Terminale

CHAPITRE 2

THÈME 1 / Analyse

Fonction inverse

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/zvni3x

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Calculer $\frac{1}{5}$ de la moitié sous forme de pourcentage.

2. a. Que vaut 12 quand il a augmenté de 25 % ?

Valeur	12	
Indice	100	150

b. Calculer la valeur manquante.

3. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 100 % puis a diminué de 50 % ?

4. Le taux d'évolution nécessaire à compenser une hausse de 25 % est…

a. –20 % **b.** –25 % **c.** –50 %

5. La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018. À partir de cette date, chaque mois, elle dépense un quart du contenu de sa tirelire.

6. Calculer sous forme de fraction irréductible $\frac{9}{3}$.

7. Écrire sous la forme 2^k le nombre $D = \frac{8}{2^6} \times 4^5$.

8. Donner l'écriture fractionnaire et scientifique de 0,000 006.

9. Convertir 4,2 heures en heure minute.

10. Construire le tableau de signes de $(1 - x)(4x + 2)$ sur $\mathbb{R}$.

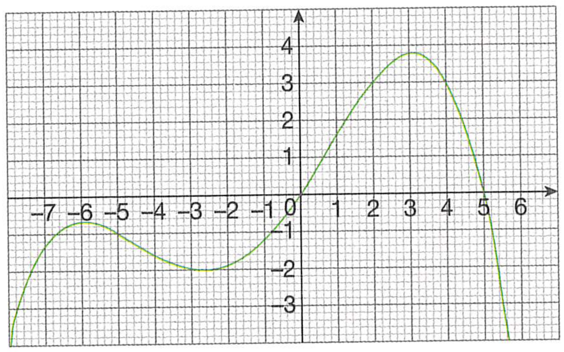
11. Le prix au m² d'un appartement est donné par la formule : $\text{prix au m}^2 = \frac{\text{prix}}{\text{surface (en m}^2\text{)}}$.

Un appartement de 35 m² coûte 140 000 €. Quel est le prix au m² de cet appartement ?

12. Développer et réduire $D = 7(x - 1)^2$.

13. Dériver $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Quelle est l'image de 5 par f ?
b. Quels sont les antécédents de 3 par f ?
c. Donner le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

15. Construire le tableau de signes de $-\frac{1}{3}(x + 6)(x - 10)$.

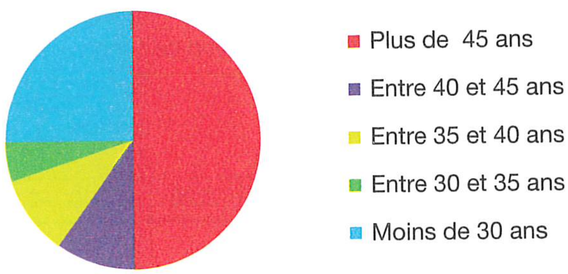
16. Construire le tableau de signes de g.

17. Déterminer le point de la courbe d'équation $y - \frac{1}{x+2}$ qui appartient à l'axe des ordonnées.

18. On considère les points A(–11 ; 3) et B(5 ; 3). Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

Données chiffrées

19. On a représenté la série statistique donnant la répartition des 300 salariés d'une entreprise selon leur âge. Combien de salariés ont moins de 30 ans ?



Cours et méthodes

1 Conjecturer le comportement aux bornes d'une fonction

- On complète ou on crée un tableau de valeurs avec la calculatrice avec x au voisinage de a.
- On devine la valeur dont s'approche $f(x)$ lorsque x s'approche de a.
- On réalise ensuite la conjecture : quand x s'approche de a, $f(x)$ s'approche de ....

Exercice résolu A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.
Conjecturer le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

SOLUTION

Les bornes de l'ensemble de définition de f sont $-\infty$, 0 par valeurs négatives, 0 par valeurs positives et $+\infty$.

