = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$ (avec les notations précédentes).

Attention

Même si l'on applique la méthode 2, il est bien plus prudent de connaître la méthode 1 pour savoir retrouver la formule en cas d'oubli !

Exercice résolu E

Le prix du timbre est passé de 0,46 € en 2002 à 1,16 € en 2020.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen à 0,1 % près.

SOLUTION

- **Avec la méthode 1 :**

Le taux global est $T = \dfrac{V_{\text{arrivée}} - V_{\text{départ}}}{V_{\text{départ}}} = \dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}$.

Donc $C = 1 + T = 1 + \dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}$.

Ici, $n = 18$ et puisque les coefficients multiplicateurs se multiplient, on a $(C_m)^{18} = C$.

On a donc $(1 + t_m)^{18} = 1 + \dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}$.

Puis $1 + t_m = 1 + \left(\dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}\right)^{\frac{1}{18}}$.

Et enfin, $t_m = \left(\dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}\right)^{\frac{1}{18}} - 1 \approx 0,053 = 5,3\ \%$.

- **Avec la méthode 2 :**

On applique directement la formule $t_m = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$.

$t_m = \left(\dfrac{1,16 - 0,46}{0,46}\right)^{\frac{1}{18}} - 1 \approx 0,053 = 5,3\ \%$

Exercice résolu F

Lors des cinq dernières années, un placement financier dans un fonds d'investissement a eu les rendements suivants : +3 % ; +1,8 % ; +2,1 % ; –0,4 % ; +2,6 %.
Calculer le rendement annuel moyen sur les cinq dernières années à 0,1 % près.

SOLUTION

- **Avec la méthode 1 :**

Le coefficient multiplicateur global est :

$$C = \left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{1,8}{100}\right)\left(1 + \frac{2,1}{100}\right)\left(1 + \frac{0,4}{100}\right)\left(1 + \frac{2,6}{100}\right)$$
$$= 1,03 \times 1,018 \times 1,021 \times 0,996 \times 1,026$$

Ici, $n = 5$ et puisque les coefficients multiplicateurs se multiplient, on a $(C_m)^5 = C$.

On a donc $(1 + t_m)^5 = 1,03 \times 1,018 \times 1,021 \times 0,996 \times 1,026$.

Donc $1 + t_m = (1,03 \times 1,018 \times 1,021 \times 0,996 \times 1,026)^{\frac{1}{5}}$

donc $t_m = (1,03 \times 1,018 \times 1,021 \times 0,996 \times 1,026)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0,018 = 1,8\ \%$

- **Avec la méthode 2 :**

On applique directement la formule : $t_m = C^{\frac{1}{n}} - 1$.

$$t_m = \left(\left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{1,8}{100}\right)\left(1 + \frac{2,1}{100}\right)\left(1 + \frac{0,4}{100}\right)\left(1 + \frac{2,6}{100}\right)\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$
$$\approx 0,018 = 1,8\ \%$$

Exercices d'application directe

10 Le prix moyen du mètre carré à Paris est passé de 7 980 € en 2015 à 10 877 € en 2022.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen à 0,1 % près.

- Avec la méthode 1 :

Le taux global est T = ...

Donc C = ...

Ici, n = ... et puisque les coefficients multiplicateurs se multiplient, on a $(C_m)^{\cdots\cdots}$ = C.

On a donc $(1 + t_m)^{\cdots\cdots}$ = ...

Puis $1 + t_m$ = ...

Et enfin, t_m = ...

≈ .... = ... %

- Avec la méthode 2 :

On applique directement la formule :

t_m = ...

= ....

≈ .... = ... %

11 Le prix du litre de gazole est passé de 1,31 € en janvier 2021 à 1,54 € en décembre 2021.
Calculer le taux d'évolution mensuel moyen à 0,01 % près.

- Avec la méthode 1 :

....

....

....

....

....

....

....

....

- Avec la méthode 2 :

....

....

....

