Chapitre 8
Généralités sur les fonctions

Objectifs

- Connaître différentes représentations des fonctions : algébrique, graphique ou numérique.
- Connaître les notions de fonctions paires, impaires et leurs traductions géométriques.
- Savoir exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique.
- Savoir résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.
- Connaître la croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et les tableaux de variations.
- Savoir relier représentation graphique et tableau de variations.
- Savoir déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.

Culture scientifique

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) est un mathématicien allemand. Considéré comme le premier à avoir utilisé le terme "fonction" dans son sens moderne, il a également développé le calcul infinitésimal, qui a permis d'étudier les fonctions de manière plus formelle.

Et sinon, dans la vraie vie ?

En sécurité routière, la distance de freinage est la distance parcourue entre le moment où le conducteur appuie sur la pédale de frein et le moment où le véhicule est à l'arrêt. Cette distance se calcule en fonction de la vitesse du véhicule.

Cours et applications directes

Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 104

A Notion de fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}_f$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définir une **fonction** f d'un ensemble $\mathcal{D}$ de réels dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de $\mathcal{D}$ un unique réel noté $f(x)$ (qui se lit « f de x »).

$$x \longmapsto \boxed{\text{fonction } f} \longrightarrow f(x)$$

On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, et on le note $\mathcal{D}_f$.

On note : $f \begin{cases} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$

- $f(x)$ est **l'image** de x par f ;
- x est un **antécédent** de $f(x)$ par f.

Remarques

- On peut définir une fonction par une **expression algébrique**, un **tableau de valeurs**, une **courbe**, un **algorithme**...
- Une fonction se nomme par une lettre, généralement f, g, h...
- Si a et b sont deux réels tels que $b = f(a)$, alors on dit que b est **l'image** de a par la fonction f et que a est **un antécédent** de b par f.
- Par une fonction, un réel a ne peut avoir qu'**une seule image**, mais un réel b peut avoir **aucun**, **un ou plusieurs antécédents**.

> Exercice résolu
>
> Traduire chacune des phrases suivantes par une égalité :
>
> - L'image de 3 par la fonction g est 5 : $g(3) = 5$
> - 2 est un antécédent de -3 par la fonction f : $f(2) = -3$
> - -5 a pour image $-\sqrt{2}$ par la fonction h : $h(-5) = -\sqrt{2}$

B Expression algébrique d'une fonction

Définition

Une **expression algébrique** d'une fonction f est une expression littérale qui définit $f(x)$.

Méthode

Lorsqu'une fonction est définie par une expression, on peut calculer des **images** et des **antécédents**.

- Pour déterminer **l'image** d'un nombre a par une fonction f, **on calcule** $f(a)$.
- Pour déterminer **le (ou les) antécédent(s)** d'un nombre b par f, **on résout l'équation** $f(x) = b$.

> Exercice résolu
>
> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.
>
> - L'image de 5 par f est $f(5) = 2 \times 5^2 - 6 \times 5 + 3 = 50 - 30 + 3 = 23$.
> - Les antécédents de 3 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 3$:
>
> $$f(x) = 3 \iff 2x^2 - 6x + 3 = 3 \iff 2x^2 - 6x = 0 \iff 2x\,(x-3) = 0$$
> $$\iff 2x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 3$$
>
> Donc 3 a deux antécédents par f qui sont 0 et 3.

Remarque

Lorsque l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f n'est pas donné, on prend pour $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$.

Par exemple, pour la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x)$ est définie pour tout x non nul.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \,]-\infty\,; 0[\, \cup \,]0\,; +\infty[$.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **105**

1 Soit f la fonction qui, à un côté c d'un triangle équilatéral, associe son périmètre.
Donner une expression algébrique de f.

....

....

2 Un cycliste parcourt le trajet Toulon – Hyères, qui mesure $20\ km$, en un temps t (en minutes).
Définir par une expression algébrique la fonction vitesse moyenne (en km/h) du cycliste, notée v, en fonction de t.

....

....

3 Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = 4x^2 + 3x$.
Calculer lorsque c'est possible :

a. $f(2) =$ ....

b. $f\left(\dfrac{2}{3}\right) =$ ....

c. $f\left(\sqrt{5}\right) =$ ....

d. $f(-1) =$ ....

4 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$.

a. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,+\infty\,[$. ....

....

b. Calculer $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$. ....

c. Donner un antécédent de 2 par f. ....

5 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$.

a. Déterminer tous les antécédents de 6 par g. ....

....

b. Déterminer l'ensemble des antécédents de -1 par g. ....

....

c. Quels sont les nombres qui admettent au moins un antécédent par g ? ....

....

Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 106

C Fonction définie par un algorithme

Définition

Un **algorithme** est une suite finie d'opérations qui aboutit à un résultat.
Une fonction peut se définir par un algorithme : l'algorithme décrit les opérations à faire sur x pour obtenir son image $f(x)$.

Exemple

Soit f définie par l'algorithme suivant qui s'applique à un nombre :

- ajouter 5 au nombre ;
- multiplier le résultat par lui-même ;
- soustraire 3.

Traduction sous forme algébrique.
Soit x le nombre initial :

- $x+5$
- $(x+5)^2$
- $(x+5)^2-3$

f est donc définie par $f(x)=(x+5)^2-3$.

