Terminale

CHAPITRE 1

THÈME 1 / Analyse

Suites numériques

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/lcuh76
Dans ce chapitre, nous utiliserons indifféremment la notation $u(n)$ ou u_n.

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Calculer 20 % de 35 kg.

2. Calculer 25 % de 60 % sous forme de pourcentage.

Évolution et variations

3. Augmenter de 3 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 25 quand il a augmenté de 10 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 10 à 15 ?

6. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une baisse de 60 %.

7. La situation suivante peut-elle être modélisée par une suite géométrique ? Si oui, préciser sa raison.

Une association a été créée en 2010 et comptait alors 300 adhérents. Depuis, le nombre d'adhérents de cette association s'accroît tous les ans de 5 %.

Calculs numériques et algébriques

8. Calculer sous forme de fraction irréductible $3 \times \frac{7}{6} - 5$.

9. Donner l'écriture décimale et fractionnaire de $1{,}2 \times 10^{-3}$.

10. Une ville contient 123 526 habitants. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'habitants dans cette ville ?

11. Convertir 3,4 ha en m².

12. Résoudre $3x - 1 > 4x + 9$.

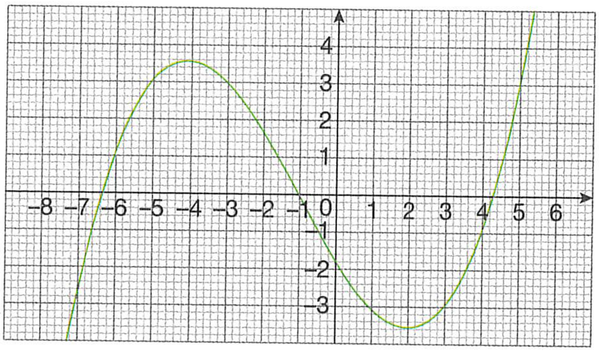
13. Construire le tableau de signes de $2x - 5$ sur $\mathbb{R}$.

14. On donne $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$. Exprimer V_A en fonction de t et V_D.

15. Le bénéfice B est donné par la formule suivante où R représente la recette et C représente le coût : B = R = C. Calculer le bénéfice obtenu pour un coût de 1 300 € et une recette de 2 157 €.

16. Dériver $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.



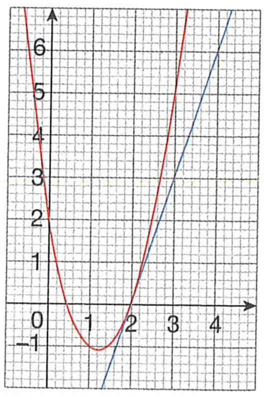
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.
a. Quelle est l'image de 4 par f ?
b. Quels sont les antécédents de 3 par f ?
c. Résoudre graphiquement $f(x) = 3$.
d. Construire le tableau de variations de f.

18. Construire le tableau de signes de $4(x + 7)(x - 11)$.

19. Le point de coordonnées $(-1 ; 2)$ appartient à la courbe d'équation :
a. $y = x^2 - 3x$ **b.** $y = \frac{x + 5}{2}$ **c.** $y = -x + 3$

20. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = 2x - 1$.

21. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(2)$.



Cours et méthodes

1 Prouver que trois nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

- Pour tester si ces nombres correspondent à une **suite arithmétique**, on calcule la différence entre les premiers termes consécutifs $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$.
Si cette différence est constante, alors la suite commence comme une suite arithmétique et sa raison est égale à cette différence constante. Sinon, ce n'est pas le début d'une suite arithmétique.
- Pour tester si ces nombres correspondent à une **suite géométrique**, on calcule la différence entre les premiers termes consécutifs $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$.
Si cette différence est constante, alors la suite commence comme une suite géométrique et sa raison est égale à ce quotient constant. Sinon, ce n'est pas le début d'une suite géométrique.

Exercice résolu A

Les nombres 16 ; 19,4 et 22,8 sont-ils les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ?

SOLUTION

19,4 – 16 = 3,4 et 22,8 – 19,4 = 3,4.
Donc ces nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3,4.

Exercice résolu B

Un agent immobilier souhaite modéliser l'évolution du nombre moyen de ventes qu'il réalise par mois et rassemble les informations dont il dispose dans le tableau ci-dessous :

	Mars	Avril	Mai
Nombre moyen de ventes réalisées	6	6,3	6,615

Est-ce vraisemblable de choisir une suite arithmétique ou une suite géométrique pour modéliser l'évolution du nombre moyen de ventes par mois ?

SOLUTION

6,3 – 6 = 0,3 et 6,615 – 6,3 = 0,315 ≠ 0,3
Donc ces nombres ne sont pas les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
$\frac{6,3}{6} = 1,05$ et $\frac{6,615}{6,3} = 1,05$
Donc ces nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 1,05.

Remarque
Cela signifie qu'en avril et mai, l'agent immobilier a augmenté ses ventes de 5 % par rapport au mois précédent.