12 Le prix de la baguette de pain est passé de 0,56 € en 1993 à 0,87 € (en moyenne) en 2016.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen à 0,1 % près.

Méthode au choix :

....

....

....

....

....

....

....

13 Le cours d'une action subit les évolutions annuelles suivantes : +1,75 % ; −3,1 % ; −2,9 % ; +0,7 % ; +1,1 % ; +2,5 %.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen à 0,1 % près.

- Avec la méthode 1 :

Le coefficient multiplicateur global est :

C = ...

....

Ici, n = ... et puisque les coefficients multiplicateurs se multiplient, on a $(C_m)^{\cdots\cdots}$ = C.

On a donc $(1 + t_m)^{\cdots\cdots}$ = ...

Puis $1 + t_m$ = ...

Et enfin, t_m = ...

≈ .... = ... %

- Avec la méthode 2 :

On applique directement la formule :

t_m = ...

= ....

≈ .... = ... %

14 En raison de l'exode rural, la population d'un village subit les évolutions annuelles suivantes au cours des six dernières années : −2,1 % ; −4,2 % ; −2,3 % ; −1,5 % ; +0,4 % ; −1,8 %.
Calculer le taux d'évolution annuel moyen à 1 % près.

- Avec la méthode 1 :

Le coefficient multiplicateur global est :

C = ...

....

Ici, n = ... et puisque les coefficients multiplicateurs se multiplient, on a $(C_m)^{\cdots\cdots}$ = C.

On a donc $(1 + t_m)^{\cdots\cdots}$ = ...

Puis $1 + t_m$ = ...

Et enfin, t_m = ...

≈ .... = ... %

- Avec la méthode 2 :

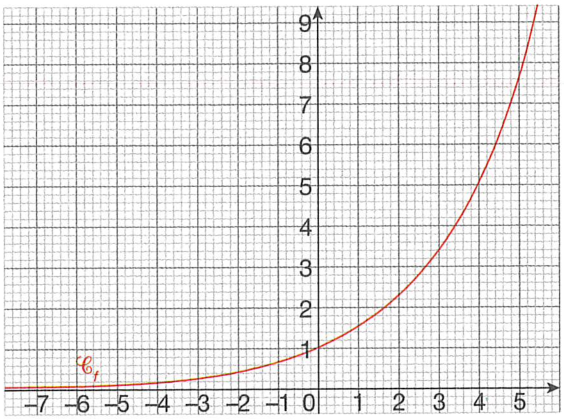
On applique directement la formule :

t_m = ...

= ....

≈ .... = ... %

15 Soit *f* la fonction exponentielle de base 1,05.
On a tracé sa courbe représentative.



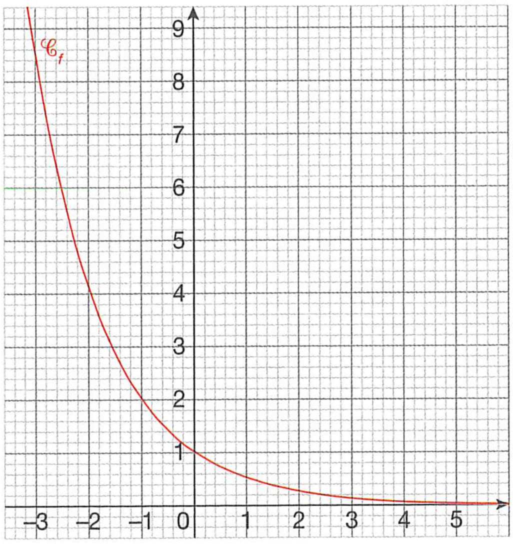
a. Lire graphiquement l'image de 1.

b. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 3.

c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

d. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 4$.

16 Soit *f* la fonction exponentielle de base 0,5.
On a tracé sa courbe représentative.



a. Lire graphiquement l'image de -1.

b. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 5.