- En $-\infty$:

x	−10	−20	−100	−200	−1 000	−2 000
$f(x)$	2,1	2,05	2,01	2,005	2,001	2,0005

Donc on peut faire la conjecture suivante : quand x s'approche de $-\infty$, $f(x)$ s'approche de 2.

- En 0 par valeurs négatives :

x	−2	−1	−0,2	−0,1	−0,02	−0,01
$f(x)$	2,5	3	7	12	52	102

Donc on peut faire la conjecture suivante : quand x s'approche de 0 par valeurs négatives, $f(x)$ s'approche de $+\infty$.

- En 0 par valeurs positives :

x	2	1	0,2	0,1	0,02	0,01
$f(x)$	1,5	1	−3	−8	−48	−98

Donc on peut faire la conjecture suivante : quand x s'approche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ s'approche de $-\infty$.

- En $+\infty$:

x	10	20	100	200	1 000	2 000
$f(x)$	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	1,9995

Donc on peut faire la conjecture suivante : quand x s'approche de $+\infty$, $f(x)$ s'approche de 2.

Exercices d'application directe

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$.
Conjecturer le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

Les bornes de l'ensemble de définition de f sont ...., ..., ... et ....

- En $-\infty$:

x	−10	−20	−100	−200	−1 000	−2 000
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs négatives :

x	−2	−1	−0,2	−0,1	−0,02	−0,01
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :
quand x s'approche de .... par valeurs négatives, $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs positives :

x	2	1	0,2	0,1	0,02	0,01
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de .... par valeurs positives,

$f(x)$ s'approche de ....

- En $+\infty$:

x	10	20	100	200	1 000	2 000
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -8 + \frac{7}{x}$.

Conjecturer le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

Les bornes de l'ensemble de définition de f sont ....,

........, ... et ....

- En $-\infty$:

x	-10	-50	-100	-500	$-1\,000$	$-5\,000$
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs négatives :

x	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	$-0{,}005$
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs positives :

x	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En $+\infty$:

x	10	50	100	500	1 000	5 000
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4 - \frac{9}{x}$.

Conjecturer le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

Les bornes de l'ensemble de définition de f sont ....,

........, ... et ....

- En $-\infty$:

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs négatives :

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En 0 par valeurs positives :

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En $+\infty$:

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -9 - \frac{5}{x}$.

Conjecturer le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- En $-\infty$:

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

- En $+\infty$:

x	....	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....

Donc on peut faire la conjecture suivante :

quand x s'approche de ...., $f(x)$ s'approche de ....

2 Étudier des fonctions faisant intervenir la fonction inverse

Pour étudier les variations d'une fonction f, on réalise le protocole suivant :

- on calcule la dérivée f' ;
- on étudie le signe de la dérivée :
  – directement si on peut,
  – sinon, on met la dérivée sous forme d'un produit ou d'un quotient et on dresse un tableau de signes faisant intervenir les différents termes du produit ou quotient ;
- on dresse le tableau de variations de f.

Exercice résolu B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 13 + \frac{4}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Étudier le signe de la dérivée.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

SOLUTION

1. $f'(x) = 0 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(-\frac{4}{x^2}\right)$

2. $x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

Donc $\frac{4}{x^2} > 0$.

Donc $-\frac{4}{x^2} < 0$.

D'où $f'(x) < 0$.

Et donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	

3. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

Exercice résolu C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -6x + 11 + \frac{1}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Étudier le signe de la dérivée.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

SOLUTION

1. $f'(x) = -6 \times 1 + 0 - \frac{1}{x^2} = -6 - \frac{1}{x^2}$

2. $x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

Donc $\frac{1}{x^2} > 0$.

Donc $-\frac{1}{x^2} < 0$.

Donc $-6 - \frac{1}{x^2} < 0$.

D'où $f'(x) < 0$.