Exercices d'application directe

1 Dans chacun des cas suivants, on donne 3 ou 4 termes consécutifs d'une suite.
Déterminer s'il peut s'agir d'une suite arithmétique ou géométrique.

a. $u_0 = 8$; $u_1 = 15$; $u_2 = 22$.

....

....

Donc il peut s'agir d'une suite ....

b. $u_0 = -2$; $u_1 = 3$; $u_2 = 9$.

....

....

Donc il ne peut pas s'agir d'une suite ....

....

....

Donc il ne peut pas s'agir d'une suite ....

c. $u_0 = 1{,}5$; $u_1 = 6$; $u_2 = 24$.

Donc il peut s'agir d'une suite

d. $u_3 = 1\,268$; $u_4 = 1\,339$; $u_5 = 1\,410$.

Donc il peut s'agir d'une suite

e. $u_6 = 44$; $u_7 = 272{,}8$; $u_8 = 1\,691{,}36$.

Donc il peut s'agir d'une suite

f. $u_0 = 123$; $u_1 = 184$; $u_2 = 245$; $u_3 = 304$.

Donc il ne peut pas s'agir d'une suite

Donc il ne peut pas s'agir d'une suite

2 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 6n^2 - 5$.

a. Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n).

b. En déduire si la suite (u_n) est arithmétique.

Donc la suite (u_n) .... arithmétique.

3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 + 2n + 7$.

a. Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n).

b. En déduire si la suite (u_n) est géométrique.

Donc la suite (u_n) .... géométrique.

4 Léo réalise des versements trimestriels sur son Livret A et note ses premiers versements dans le tableau suivant :

Trimestre n°	1	2	3
Montant du versement	1 250	2 423	3 596

Est-ce vraisemblable de choisir une suite arithmétique ou une suite géométrique pour modéliser l'évolution du montant des versements trimestriels ?

Donc la suite des versements trimestriels peut être

Donc il est vraisemblable de modéliser l'évolution du montant des versements trimestriels par une suite

5 Un jeune artiste musical met en ligne un nouveau clip et récapitule le nombre de vues des premiers jours dans le tableau suivant :

Jour n°	1	2	3
Nombre de vues	23 616	35 424	53 136

Est-ce vraisemblable de choisir une suite arithmétique ou une suite géométrique pour modéliser l'évolution du nombre de vues journalier ?

Donc la suite des nombres de vues peut être

Donc il est vraisemblable de modéliser l'évolution du nombre de vues journalier par une suite

6 Les météorologistes de Météo-France ont fait les relevés de cumuls annuels moyens de précipitation suivants :

Période	1961-1990	1971-2000	1981-2010	1991-2020
Cumul annuel moyen de précipitation (en mm)	911,6	931,9	934,8	934,7

Est-ce vraisemblable de choisir une suite arithmétique ou une suite géométrique pour modéliser l'évolution du cumul annuel moyen de précipitation ?

Donc la suite

Donc la suite

Est-il vraisemblable de modéliser l'évolution du cumul annuel moyen de précipitation :

- par une suite arithmétique ? ☐ Oui ☐ Non
- par une suite géométrique ? ☐ Oui ☐ Non

2 Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique

On exprime u_{n+1} en fonction de u_n et on cherche à faire apparaître une relation de la forme : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ ou $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$. On détermine ainsi la raison.

Exercice résolu C

Un club de Ligue 1 possède 15 000 abonnés en 2023 et projette d'augmenter chaque année son nombre d'abonnés de 800 grâce à une importante campagne marketing.

On note a_n le nombre d'abonnés en 2023 + n.

Quelle est la nature de la suite (a_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

SOLUTION

Le nombre d'abonnés augmente de 800 chaque année.

On a donc $a_{n+1} = a_n + 800$.

Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison 800 et de premier terme 15 000.

Exercice résolu D

Le responsable d'une chaîne de production alimentaire souhaite diminuer son coût de production afin d'augmenter le bénéfice.

Son objectif est une baisse de 2,5 % chaque mois grâce à une meilleure gestion des stocks.

Au 1er mai 2023, le montant du coût de production est de 43 000 €.

On note C_n le coût de production au mois n.

Quelle est la nature de la suite (C_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

SOLUTION

Diminuer de 2,5 %, c'est multiplier par $1 - \frac{2,5}{100} = 0,975$.

De plus, le coût de production diminue chaque mois de 2,5 %.

On a donc $C_{n+1} = 0,975 \times C_n$.

Donc (C_n) est une suite géométrique de raison 0,975 et de premier terme 43 000.

Exercices d'application directe

7 Pour rappel :

a. Augmenter de a %, c'est multiplier par ....

b. Diminuer de a %, c'est multiplier par ....

8 Une entreprise se lance dans la fabrication de microprocesseurs et prévoit d'augmenter sa quantité de production de 3 % chaque année.
La première année, elle produit 90 000 microprocesseurs.
On désigne par u_n le nombre de microprocesseurs produits la n-ième année.

a. Que vaut u_1 ?

....

b. Calculer u_2 et u_3.

....

....

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

....

Donc la suite (u_n) est ....