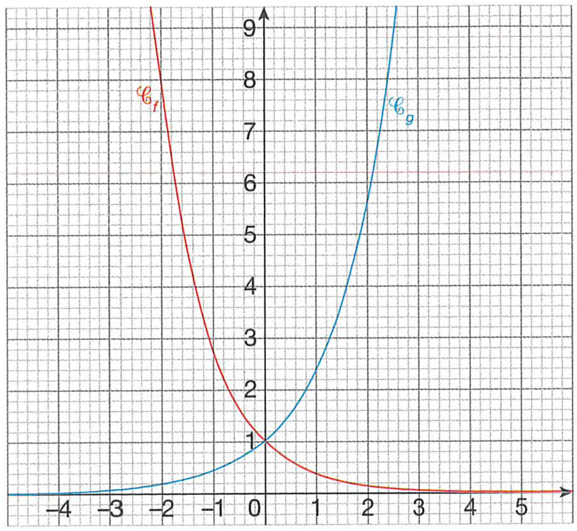
c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 7$.

d. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

17 **Lecture graphique**

Calculer – Chercher

Soient *f* la fonction exponentielle de base 0,36 et *g* la fonction exponentielle de base 2,34. On a tracé leurs courbes représentatives respectives.



a. Lire graphiquement l'image de -2 par *f*.

b. Lire graphiquement l'image de -1 par *g*.

c. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de 4 par *f*.

d. Lire graphiquement le(s) éventuel(s) antécédent(s) de $-\dfrac{1}{2}$ par *g*.

e. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.

f. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 8$.

g. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
Aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

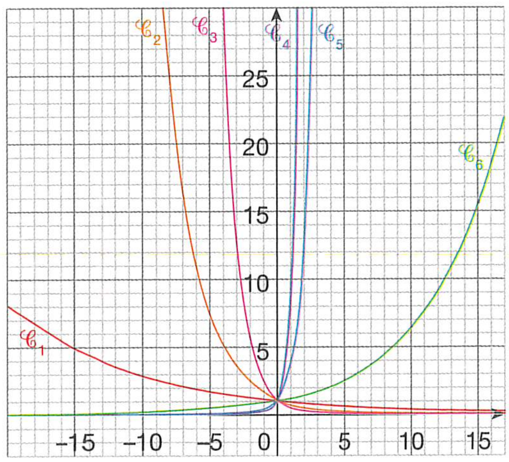
h. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 5$.

i. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > 0$.
Aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

j. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.
Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans le graphique ?

18 Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 0{,}9^x$ $\quad f_3(x) = 0{,}43^x$ $\quad f_5(x) = 0{,}67^x$
$f_2(x) = 1{,}2^x$ $\quad f_4(x) = 3{,}54^x$ $\quad f_6(x) = 8{,}9^x$

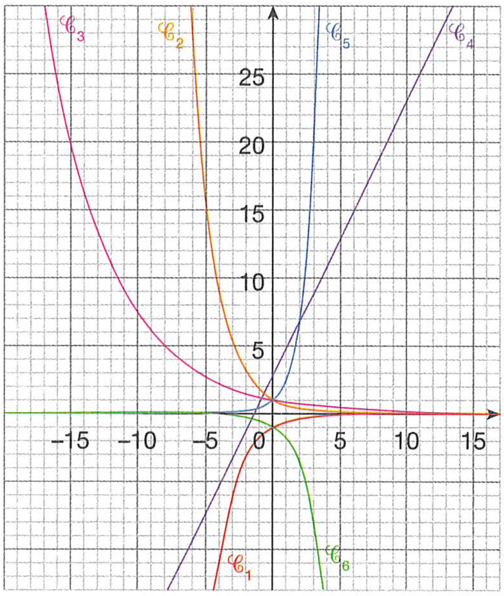


Exercices d'approfondissement

19 Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 2{,}79^x$ $\quad f_3(x) = -2^x$ $\quad f_5(x) = -0{,}56^x$