Et donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	

3. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

Exercice résolu D

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 10x + 8 - \frac{3}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Étudier le signe de la dérivée.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

SOLUTION

1. $f'(x) = 10 \times 1 + 0 - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 10 + \frac{3}{x^2}$

2. $x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

Donc $\frac{3}{x^2} > 0$.

Donc $10 + \frac{3}{x^2} > 0$.

D'où $f'(x) > 0$.

Et donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	

3. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

Exercice résolu E

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

3 Montrer que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

4 En déduire l'étude du signe de la dérivée.

5 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

SOLUTION

1. $f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{4}{x^2}$

2. $f'(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

3. On développe : $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$.

4. D'après les questions **2** et **3**,

on a : $f'(x) = \frac{(x - 2)\,(x + 2)}{x^2}$.

$x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x - 2$ est du premier degré avec $a = 1$.

Donc $x - 2$ est du signe de 1 à droite de 2.

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2t$

$x + 2$ est du premier degré avec $a = 1$.

Donc $x + 2$ est du signe de 1 à droite de -2.

D'où :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-2)\,(x+2)}{x^2}$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

5. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗	

Car $f(-2) = -2 + \frac{4}{-2} = -4$ et $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$

Exercice résolu F

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 6x^3 - \dfrac{5}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Étudier le signe de la dérivée.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

SOLUTION

1. $f'(x) = 6 \times 3x^2 - 5 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 18x^2 + \dfrac{5}{x^2}$

2. $x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

Donc $18x^2 > 0$ et $\dfrac{5}{x^2} > 0$.

Donc $18x^2 + \dfrac{5}{x^2} > 0$.

D'où $f'(x) > 0$.

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$

3. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	||	$\nearrow$

Exercice résolu G

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -9x^2 - 7x + 2 + \dfrac{11}{x}$.

1 Calculer la dérivée de la fonction f.

2 Étudier le signe de la dérivée.

3 Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

SOLUTION

1. $f'(x) = -9 \times 2x - 7 \times 1 + 0 + 11 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -18x - 7 - \dfrac{11}{x^2}$

2. $x > 0$ car $x \in \,]0\,;+\infty[$.
Donc $-18x < 0$.
Donc $-18x - 7 < 0$.

$x^2 > 0$ car un carré est toujours positif et ici $x \neq 0$.

Donc $-\dfrac{11}{x^2} < 0$.

Donc $-18x - 7 - \dfrac{11}{x^2} < 0$.

D'où $f'(x) < 0$.

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$

3. D'après la question **2**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

Exercices d'application directe

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 42 - \frac{9}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……………………………………

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 ………… 0 car un carré est toujours ………… et ici $x \neq 0$.

Donc $\frac{9}{x^2}$ ………… 0

D'où $f'(x)$ ………… 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question b, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………
$f(x)$	…………	‖	…………

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -19{,}4 + \frac{31}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……………………………………

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 ………… 0 car un carré est toujours ………… et ici $x \neq 0$.

Donc $-\frac{31}{x^2}$ ………… 0

D'où $f'(x)$ ………… 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question b, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………
$f(x)$	…………	‖	…………

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 7x - 19 - \frac{20}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……………………………………

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 ………… 0 car un carré est toujours ………… et ici $x \neq 0$.

Donc $\frac{20}{x^2}$ ………… 0

Donc $7 + \frac{20}{x^2}$ ………… 0

D'où $f'(x)$ ………… 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question b, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………
$f(x)$	…………	‖	…………

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -23x + 17 + \frac{48}{x}$

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……………………………………

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 ………… 0 car un carré est toujours ………… et ici $x \neq 0$.