9 Camille souhaite acheter en 2023 un appartement d'une valeur de 280 000 €.
Après avoir soigneusement étudié l'évolution des prix de l'immobilier dans ce quartier, elle estime que la valeur de cet appartement va augmenter de 860 € chaque année.

On note V_n la valeur de l'appartement en 2023 + n.

a. Que vaut V_0 ?

....

b. Calculer V_1 et V_2.

....

....

c. Quelle est la nature de la suite (V_n) ?

....

Donc la suite (V_n) est ....

10 475 milliards d'euros de prestations ont été versés par la Sécurité sociale en 2014.
Le ministère de la Santé décide de réduire les dépenses de la Sécurité sociale de 1,8 % par an.
On note D_n la dépense de la Sécurité sociale en 2014 + n.

a. Que vaut D_0 ?

....

b. Calculer D_1 et D_2.

....

....

c. Quelle est la nature de la suite (D_n) ?

....

Donc la suite (D_n) est ....

11 Pour rappel : compléter chaque phrase avec le mot « simples » ou « composés ».

a. Le placement à intérêts .... consiste à calculer les intérêts à la fin de chaque année sur la base du capital initialement placé.

b. Le placement à intérêts .... consiste à calculer les intérêts à la fin de chaque année sur la base du dernier capital acquis.

12 On place 2 800 € sur un Livret A dont le taux d'intérêt est de 1,9 %. On note C_n le capital à l'année n.

a. Donner C_0.

....

b. S'agit-il d'un placement à intérêts simples ou composés ? Justifier.

....

....

....

....

c. Calculer C_1 et C_2.

....

....

d. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

....

Donc la suite (C_n) est ....

13 On place un capital de 120 000 € à 1,75 % à intérêts simples.
On note C_n le capital à l'année n.

a. Donner C_0.

....

b. Calculer C_1 et C_2.

....

c. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

....

Donc la suite (C_n) est ....

14 Une entreprise pétrolière a émis 760 millions de tonnes d'équivalent CO_2 en 2022.
Face à l'urgence climatique, des normes internationales lui imposent de réduire ses émissions de 12 millions de tonnes d'équivalent CO_2 chaque année.
On note E_n le nombre de tonnes d'équivalent CO_2 en 2022 + n.

a. Que vaut E_0 ?

....

b. Quelle est la nature de la suite (E_n) ?

....

Donc la suite (E_n) est ....

15 La population d'un village diminue de 6 % par an. En 2023, sa population était de 12 400 habitants et on note P_n la population en 2023 + n.

a. Que vaut P_0 ?

....

b. Quelle est la nature de la suite (P_n) ?

....

Donc la suite (P_n) est ....

16 Un commercial vient de réaliser un chiffre d'affaires (CA) mensuel de 25 600 € et a désormais pour objectif d'augmenter son CA de 5,4 % par mois.
On note C_n le CA de ce commercial au mois n.

a. Que vaut C_0 ?

....

b. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

....

Donc la suite (C_n) est ....

3 Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique

1. Cas d'une suite arithmétique :

- On rapelle la formule explicite $u_n = u_0 + nr$.
- On remplace u_0 et r par leurs valeurs dans le contexte.

2. Cas d'une suite géométrique :

- On rapelle la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$.
- On remplace u_0 et q par leurs valeurs dans le contexte.

Attention

– si la numérotation commence à 1, la formule devient $u_n = u_1 + (n-1)r$.

– si la numérotation commence à p, la formule devient $u_n = u_p + (n-p)r$.

Attention

– si la numérotation commence à 1, la formule devient $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

– si la numérotation commence à p, la formule devient $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exercice résolu E

Dans les cas ci-dessous, déterminer l'expression de la suite en fonction de n.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 19 et de premier terme −61.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison −13 et telle que $v_1 = 106{,}1$.

SOLUTION

1. L'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = u_0 + nr = -61 + n \times 19$$
$$= -61 + 19n$$

2. L'expression de v_n en fonction de n est :

$$v_n = v_1 + (n-1)r = 106{,}1 + (n-1) \times (-13)$$
$$= 106{,}1 - 13(n-1)$$
$$= 106{,}1 - 13n + 13$$
$$= 119{,}1 - 13n$$

Exercice résolu F

Dans les cas ci-dessous, déterminer l'expression de la suite en fonction de n.

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 4,5 et de premier terme 32.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison 7 et telle que $v_1 = 0{,}9$.

SOLUTION

1. L'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = u_0 \times q^n = 32 \times 4{,}5^n$$

2. L'expression de v_n en fonction de n est :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}9 \times 7^{n-1}$$

Exercices d'application directe

17 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 6 et de premier terme 23.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

18 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 17.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

19 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 11 et de premier terme –16.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

20 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison –2 et de premier terme 50.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

21 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 0,3 et de premier terme 2,8.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

22 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,65 et telle que $u_1 = 1\,480$.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

23 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison –150 et telle que $u_1 = 475$.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

24 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 1,16 et telle que $u_2 = 728$.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

25 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 289 et telle que $u_5 = 17$.