$f_2(x) = 0{,}82^x$ $\quad f_4(x) = 0{,}58^x$ $\quad f_6(x) = 2x + 3$



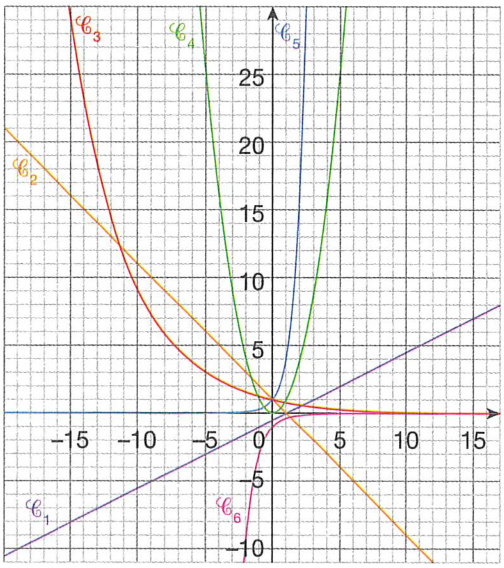
20 Reconnaître la bonne courbe

Raisonner – Communiquer

Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative de différentes fonctions. Associer à chacune d'elle sa courbe représentative. Justifier.

$f_1(x) = 4^x$, $\quad f_2(x) = 1{,}25^{-x}$, $\quad f_3(x) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $\quad f_4(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$,

$f_5(x) = -x + 1$, $\quad f_6(x) = x^2$.



21 Sens de variation

Chercher – Communiquer

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \pi^x$

b. $g : x \mapsto \sqrt{2}^x$

c. $h : x \mapsto (\sqrt{3} - 1)^x$

22 Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : 12^{2x} = 0$

b. $(E_2) : 0{,}6^{x-1} = 0{,}6$

c. $(E_3) : 1{,}75^{x+3} = 1{,}75^5$

23 Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-7} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

b. $(E_2) : 3{,}33^{-x-1} = 3{,}33^{-2x-1}$

c. $(E_3) : 7^{x-1} - 7^{1-x} = 0$

24 Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : 1{,}02^x > 1{,}02$

b. $(I_3) : 5^x \leqslant 5^2$

c. $(I_3) : 0{,}43^x \leqslant 0$

25 Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : \sqrt{2}^{x+1} \geqslant \sqrt{2}^{-x-1}$

26 Équations XXL

Calculer – Chercher

Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(E_1) : 15^{x^2} = 15^9$

b. $(E_2) : \left(\dfrac{5}{3}\right)^{2-x} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-x-\frac{1}{3}}$

c. $(E_3) : 2^{x-2} = 2^{2+x}$

27 Inéquations XXL

Calculer – Chercher

Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $(I_1) : (1{,}2345^{x+6})^7 \geqslant 1{,}2345^{8x+9}$

b. $(I_2) : 3^x \times 5^x < 15^{3x+5}$

c. $(I_3) : 0{,}01^{2x-0{,}3} > (0{,}01^2)^{x-0{,}2}$

28 Soient a un nombre réel strictement positif et x et y deux nombres réels.

a. Développer $(a^x + a^y)^2$.

b. Développer $(a^x - 1)^2$.

c. Montrer que $(a^x + a^y)(a^x - a^y) = a^{2x} - a^{2y}$.

29 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

1	Simplifier((0.8^(−x)*(0.8^2)^x)/(0.8^(x−1))) → $\dfrac{4}{5}$
2	Simplifier((10^(x + 2) 10^(x² + 1)) / ((10^x)^x 10^(−x − 2))) → 10^{2x+5}
3	Simplifier((2^(2x − 2) 8^x) / (2^(3x) 4^(−x − 1))) → $(2^x)^4$

Retrouver ces résultats par le calcul.