Donc $-\frac{48}{x^2}$ ………… 0

Donc $-23 - \frac{48}{x^2}$ ………… 0

D'où $f'(x)$ ………… 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question b, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	…………	‖	…………
$f(x)$	…………	‖	…………

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = -2x + 3{,}5 + \frac{8{,}6}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……………………………………

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 ………… 0 car ……………………………………

Donc $-\frac{8{,}6}{x^2}$ ………… 0

Donc $-2 - \frac{8{,}6}{x^2}$ ………… 0

D'où $f'(x)$ ………… 0

Et donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		……	‖	……	

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		……	‖	……	
$f(x)$		……	‖	……	

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……

……

……

……

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2}$.

$f'(x) =$ ……

……

……

……

c. Montrer que $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

On développe : $(x - 5)(x + 5) =$ ……

d. En déduire l'étude du signe de la dérivée.

D'après les questions **b** et **c**, on a

$f'(x) =$ ……

x^2 …… 0 car ……

$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x =$ ……

$x - 5$ est du …… degré avec $a =$ ……

Donc $x - 5$ est du signe de 1 à droite de ……

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x =$ ……

$x + 5$ est du …… degré avec $a =$ ……

Donc $x + 5$ est du signe de 1 à droite de ……

D'où :

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
$x - 5$		……		……		……	0	……	
$x + 5$		……	0	……		……		……	
x^2		……		……	0	……		……	
$\dfrac{(x-5)(x+5)}{x^2}$		……	0	……	‖	……	0	……	
$f'(x)$		……	0	……	‖	……	0	……	

e. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$		-5		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		……	0	……	‖	……	0	……	
$f(x)$					‖				

Car $f(-5) =$ …… et $f(5) =$ ……

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -x - \dfrac{9}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ……

……

b. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 9}{x^2}$.

$f'(x) =$ ……

……

c. Montrer que $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

On développe : $(x - 3)(x + 3) =$ ……

$=$ ……

d. En déduire l'étude du signe de la dérivée.

D'après les questions **b** et **c**, on a $f'(x) =$ ……

x^2 …… 0 car ……

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x =$ ……

$x - 3$ est du …… degré avec $a =$ ……

Donc $x - 3$ est du signe de 1 à droite de ……

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x =$ ……

$x + 3$ est du …… degré avec $a =$ ……

Donc $x + 3$ est du signe de 1 à droite de ……

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$x - 3$		……		……		……	0	……	
$x + 3$		……	0	……		……		……	
x^2		……		……	0	……		……	
$\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$		……	0	……	‖	……	0	……	
$-\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$		……	0	……	‖	……	0	……	
$f'(x)$		……	0	……	‖	……	0	……	

e. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		……	0	……	‖	……	0	……	
$f(x)$					‖				

Car $f(-3) =$ …… et $f(3) =$ ……

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x^3 - \dfrac{17}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ....

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 .... 0 car ....

Donc $6x^2$ .... 0 et $\dfrac{17}{x^2}$ 0

Donc $6x^2 + \dfrac{17}{x^2}$ 0

D'où $f'(x)$ 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....
$f(x)$	....	‖	....

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -47x^3 + \dfrac{8}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ....

....

b. Étudier le signe de la dérivée.

x^2 .... 0 car ....

Donc $-47x^2$ .... 0 et $-\dfrac{8}{x^2}$ 0

Donc $-47x^2 - \dfrac{8}{x^2}$ 0

D'où $f'(x)$ 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....

c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....
$f(x)$	....	‖	....

15 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x) = 5x^2 + 12x - 6 - \dfrac{2}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ....

....

b. Étudier le signe de la dérivée.

x .... 0 car $x \in$ ....

Donc $10x$ 0

Donc $10x + 12$ 0

x^2 .... 0 car ....

Donc $\dfrac{2}{x^2}$ 0

Donc $10x + 12 + \dfrac{2}{x^2}$ 0

D'où $f'(x)$ 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....

c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....
$f(x)$	....	‖	....

16 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[$ par

$f(x) = -23x^2 + 39x + 12 - \dfrac{6}{x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

$f'(x) =$ ....

....

....

b. Étudier le signe de la dérivée.

x .... 0 car $x \in$ ....