L'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

26 Soit (V_n) une suite géométrique de raison –0,92 et telle que $u_6 = 2{,}3$.

L'expression de V_n en fonction de n est :

V_n = ...

....

27 Avec les notations de l'exercice **8**, l'expression de u_n en fonction de n est :

u_n = ...

....

28 Avec les notations de l'exercice **9**, l'expression de V_n en fonction de n est :

V_n = ...

....

29 Avec les notations de l'exercice **10**, l'expression de D_n en fonction de n est :

D_n = ...

....

30 Avec les notations de l'exercice **12**, l'expression de C_n en fonction de n est :

C_n = ...

....

31 Avec les notations de l'exercice **13**, l'expression de C_n en fonction de n est :

C_n = ...

....

32 Avec les notations de l'exercice **14**, l'expression de E_n en fonction de n est :

E_n = ...

....

33 Avec les notations de l'exercice **15**, l'expression de P_n en fonction de n est :

P_n = ...

....

4 Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique

On identifie tout d'abord la nature de la suite, puis :

1. Cas d'une suite arithmétique :

- On applique la formule : (nombre de termes) $\times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$
- On identifie ou on calcule les données nécessaires.
- On remplace les éléments de la formule par les valeurs correspondantes.

2. Cas d'une suite géométrique :

- On applique la formule : (premier terme) $\times \dfrac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1}$
- On identifie ou on calcule les données nécessaires.
- On remplace les éléments de la formule par les valeurs correspondantes.

Exercice résolu G

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison –12 et de premier terme 28.

1 Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

2 Calculer la somme des 14 premiers termes de (u_n).

SOLUTION

1. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$

$= 21 \times \dfrac{u_0 + u_{20}}{2}$

Or $u_0 = 28$ et $u_{20} = u_0 + 20r = 28 + 20 \times (-12) = -212$

D'où $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = 21 \times \dfrac{28 - 212}{2} = -1\ 932$

2. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{13} = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$

$= 14 \times \dfrac{u_0 + u_{13}}{2}$

Or $u_0 = 28$ et $u_{13} = u_0 + 13r = 28 + 13 \times (-12) = -128$

D'où $u_0 + u_1 + \ldots + u_{13} = 21 \times \dfrac{28 - 128}{2} = -1\ 050$

Exercice résolu H

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5.

1 Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{12}$.

2 Calculer la somme des 17 premiers termes de (u_n).

SOLUTION

1. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1} = u_0 \times \dfrac{3^{13} - 1}{3 - 1}$

$= 5 \times \dfrac{3^{13} - 1}{2} = 3\ 985\ 805$

2. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{16} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1} = u_0 \times \dfrac{3^{17} - 1}{3 - 1}$

$= 5 \times \dfrac{3^{17} - 1}{2} = 322\ 850\ 405$

Exercices d'application directe

34 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 28 000.

a. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.

Or, premier terme = ………… et q = …………

Donc $u_0 + u_1 + \ldots + u_8$ = …………

b. Calculer la somme des 11 premiers termes de (u_n).

35 Soit (v_n) une suite arithmétique de raison 35 et de premier terme 76.

a. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{24}$.

Or nombre de termes = …………, premier terme = …………

et dernier terme = …………

Donc $u_0 + u_1 +$ ………… $+ u_{24}$ = …………

b. Calculer la somme des 33 premiers termes de (u_n).

36 Soit (w_n) une suite arithmétique de raison –3 et de premier terme 12.

a. Calculer $w_0 + w_1 + \ldots + w_{40}$.

b. Calculer la somme des 18 premiers termes de (w_n).

37 Soit (x_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

a. Calculer $x_0 + x_1 + \ldots + x_{10}$.

b. Calculer la somme des 15 premiers termes de (x_n).

38 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 1,4 et de premier terme 675.

a. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_6$.

b. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

39 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 18 et de premier terme –43.

a. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{19}$.

b. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

5 Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

On identifie tout d'abord la nature de la suite, puis :

1. Cas d'une suite arithmétique :

- On applique la formule : (nombre de termes) $\times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$
- On identifie ou on calcule les données nécessaires.
- On remplace les éléments de la formule par les valeurs correspondantes.

2. Cas d'une suite géométrique :

- On applique la formule : (premier terme) $\times \dfrac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1}$
- On identifie ou on calcule les données nécessaires.
- On remplace les éléments de la formule par les valeurs correspondantes.

Exercice résolu 1

Ruth économise en vue d'un projet immobilier. Chaque mois, en réalisant des heures supplémentaires au travail, elle parvient à augmenter de 65 € le montant de ses économies mensuelles.

Le premier mois, elle réalise 274 € d'économies.

Calculer le montant total des économies réalisées par Ruth :

a. lors des 18 premiers mois.

b. lors de la deuxième année.