30 On simplifie !

Calculer – Chercher

Simplifier les expressions suivantes le plus possible (x désigne un nombre réel).

a. $A = 2^x \times 2^{2x+1} \times 2^{-x}$

b. $B = 0{,}33^{-x} \times 0{,}33^{\frac{x}{3}} \times (0{,}33^{3x})^3$

c. $C = \dfrac{3^x \times 3^{-x+2}}{3^{2x}}$

31 On factorise !

Calculer – Chercher

Factoriser les expressions suivantes (x désigne un nombre réel).

a. $A = 2^x + 4^x - 6^x$

b. $B = 9^x - 4$

c. $C = 25^x - 4 \times 5^x + 4$

d. $D = 4^x + 2^{x+2} + 4$

32 Un prix est passé de 120 € à 150 € en 3 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (à 0,1 % près).

33 Un prix est passé de 25 € à 16 € en 10 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (à 0,1 % près).

34 Un prix est passé de 1 € à 1,50 € au bout de la première année, puis de 1,50 € à 4 € au bout de la deuxième année.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

35 Au 1er mars 2008, l'euro s'échangeait contre 1,51890 $ et, au 1er mars 2015, il s'échangeait contre 1,11819 $.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

36 TABLEUR On a réalisé la feuille de calcul suivante qui résume l'évolution du nombre d'habitants dans la ville de Dubaï entre 1968 et 2016.

	1	2	3	4
1	**Année**	**1968**	**1995**	**2016**
2	**Population**	58970		
3	**Taux d'évolution annuel**		1143,0%	
4	**Coefficient multiplicateur**			4

a. Quelle formule doit-on entrer dans les quatre cellules vides ?

b. Réaliser cette feuille de calcul dans un tableur et préciser les résultats obtenus.

c. Déterminer le taux d'évolution global de la population de Dubaï entre 1968 et 2016.

d. En déduire le taux d'évolution moyen annuel de la population de Dubaï de 1968 à 2016.

e. En déduire une estimation du nombre d'habitants à Dubaï en 2100 en supposant que l'évolution de la population de Dubaï restera dans la même moyenne que sur la période 2013-2016.

37 TABLEUR On a réalisé la feuille de calcul suivante qui résume l'évolution du nombre d'habitants en France de 2013 à 2016.

	1	2	3	4	5
1	**Année**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**
2	**Population (en millions d'habitants)**	66		66,62	
3	**Taux d'évolution annuel**		0,5%		0%

a. Quelle formule doit-on entrer dans les trois cellules vides ?

b. Réaliser cette feuille de calcul dans un tableur et préciser les résultats obtenus.

c. Déterminer le taux d'évolution global de la population française entre 2013 et 2016.

d. En déduire le taux d'évolution moyen annuel de la population française de 2013 à 2016.

e. En déduire une estimation du nombre d'habitants en France en 2100 en supposant que l'évolution de la population française restera dans la même moyenne que sur la période 2013-2016.

38 PYTHON CM, Cmm et TM

Calculer – Chercher

On considère la fonction Python suivante.

```
def taux(vi,vf,n):
    CM=vf/vi
    CMM=(vf/vi)**(1/n)
    TM=(CMM-1)*100
    return(TM)
```

a. À quoi correspondent les arguments `vi`, `vf` et `n` de la fonction ?

b. À quoi correspondent les variables `CM`, `CMM` et `TM` ?

c. En déduire le but de cette fonction.

d. Programmer cette fonction et l'exécuter pour retrouver le résultat de l'exercice résolu E.

39 Évolution boursière

Calculer – Chercher

En une année, une action a gagné 2,42 % au 1er trimestre, puis 1,83 % au 2e trimestre pour reculer de 0,95 % au 3e trimestre.
Un actionnaire ne retrouve pas le taux d'évolution pour le 4e trimestre, mais il a noté que le taux de croissance moyen trimestriel de cette action est de +1,59 % sur cette année.

Retrouver le taux d'évolution de cette action pour le 4e trimestre.