Donc $-46x$ 0

Donc $-46x + 39$ 0

x^2 .... 0 car ....

Donc $\dfrac{6}{x^2}$ 0

Donc $-46x + 39 + \dfrac{6}{x^2}$ 0

D'où $f'(x)$ 0

Et donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....

c. Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty\,;0[$.

D'après la question **b**, on a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	....	‖	....
$f(x)$	....	‖	....

Exercices d'approfondissement

17 TABLEUR Trois fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ sont données par les formules suivantes :

$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $g(x) = 3 - \frac{4}{x}$; $h(x) = \frac{1}{x} - 1$.

	A	B	C	D
1		Valeurs de x		
2	Fonction	10	100	1000
3	f(x)=2-1/x	1,9	1,99	1,999
4	g(x)=3-4/x			
5	h(x)=1/x-1			
6				

a. Quelle formule a été entrée dans la cellule B3 pour obtenir le résultat 1,9 ?

b. Quelle est la valeur dont s'approche la fonction quand x s'approche de $+\infty$?

c. Ouvrir votre tableur et faire le même travail avec les fonctions g et h.

18 TABLEUR La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = k - \frac{1}{x}.$$

	A	B	C	D	E
1			Valeurs de x		
2	Fonction	k	10	100	1000
3	f(x)=k-1/x	2	1,9	1,99	1,999
4	f(x)=k-1/x	3	2,9	2,99	2,999
5	f(x)=k-1/x	-1	-1,1	-1,01	-1,001

a. Une formule a été entrée dans la cellule C3 puis étirée vers la droite et vers le bas. Parmi les quatre formules suivantes, laquelle a été placée :
=B2-1/C2 ; =B\$2-1/C\$2 ;
=\$B2-1/C\$2 ; =B\$2-1/C2 ?

b. Pour chacune des valeurs de k, donner la valeur dont s'approche $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

19 La relation entre énergie, puissance et temps est $E = P \times t$, où P est la puissance délivrée pendant un temps t (E est donné en watts × heure, P est donnée en watts, et la durée t est donnée en heure). Pour un cycliste, il faut une certaine énergie pour gravir un col. Supposons que cette énergie soit connue : environ 100 watts · heures.

a. Exprimer le temps d'ascension, en fonction de la puissance délivrée, P ; on note cette fonction $t(P)$.

b. Représenter la fonction t dans un repère orthogonal.

c. Quelle est la durée d'ascension d'un cycliste professionnel capable de produire une puissance de 400 watts ?

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x}.$$

a. Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \times \frac{1}{x}$ où k est une constante.

b. Calculer alors $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{4x}.$$

a. Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \times \frac{1}{x}$ où k est une constante.

b. Calculez alors $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{-1}{3x}.$$

a. Montrer que la fonction peut s'écrire sous la forme $f(x) = k \times \frac{1}{x}$ où k est une constante.

b. Calculer alors $f'(x)$.

c. Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

23 Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$.

a. La fonction f est définie par $f(x) = -3x - \frac{1}{x}$.

b. La fonction g est définie par $g(x) = x - \frac{1}{x}$.

c. La fonction h est définie par $h(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{x}$.

d. La fonction k est définie par $k(x) = -3x - \frac{2}{x}$.

24 Calculer les dérivées des fonctions suivantes, puis montrer que la fonction dérivée peut s'écrire de la manière proposée.

a. La fonction f est définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

b. La fonction g est définie par $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Montrer que $g'(x) = -3x - \frac{2x^2 + 1}{x^2}$.

c. La fonction h est définie par $h(x) = 2 + x + \frac{2}{x}$.

Montrer que $h'(x) = -3x - \frac{x^2 - 2}{x^2}$.

d. La fonction k est définie par $k(x) = \frac{10}{x} + 10x$.

Montrer que $f'(x) = 10 \times \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$.