SOLUTION

On note u_n le montant des économies réalisées le n-ième mois.
(u_n) est une suite arithmétique de raison 65 car le montant des économies augmente de 65 € chaque mois.
Donc $u_{n+1} = u_n + 65$.

a. $u_1 + u_2 + \ldots + u_{18} = (\text{Nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$

$= 18 \times \dfrac{u_1 + u_{18}}{2}$

$u_1 = 274$ et $u_{18} = u_1 + 17r = 274 + 17 \times 65 = 1\,379$

D'où $u_1 + u_2 + \ldots + u_{18} = 18 \times \dfrac{274 + 1\,379}{2}$

$= 14\,877$

Le montant total des économies réalisées par Ruth lors des 18 premiers mois est donc de 14 877 €.

b. $u_1 + u_2 + \ldots + u_{24} = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$

$= 12 \times \dfrac{u_{13} + u_{24}}{2}$

Or, $u_{13} = u_1 + 12r = 274 + 12 \times 65 = 1\,054$

$u_{24} = u_1 + 23r = 274 + 23 \times 65 = 1\,769$

$u_{13} + u_{14} + \ldots + u_{24} = 12 \times \dfrac{1\,054 + 1\,769}{2} = 16\,938$

Le montant total des économies réalisées par Ruth lors de la deuxième année est donc de 16 938 €.

Exercice résolu 3

Une entreprise de livraison voit les coûts d'entretien de son parc automobile augmenter de 2 % par an. En 2022, le montant de ces coûts était de 25 380 €.
Calculer le montant total des coûts d'entretien prévus pour la période allant de 2022 à 2030.

SOLUTION

On note u_n le montant des coûts d'entretien en 2022 + n. (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02 car le montant des coûts d'entretien augmente de 2 % chaque mois.

Donc $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = u_n \times 1{,}02$.

$u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = (\text{premier terme}) \times \frac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q - 1} = u_0 \times \frac{1{,}02^9 - 1}{1{,}02 - 1}$

$= 25\,380 \times \frac{1{,}02^9 - 1}{1{,}02 - 1} \approx 247\,572{,}47$

Le montant total des coûts d'entretien prévus pour la période allant de 2022 à 2030 est donc d'environ 247 572,47 €.

Exercices d'application directe

40 Après avoir passé des entretiens d'embauche, un chargé de gestion en ressources humaines reçoit une proposition de poste avec le salaire suivant : salaire annuel de 26 400 € à l'embauche et augmentation annuelle de 1,25 %.

On note s_n le salaire annuel perçu à l'année n.

Le montant total des salaires perçus lors des 10 premières années est :

$s_0 + s_1 + \ldots + s_9 =$ ....

Or, premier terme = ... et q = ...

Donc $s_0 + s_1 + \ldots + s_9 =$ ....

....

Donc le montant total des salaires perçus lors des 10 premières années est de ....

41 Après avoir passé des entretiens d'embauche, un chargé de gestion en ressources humaines reçoit une proposition de poste avec le salaire suivant : salaire annuel de 24 750 € à l'embauche et augmentation annuelle de 90 €.

On note s_n le salaire annuel perçu à l'année n.

Le montant total des salaires perçus lors des 10 premières années est :

....

....

....

....

....

....

Donc le montant total des salaires perçus lors des 10 premières années est de ....

42 Avec les notations de l'exercice **8**, le nombre de microprocesseurs produits lors des 10 premières années est :

....

....

....

....

Donc le nombre de microprocesseurs produits lors des 10 premières années est de ....

43 Avec les notations de l'exercice **10**, le montant de la dépense totale de la Sécurité sociale entre 2014 et 2022 est :

....

....

....

....

Donc le montant de la dépense totale de la Sécurité sociale entre 2014 et 2022 est de ....

44 Avec les notations de l'exercice **14**, le nombre de millions de tonnes d'équivalent CO_2 émis de 2022 à 2030 peut être estimé à :

....

....

....

....

....

Donc le nombre de millions de tonnes d'équivalent CO_2 émis de 2022 à 2030 peut être estimé à : ....

Exercices d'approfondissement

45 Depuis 2010, le chiffre d'affaires d'une entreprise s'accroit chaque année de 13 000 €.
Le chiffre d'affaires en 2010 était de 240 000 €.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le chiffre d'affaires de l'année $(2010 + n)$ et on suppose que l'évolution du chiffre d'affaires va se poursuivre de la même manière.

a. Que vaut C_0 ?

b. Calculer C_1 et C_2.

c. Quelle est la relation entre C_{n+1} et C_n ?

d. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

e. Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

f. Déterminer le chiffre d'affaires prévu pour 2020.

g. Déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires dépassera 510 000.

h. Calculer le chiffre d'affaires total de 2010 à 2020.

46 Dans un laboratoire d'analyse médicale, les dépenses de matériel s'élèvent à 56 000 euros en 2019 et à 61 000 euros en 2020 à cause de l'augmentation des prix.

a. Calculer le taux d'évolution de la dépense entre 2019 et 2020.

b. On suppose que le taux d'évolution reste identique et on note D_n la dépense de matériel à l'année $(2019 + n)$. Exprimer D_n en fonction de n.

c. Calculer la dépense prévue pour 2029.

d. Calculer la dépense totale de matériel entre 2019 et 2030.