40 GEOGEBRA PYTHON Évolution d'une population

Modéliser – Représenter

Un village de 1 500 habitants voit sa population augmenter de 5,5 % par an.

a. Modéliser la situation à l'aide d'une fonction f.

b. Calculer la population de cette commune au bout de 10 ans.

c. À l'aide du logiciel Geogebra, tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercices d'approfondissement

d. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra un bourg (au moins 2 000 habitants).

e. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une petite ville (au moins 5 000 habitants).

f. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une ville moyenne (au moins 20 000 habitants).

g. À l'aide du logiciel Geogebra, déterminer au bout de combien d'années cette commune deviendra une grande ville (au moins 50 000 habitants).

h. On considère le programme Python suivant.

```
P=1500
n=0
while P<200000:
    n=n+1
    P=P*1.055
```

Expliquer le but de ce programme.

i. Une métropole est une commune ayant plus de 200 000 habitants.
Au bout de combien d'années notre village deviendra-t-il une métropole ?

41 Décroissance radioactive

Chercher – Représenter

La décroissance radioactive est la réduction du nombre de noyaux radioactifs dans un échantillon.

On considère un échantillon de matériaux radioactifs et on note $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t (exprimé en années).

On modélise la décroissance radioactive de cet échantillon par la relation :

$$N(t) = 10 \times 2^{-\frac{t}{30}}.$$

a. Déterminer le nombre de noyaux de l'échantillon à l'état initial.

b. Déterminer le nombre d'atomes dans l'échantillon au bout de dix ans.

c. Déterminer les variations de la fonction N.
Cela est-il cohérent avec la situation modélisée ?

d. Tracer la courbe représentative de la fonction N (on prendra 1 cm pour deux ans et 1 cm pour un atome).

e. On appelle « période radioactive » la durée au bout de laquelle le nombre de noyaux présents dans l'échantillon est réduit de moitié.
Déterminer graphiquement la période radioactive de l'échantillon.
Retrouver ce résultat par le calcul.

42 Pharmacocinétique

Chercher – Représenter

On évalue la pharmacocinétique d'un médicament grâce
à la concentration de son principe actif dans le sang.
On a modélisé la concentration en milligrammes de ce principe actif par litre de sang par la fonction f définie par $f(t) = t(6 - t)\left(\frac{7}{5}\right)^t$ où t désigne le temps en heures.

a. Dresser le tableau de signe du produit $t(6 - t)$.

b. En déduire le signe de la fonction f.

c. Au bout de combien de temps le médicament est-il complètement éliminé ?

d. Calculer la concentration de ce principe actif une heure après la prise de ce médicament.

e. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur un intervalle bien choisi (on prendra 1 cm pour une heure et 0,5 cm pour 1 mg/L).

f. Il est conseillé au patient une prise de ce médicament toutes les six heures.
Justifier cette préconisation.

g. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 12$.

h. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geqslant 20$.

i. On considère que ce médicament est efficace lorsque la concentration de son principe actif dans le sang est supérieure (ou égale) à 10 mg/L.
Au bout de combien de temps ce médicament commence-t-il à être efficace ?
Préciser également la durée d'efficacité de ce médicament.

j. Déterminer graphiquement la concentration maximale (arrondie à l'entier) du principe actif dans le sang.
Préciser au bout de combien de temps ce maximum est atteint.

k. On appelle « demi-vie d'élimination » le temps au bout duquel la concentration maximale du principe actif a diminué de moitié.
Déterminer graphiquement cette demi-vie.

l. Décrire l'évolution de la concentration de ce principe actif dans le sang.

TABLEUR

1 Taux d'évolution du prix du timbre

SITUATION

Le 1er janvier 2023, le timbre rouge a été supprimé.
On s'intéresse dans ces travaux pratiques au prix de ce timbre (au tarif lettre prioritaire) en France entre 2010 et 2020.