25 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{x} + 5x.$$

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f'(x) = \frac{2 + 5x^2}{x^2}$.

c. Étudier le signe de la dérivée.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

26 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{x} + x.$$

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire aussi $f'(x) = \frac{-1 + x^2}{x^2}$.

c. Montrer que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
Étudier alors le signe de la dérivée.

d. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

27 Une dérivée à factoriser

Calculer – Raisonner

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est donnée par la formule $f(x) = 3x - \frac{12}{x}$.

a. Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{x^2}.$$

b. Étudier le signe du numérateur.

c. Donner le tableau de variations de la fonction f.

28 Un voyage à optimiser

Modéliser – Calculer

Un animateur veut organiser un voyage pour x personnes où $x \in [5\ ;\ 50]$ (x n'est pas encore précisément fixé).
Le transporteur propose le tarif suivant pour un bus : 100 € de coûts fixes et 5 € par personne.

a. Donner le prix à payer pour 35 personnes.

b. Exprimer le prix total à payer en fonction de x.

c. Montrer que le prix unitaire (le prix par personne) est donné par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{100}{x} + 5.$$

d. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau :

x	10	20	30	40	50
$f(x)$					

e. Calculer la dérivée de f.

f. Étudier le signe de la dérivée.

g. En déduire les variations de f.

29 La plateforme de comptabilité

Modéliser – Communiquer

Sur cette plateforme dédiée à la comptabilité des très petites entreprises, on propose les tarifs suivants : un abonnement initial de 90 € et une prise en charge de 13 € par mois.
Pauline est boulangère et elle souhaite étudier le prix pour ce service.

a. Donner le prix que doit payer Pauline pour 10 mois.

b. Exprimer le prix total à payer en fonction de x, où x est le nombre de mois.

c. Montrer que le prix unitaire (le prix par mois) est donné par la fonction f définie par $f(x) = \frac{90}{x} + 13$.

d. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau :

x	10	15	20	24
$f(x)$				

e. Le comptable de Pauline facturait ses services 256 euros par an. Sur deux ans, quelle solution peut-on conseiller à Pauline en ne prenant en compte que les aspects financiers : continuer avec son comptable ou prendre un abonnement sur la plateforme ?

f. Calculer la dérivée de f.

g. Étudier le signe de la dérivée.

h. En déduire les variations de f.

30 Des coques de téléphone

Modéliser – Communiquer

Dans une entreprise qui produit des coques de téléphone, il faut envisager deux coûts : le coût du moule pour la coque qui est de 2 000 €, puis le coût de la matière première plastique qui est de 35 centimes d'euros par coque.

a. Donner le coût de production de 3 000 coques.

b. Exprimer le coût à payer en fonction de x, où x est le nombre de coques produites.

c. Montrer que le coût unitaire (le coût par coque) est donné par la fonction f définie par $f(x) = \frac{2000}{x} + 0{,}35$.

d. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau :

x	10 000	100 000	200 000
$f(x)$			

e. L'entreprise souhaite dégager une marge d'au moins 100 %. Elle envisage de vendre plus de 100 000 coques. Quel prix de vente peut-on conseiller ?

f. Calculer la dérivée de f.

g. Étudier le signe de la dérivée.

h. En déduire les variations de f.

Exercices d'approfondissement

31 Une petite entreprise de transport

Modéliser – Calculer

Paul est un routier à son compte.
Il distingue deux coûts principaux : l'achat du camion, puis l'entretien et le carburant de ce camion.
Un camion coûte 100 000 € et l'entretien et le carburant coûtent environ 1 520 € tous les 1 000 km.

a. Dans l'entreprise de Paul, quels sont les coûts fixes et quels sont les coûts variables ?

b. Soit x le nombre de milliers de kilomètres parcourus. Exprimer les coûts C dans l'entreprise de Paul en fonction de x.

c. Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x - \frac{C(x)}{x}$.
Cette fonction correspond au coût moyen.
Montrer que $f(x) = 1\,520 + \frac{100\,000}{x}$.

d. Paul prévoit des contrats pour environ 80 000 km cette année. Quel sera le coût moyen pour lui cette année ?

e. Calculer $f'(x)$.

f. Étudier le signe de la dérivée.

g. En déduire les variations de f.