47 La production de déchets polluants d'une entreprise pétrochimique était de 24 500 tonnes en 2009 et n'a fait qu'augmenter depuis, pour atteindre 34 000 tonnes en 2020.
Depuis 2009, en raison de nouvelles normes antipollution, la production de déchets polluants de l'entreprise ne doit pas dépasser 21 000 tonnes par an.
Chaque année, l'entreprise doit payer une amende si la production de déchets polluants dépasse la quantité autorisée, et cette amende augmente de 6 000 euros par an tant que l'entreprise ne prend pas de mesure anti-pollution. En 2009, l'entreprise a payé 41 500 euros d'amende.

Partie A

On suppose dans cette partie que l'entreprise ne prend aucune mesure anti-pollution.
On note A_n l'amende payée en $(2008 + n)$.
Ainsi, $A_1 = 41500$.

a. Calculer le montant de l'amende payée par l'entreprise en 2010 et 2011.

b. Quelle est la nature de la suite (A_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

c. Calculer le montant total des amendes payées de 2009 à 2020.

Partie B

En raison de ces montants d'amende très importants, l'entreprise décide de réduire sa production de déchets polluants de 3 % par an à partir de 2020.
On note Q_n la quantité de déchets polluants rejetée en $(2019 + n)$. Ainsi, $Q_1 = 34\,000$.

a. Quelle est la nature de la suite (Q_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

b. Calculer la quantité de déchets polluants prévue pour 2030.

c. À partir de quelle année l'entreprise ne paiera plus d'amende ?

48 TABLEUR Sur une chaîne de production de smartphones, un technicien en contrôle qualité sait que la production augmente de 5 % par an tandis que grâce à des améliorations techniques, le nombre de pièces défectueuses diminue de 630 par an. Il possède également les informations suivantes :

	A	B	C	D
1	Année	Nombre de smartphones produits	Nombre de smartphones défectueux	Pourcentage d'erreur sur la chaîne
2	2017	781 000	6 956	0,89 %
3	2018	820 050	6 326	0,77 %
4	2019	861 053	5 696	0,66 %
5	2020	904 105	5 066	0,56 %

a. Quelle formule a été entrée en B3 et recopiée vers le bas ?

b. Quelle est la nature de la suite de la colonne B ?

c. Quelle formule a été entrée en C3 et recopiée vers le bas ?

d. Quelle est la nature de la suite de la colonne C ?

e. La colonne D est au format pourcentage. Quelle formule a été entrée en D2 et recopiée vers le bas ?

49 TABLEUR En économie, on rappelle que le rendement moyen r sur deux années consécutives se calcule à l'aide de la formule suivante :
$r = \sqrt{(1 + t_1)(1 + t_2)} - 1$, où t_1 et t_2 désignent les taux d'évolution.
On souhaite comparer avec les résultats que l'on obtiendrait à l'aide de la moyenne arithmétique des rendements $\dfrac{t_1 + t_2}{2}$.
On s'intéresse à la valeur du CAC40 à la fin de l'année, de 1997 à 2002.

	A	B	C
1	Année	Valeur du CAC40 à la fin de l'année	Rendement
2	1997	2998,91	
3	1998	3942,66	31,47 %
4	1999	5958,32	51,12 %
5	2000	5926,42	–0,54 %
6	2001	4624,58	–21,97 %
7	2002	3063,91	–33,75 %

a. Détailler le calcul permettant de trouver le rendement de 1997 à 1998.

b. Quelle formule a été saisie dans la cellule C3 afin d'obtenir par recopie vers le bas les rendements sur deux années consécutives ?

c. Calculer la moyenne arithmétique des valeurs contenues dans les cellules C3 et C4.

d. Calculer la moyenne géométrique des valeurs contenues dans les cellules C3 et C4.
On ajoute deux colonnes contenant respectivement les rendements moyens et les moyennes arithmétiques des rendements sur deux années consécutives.

	…	D	E
1	…	Rendement moyen sur deux ans	Moyenne arithmétique sur deux ans
2	…		
3	…		
4	…	40,95 %	41,30 %
5	…	22,60 %	25,29 %
6	…	–11,90 %	–11,26 %
7	…	–28,10 %	–27,86 %

e. Quelle formule a été saisie dans la cellule D4 afin d'obtenir par recopie vers le bas les rendements moyens sur deux années consécutives ?

f. Quelle formule a été saisie dans la cellule E4 afin d'obtenir par recopie vers le bas la moyenne arithmétique des rendements sur deux années consécutives ?

50 On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 2
Tant que u < 5000
  n ← n + 1
  u ← 3u
Fin Tant que
```

a. Reproduire et compléter le tableau suivant jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

n	0	1	…
u	2	6	…

b. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme ?

c. Que calcule cet algorithme ?

d. Soit p un réel. On souhaite modifier cet algorithme pour pouvoir déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant p$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 2.

Compléter l'algorithme suivant :

```
Saisir …
Saisir …
  n ← 0
  u ← 2
Tant que u < …
  n ← n + 1
  u ← …
Fin Tant que
```


51 On place un capital C à intérêts composés, au taux annuel t.

a. On suppose dans cette question que $C = 28\,000$ et que $t = 1{,}8$ %. Calculer le capital acquis au bout de 10 ans.

b. Reproduire et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la valeur du capital après n années de placement.