⇨ **L'objectif est de déterminer son taux d'évolution sur cette période.**

Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2010	2011	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	0,58 €	0,60 €	0,63 €	0,66 €	0,76 €	0,80 €	0,85 €	0,95 €	1,05 €	1,16 €

A Utilisation du tableur

1 À l'aide d'un tableur, réaliser une feuille de calcul et y recopier les données de l'énoncé dans les lignes 1 et 2.

2 Ajouter une ligne supplémentaire pour calculer le taux d'évolution d'une valeur à la suivante.
On ne remplira que la cellule B3 et on utilisera un glisser-déposer pour les autres cellules de la ligne 3.

3 David affirme : « Il y a la même évolution entre 2014 et 2015 et entre 2018 et 2019, puisque, dans les deux cas, le prix du timbre a augmenté de 10 centimes. »
Nicolas lui répond : « Non ! J'ai trouvé une évolution plus importante entre 2014 et 2015 qu'entre 2018 et 2019. »
Que peut-on en penser ?

B Taux global et taux moyen

1 Calculer le coefficient multiplicateur global du prix du timbre entre 2010 et 2020. Commenter ce résultat.

2 En déduire le coefficient multiplicateur moyen annuel du prix du timbre sur la période 2010-2020.

3 À l'aide de ce coefficient multiplicateur moyen, donner une estimation du prix du timbre en France en 2012.
Ce résultat est-il plausible ?

4 Quel est le taux d'évolution moyen annuel du prix du timbre sur la période 2010-2020 ?

Travaux pratiques

PYTHON 2 Moyennes arithmétiques et géométriques

SITUATION

Loïc a acheté 100 actions de l'entreprise Bonnaffaire en Bourse.
Chaque année, cette entreprise offre à ses actionnaires une action pour dix actions possédées.
Loïc n'étant pas très à l'aise avec les calculs, il a demandé à son conseiller financier combien cela lui ferait d'actions dans un an, dans trois ans, dans sept ans et dans quinze ans.
Son conseiller financier lui apporte la réponse suivante :
– « Au bout d'un an, vous aurez 110 actions ;
– au bout de trois ans, vous en aurez 133 ;
– au bout de sept ans, vous en aurez 193 ;
– au bout de quinze ans, vous en aurez 409 ».
Loïc s'aperçoit qu'il aurait dû demander davantage d'informations à son conseiller financier.

⇨ **Il lui demande une méthode pratique pour obtenir des valeurs à partir de celles qu'il a déjà.**

Le conseiller financier explique que, s'il connaît les nombres n_1 et n_2 d'actions possédées au bout des années A_1 et A_2 respectivement, il peut procéder comme suit :
– calculer la moyenne arithmétique de A_1 et de A_2 : il obtient alors une valeur A ;
– calculer la moyenne géométrique de n_1 et de n_2 : il obtient alors une valeur n.
Il peut alors considérer que n est une excellente approximation du nombre d'actions qu'il possédera au bout de A années.

A Réalisation d'un programme Python

1 Réaliser une fonction Python qui calcule la moyenne arithmétique de deux nombres.
On rappelle que la moyenne arithmétique de deux nombres réels x et y est le nombre $\frac{x+y}{2}$.

2 Réaliser une fonction Python qui calcule la moyenne géométrique de deux nombres.
On rappelle que la moyenne géométrique de deux nombres réels positifs x et y est le nombre $\sqrt{xy}$.

3 Utiliser ces deux fonctions Python pour connaître une approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 2 ans, de 5 ans et de 11 ans.

4 Déduire des questions précédentes une approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 4 ans, de 6 ans, de 9 ans et de 13 ans.

B Étude théorique

Soit f la fonction qui, à un nombre réel positif x, associe le nombre d'actions possédées par Loïc au bout de x années.

1 Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

2 Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

3 Retrouver à l'aide de la fonction f une autre approximation du nombre d'actions possédées par Loïc au bout de 4, 5, 6, 9, 11, 13 et 15 ans respectivement.

4 Comment expliquer les écarts avec les résultats obtenus à la partie A ?