32 Une chaîne de production

Modéliser – Communiquer

Dans une entreprise qui fabrique des vitres autonettoyantes. Le cout pour aménager la chaîne de production était de 3 500 € et le prix de chaque vitre créée est de 25 €. Ces coûts ont été positionnés dans le tableau ci-après :

	A	B	C	D	E
1	Nombre d'unités produites	Coûts fixes	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1	3500	25	3525	3525
3	2	3500	25	3550	1775
4	10	3500	25	3750	375
5	100	3500	25	6000	60
6	1000	3500	25	28500	28,5

a. Quelle formule a été placée dans la cellule D2 ?

b. Quelle formule a été placée dans la cellule E2 ?

c. Si on souhaite atteindre un coût moyen de 26 €, quel doit être le nombre d'unités produites ?

d. Expliquer pourquoi le coût moyen ne peut pas être de 20 €.

33 Simulations

Chercher – Modéliser

Dans une entreprise, la fabrication d'une unité de production est connue, mais les coûts fixes sont encore incertains. Le conseil d'administration décide de faire plusieurs simulations avec ces différents coûts fixes.
Le coût de production d'une unité est, lui, bien connu : 25 €.

	A	B	C	D	E
1	Nombre d'unités produites	Coûts fixes	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1000	50 000	25	75000	75
3	1000	100000	25	125000	125
4	1000	150 000	25	175000	175
5	1000	200 000	25	225000	225

a. Quelle formule a été placée dans la cellule D2 ?

b. Quelle formule a été placée dans la cellule E2 ?

c. Le conseil d'administration déclare ne pas vouloir dépasser un coût moyen pour 1 000 unités produites de 150 €. Quelle est alors la valeur maximale des coûts fixes ?

34 Location de voiture

Modéliser – Calculer

Le prix à payer pour la location d'une voiture d'entrée de gamme proposée par une entreprise est le suivant :
30 euros pour la location d'une journée
puis 10 centimes par kilomètre parcouru.
Sadi a besoin d'une voiture pour 1 journée.
Il étudie le coût de cette offre.

a. Donner le prix que doit payer Sadi pour un trajet de 150 kilomètres.

b. Exprimer le prix total à payer en fonction de x, où x est le nombre de kilomètres parcourus.

c. Montrer que le prix unitaire (le prix par kilomètre) est donné par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{30}{x} + 0{,}10.$$

d. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous.

x	100	150	200	250
$f(x)$				

e. Sadi compare cette offre à deux autres, l'offre A et l'offre B.
L'offre A annonce que le montant est de 40 euros la journée quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.
L'offre B annonce que le prix ne dépend que du nombre de kilomètres parcourus : 25 centimes par kilomètre.
Comparer l'offre initiale à chacune de ces offres.

TABLEUR 1 Coût unitaire

SITUATION Dans une entreprise, il est intéressant de connaître le coût par unité produite. Dans la PME de Jeanne, on fabrique des jouets en bois. Jeanne veut mettre sur le marché un nouveau jeu de quilles. Elle s'intéresse au coût unitaire. En effet, le coût par jeu produit ne sera pas le même si elle en produit 100 ou 10 000.
Elle estime qu'elle peut vendre ce produit environ 30 € quand elle regarde les prix pratiqués par ses concurrents. Elle se pose alors la question suivante :

⇨ **Combien de jeux dois-je produire pour faire une marge de 100 %**
(c'est-à-dire que les recettes soient égales au double des coûts de production) ?