```
Saisir C
Saisir t
Saisir n
 Pour i allant de … à …
 C prend la valeur …
Fin Pour
Afficher C
```

52 Rechercher un taux annuel

Calculer

Un capital de 5 800 euros a été placé à intérêts simples pendant 4 ans et a acquis une valeur de 6 681,6 euros.

Quelle était la valeur du taux annuel du placement ?

53 Rechercher un capital

Calculer – Chercher

Un capital est placé à 8 % par an avec intérêts simples pendant 9 ans. Sa valeur acquise à l'issue de cette période est de 21 500 euros.
Calculer la valeur de ce capital.

54 Le continent de plastique

Modéliser – Calculer

Le « continent de plastique » est la plus grande des plaques de déchets plastiques évoluant sur les océans. Elle occupe actuellement dans l'océan Pacifique une surface dont l'aire est évaluée à plus de 1,6 million de km², entre Hawaï et la Californie.
En 2017, des scientifiques ont estimé la masse totale de déchets plastiques dans les océans à 300 millions de tonnes et ont prévu une augmentation de 5,8 % par an au cours des prochaines années.
On note u_n la masse totale de ces déchets, exprimée en millions de tonnes, pour l'année $(2017 + n)$.

a. Que vaut u_0 ?

b. Calculer u_1 et u_2.
(On arrondira les résultats au million près).

c. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On précisera sa raison et son premier terme.

d. Exprimer u_n en fonction de n.

e. Calculer la masse totale de déchets prévue en 2040.

f. On souhaite déterminer en quelle année la masse totale de ces déchets plastiques aura pour la première fois augmenté de 25 % par rapport à sa valeur de 2017.

g. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable n contienne la réponse au problème posé.