Étude à l'aide d'un tableur

Il distingue deux types de coûts, ceux qu'il faut faire une fois pour toute (coûts fixes) et ceux qui sont liés à la production de chaque nouveau jeu (coûts variables).

Parmi les coûts fixes, il a fait la liste suivante :
- Conception du jeu et de la boîte : 5000 euros
- Création de la chaine de production : 8000 euros
- Publicité : 12 000 euros

Parmi les coûts variables, il fait la liste suivante :
- Bois : 0,90 euros
- Amortissement de la machine : 2,50 euros
- Impression du numéro sur la quille : 0,20 euros.

Feuille de calculs
liennathan.fr/a5pwf7

Il commence à créer la feuille de calcul suivante pour enregistrer ces informations.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nombre d'unités produites	Conception	Création de la chaine de productin	Publicité	total des coûts fixes	Bois	Amortissement	Impression	Coût de production d'une unité.	Coût total de production	Coût unitaire
2	1	5000	8000	12000		0,90	2,50	0,20			
3	2										
4	1000										
5	10000										
6	100000										

1 Compléter la feuille avec les formules adéquates, pour que la première ligne soit complète. Vérifiez que vous trouvez bien un coût unitaire égal à 25 003,6 euros.

2 Compléter alors le reste de tableau. Dans quel intervalle est la valeur qui permet de dégager une marge de 100 % ? Dans l'intervalle [1000 ;10000] ou dans l'intervalle [10000 ;100 000] ?

3 Avec le tableur, trouver alors cette valeur par tâtonnement.

Pour aller plus loin

Calculs théoriques

4 Montrer que le coût total pour x unités produites est donné par la formule $f(x) = 25\,000 + 3{,}6x$.

5 Montrer que le coût unitaire est donné par la formule $g(x) = \dfrac{25\,000}{x} + 3{,}6$.

6 Avec la calculatrice, retrouver la valeur qui permet de dégager une marge de 100 %.

PYTHON 2 Un peu de thermodynamique…

SITUATION La loi des gaz parfaits, établie en 1834 par Émile Clapeyron, est une relation reliant pression et volume d'un gaz dit « parfait ».
Il s'agit de l'égalité : $pV = nRT$, où p est la pression (en pascals Pa), V le volume (en m^3), n la quantité de matière (en moles), R la constante universelle des gaz parfaits (et qui vaut environ 8,314 joules par kelvin par mole) et T la température (en kelvins K).

⇨ **On s'intéresse dans ces travaux pratiques à cette relation.**

Réalisation d'un programme Python

On se place à une température constante de 300 K et on considère une quantité de matière d'un gaz parfait constante de 5×10^{-3} moles.

1 Réaliser une fonction Python qui retourne la pression pour un certain volume V variable.

2 On a programmé la fonction suivante :

```
def gaz():
    for i in range (1,11) :
            p=0.005*8.314*300/i
            print(i,':',p)
```

Que fait-elle ?

3 Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne les valeurs de la pression jusqu'à ce que cette dernière soit inférieure à 1 pascal en l'évaluant pour des volumes commençant à 1 m^3, par pas de 1 m^3.

```
def gaz2():
    V=1
    p=0.005*8.314*300/V
    ... ... :
            p=0.005*8.314*300/V
            print(V,':',p)
            V+=1
```

La programmer.
Que peut-on en conclure ?

Pour aller plus loin

Étude théorique

On se place à nouveau à une température constante de 300 K et on considère une quantité de matière d'un gaz parfait constante de 5×10^{-3} moles.

On appelle p la fonction qui, à un volume V exprimé en m^3 de ce gaz parfait, associe sa pression $p(V)$.

4 Déterminer l'expression de $p(V)$.

5 Tracer la courbe représentative de la fonction p.
On pourra programmer la fonction de la question 2 pour obtenir quelques points.

6 Lire graphiquement le résultat de la question 3.

7 Retrouver ce résultat par le calcul.