```
n ← 2017
u ← 300
Tant que u < 375
  n ← …
  u ← …
Fin Tant que
```

h. Que contiennent les variables u et n après exécution de cet algorithme?
Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

D'après Bac STMG, Antilles-Guyane, 2019.

Dans les exercices 55 et 56, on utilisera librement la définition et la propriété suivantes :
Définition : dans le cas d'un emprunt sur plusieurs années, chacun des remboursements annuels est appelé une annuité.
Propriété : on emprunte à annuités constantes sur n années un montant de E € à un taux d'intérêt annuel i.
Alors, le montant de chacune des annuités est de :

$$a = \mathrm{E} \times \frac{i}{1-(1+i)}.$$

55 Le prêt

Calculer

Profitant que les taux d'emprunts sont bas, Camille décide d'étudier les différentes offres de prêts des banques afin d'acheter un appartement.
En faisant jouer la concurrence, elle obtient un prêt au taux d'intérêt annuel de 1,4 % sur 20 ans à annuités constantes pour l'emprunt de 165 000 euros.
Elle cherche à calculer le montant de ses annuités.

a. Calculer le montant de chacune des annuités.
(On arrondira au centime.)

b. Calculer le montant de chacune des mensualités correspondantes.

c. Calculer le coût du crédit, c'est-à-dire le montant total des intérêts versés à la banque sur 20 ans.

d. Camille s'est fixée pour objectif que le montant de ses mensualités ne dépasse pas le loyer qu'elle paye en étant locataire, c'est-à-dire 780 euros. Quel taux d'intérêt doit-elle négocier avec la banque afin d'atteindre son objectif ?

56 Le prêt (bis)

Calculer – Communiquer

Un couple décide d'emprunter 250 000 euros pour l'achat d'une maison à 410 000 euros.
Ce couple choisit de se répartir le paiement au prorata des salaires, c'est-à-dire 60 % pour le premier membre du couple et 40 % pour le second.
Leur banque propose un taux d'intérêt annuel de 1,2 % sur 15 ans.

a. Calculer le montant de chacune des annuités.
(On arrondira au centime.)

b. Calculer le montant de chacune des mensualités correspondantes.

c. En déduire le montant des mensualités de chacun des membres du couple.

d. Calculer le coût du crédit, c'est-à-dire le montant total des intérêts versés à la banque sur 20 ans.

e. Le salaire du premier membre du couple est de 3 750 euros. Calculer le salaire du deuxième membre.

f. Le couple souhaite que le remboursement du crédit ne dépasse pas 25 % du salaire pour chacun des deux membres. Est-ce que le prêt proposé par la banque va être accepté par le couple ?

g. Quelle solution peut-on proposer à ce couple ?

57 Datation au carbone 14

Raisonner – Calculer

On étudie la désintégration du carbone 14 et son utilisation pour la datation des fossiles.
Le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement, d'environ 1,24 % par siècle.
Les rayons cosmiques produisent dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement. Le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la Terre est constant.
Les tissus et végétaux vivants contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère.
À leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse.
Celui-ci se désintègre dans les conditions vues ci-dessus.

a. On note a_n le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un squelette d'homme préhistorique n siècles après sa mort. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

b. Ce squelette contient actuellement 5 % de son carbone initial. Justifier que son âge est d'environ 24 000 ans.

58 Arithmétique ou géométrique ?

Calculer

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 6$ et $u_{n+1} = -1{,}2u_n + 11$.

a. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5$.
Calculer v_0, v_1 et v_2.

c. Conjecturer la nature de la suite (v_n).

d. Démontrer la conjecture précédente.

TABLEUR 1 Emprunt à intérêts simples ou à intérêts composés

SITUATION Un fournisseur de matériel médical et chirurgical décide de rééquiper son parc informatique et choisit d'emprunter 33 600 € sur un an pour des raisons de trésorerie.
La banque propose deux formules :
- Formule 1 : Emprunt à intérêts simples sur un an à 0,5 % mensuel.
- Formule 2 : Emprunt à intérêts composés sur un an à 0,4 % mensuel.

⇨ **Le comptable étudie les deux formules afin de voir laquelle est la plus avantageuse.**

Pour des emprunts à court terme (moins d'un an), le calcul des intérêts se fait généralement selon le système des intérêts simples, c'est-à-dire calculés sur la seule base du montant emprunté.
Sur le moyen et long terme (plus d'un an), le calcul des intérêts se fait plutôt selon le système des intérêts composés, c'est-à-dire calculés sur la base du montant emprunté plus les intérêts de la période précédente.

A Comparaison des deux formules

1 Préparer une feuille de calcul selon le modèle ci-dessous :

	A	B	C	D	E
1	Taux mensuel	à interêts simples		à interêts composés	
2					
3					
4	Mois	interêts formule 1	Emprunt 1	Interêts formule 2	Emprunt 2
5	1				
6	2				
7	3				

2 Mettre les cellules B2 et D2 au format pourcentage et les compléter.

3 Mettre la plage de cellules de B5 à E16 au format Comptabilité.

4 Compléter les cellules C4 et E4 par le montant de l'emprunt.

5 Entrer en B5 la formule =C$4*B$2 puis en C5 la formule =C4+B5. Sélectionner ensuite les cellules B5 et C5 et les faire glisser vers le bas jusqu'à la ligne 16.

6 Quelle est la nature de la suite contenue dans la colonne C ? On précisera sa raison et son premier terme.

7 Quelle autre formule aurait-on pu entrer en C5 avant de la faire glisser vers le bas ?

8 Entrer en D5 la formule =E4*D$2 puis en E5 la formule =E4+D5. Sélectionner ensuite les cellules D5 et E5 et les faire glisser vers le bas jusqu'à la ligne 16.

9 Quelle est la nature de la suite contenue dans la colonne E ? On précisera sa raison et son premier terme.

10 Quelles autres formules aurait-on pu entrer en E5 avant de les faire glisser vers le bas ?

11 Parmi les deux formules proposées par la banque, laquelle est la plus avantageuse pour le fournisseur ?

B Calcul du taux annuel

15	11				
16	12				
17					
18	Taux annuel				
19					

1 Mettre les cellules B18 et D18 au format pourcentage.

2 Quelles formules faut-il entrer en B18 et D18 pour obtenir les taux annuels ? Les calculer.

C Changement des taux mensuels

1 Quelles sont les seules cellules qu'il faudrait modifier pour reprendre le même problème avec des taux mensuels différents ?

2 Essayer avec un taux de 0,4 % pour la formule 1 et 0,2 % pour la formule 2.

Travaux pratiques

PYTHON 2 Placement à intérêts composés

SITUATION

Isabelle décide de placer 10 000 € sur un livret au taux annuel de 1,5 %, les intérêts étant composés et versés annuellement à terme échu.

⇨ **On s'intéresse à l'évolution de son capital.**

A Réalisation d'un programme Python

1 Réaliser une fonction Python qui retourne le capital obtenu par Isabelle au bout de n années, en supposant qu'elle n'effectue aucun retrait.

2 On a programmé la fonction suivante :

```
def f1():
    k=10000
    n=0
    while k<11000 :
          k=k*1.015
          n+=1
    return(n)
```

Que fait-elle ?

La programmer et préciser la valeur retournée.

3 Que faudrait-il modifier sur la fonction précédente pour qu'elle retourne le nombre d'années nécessaires pour obtenir un capital supérieur à x €, x étant une variable.

B Vérification avec le tableur

On considère la feuille de calculs suivante :

	A	B
1	0	10 000
2	1	10 150
3	2	10 302,25
4	3	10 456,7837

1 Quelle formule a été saisie en A2, puis tirée vers le bas ?

2 Quelle formule a été saisie en B2, puis tirée vers le bas ?

3 Retrouver le résultat de la question 2 de la partie **A**.

C Étude théorique (approfondissement)

On appelle (u_n) la suite correspondant au capital obtenu par Isabelle au bout de n années.

1 Calculer u_1, u_2, u_3.

2 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

3 En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

4 Vérifier alors le résultat de la question 2 de la partie **A**.