D Tableau de valeurs d'une fonction

Définition

Un **tableau de valeurs** d'une fonction f regroupe sur la première ligne des nombres appartenant à l'ensemble de définition de f et sur la deuxième ligne, les images de ces nombres par f.

Exemple
Soit f une fonction dont on donne un tableau de valeurs :

x	-5	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	4	5	1	2	5	-7

- L'image de -3 est 5, autrement dit $f(-3)=5$.
- L'image de 0 est 2, autrement dit $f(0)=2$.
- On peut lire deux antécédents de 5 : -3 et 2, car $f(-3)=5$ et $f(2)=5$.

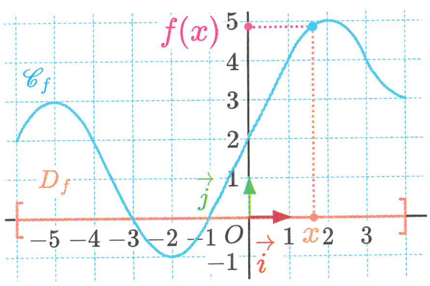
Remarque
En général, un tableau de valeurs ne regroupe que quelques valeurs de l'ensemble de définition.
Dans ce cas, la fonction n'est pas entièrement définie par son tableau de valeurs.

E Courbe représentative d'une fonction

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

- La **représentation graphique** ou **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$, où $x\in\mathcal{D}_f$.
- Une **équation** de $\mathscr{C}_f$ est $y=f(x)$.
- Un point $A(x_A, y_A)$ du plan appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $x_A\in\mathcal{D}_f$ et $y_A=f(x_A)$.



Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-1$

$$f(3)=3^2-1$$
$$=9-1$$
$$=8$$

Donc le point $A\,(3\,;\,8)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : **107**

6 On donne l'algorithme suivant pour définir la fonction f. Il s'applique à un nombre.

- Soustraire 2 ;
- prendre le carré du résultat obtenu ;
- multiplier par le nombre initial ;
- ajouter 3.

a. Calculer l'image de 4 par f. ....

b. Déterminer une expression algébrique de f. ....

....

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^2 + 5$. Déterminer un algorithme qui définit la fonction f.

....

....

8 Soit la fonction f définie sur $[-6\,;\,4]$ par $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

a. Compléter le tableau suivant :

x	-6	-3	-2	0	2	4
$f(x)$	......	......	......	......	......	......

b. Donner un antécédent de 9 par f. ....

c. Donner $f(f(-3))$. ....

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+5}$, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2. Calculer l'ordonnée du point A. ....

....

b. Le point de coordonnées $(1\,;\,-0{,}33)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? ....

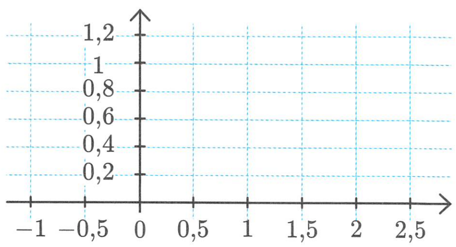
....

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Remplir le tableau de valeurs suivant (arrondir au centième éventuellement) puis tracer une allure possible de la courbe représentative de f sur $[-1\,;\,2{,}5[$.

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$
$f(x)$	......	......	......	......

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$f(x)$	......	......	......	......



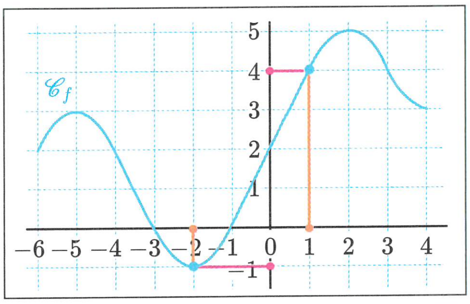
Cours et applications directes

Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 108

F Utilisation de la courbe représentative d'une fonction

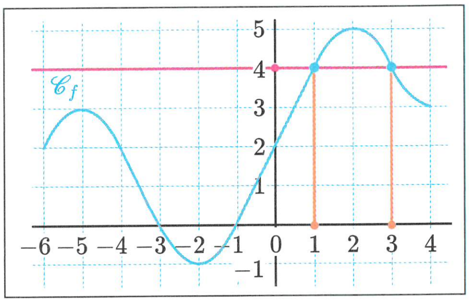
Exemples

Déterminer graphiquement l'image d'un nombre



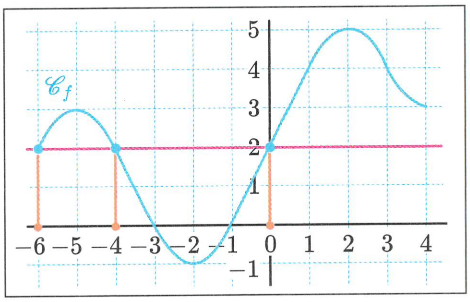
L'image de 1 par f est 4 : $f(1) = 4$.

Déterminer graphiquement les antécédents d'un nombre



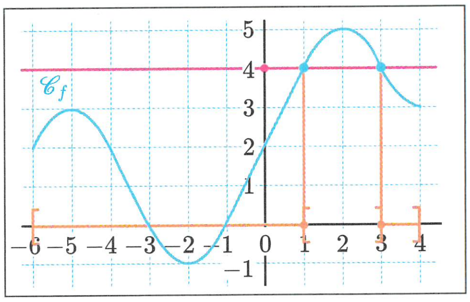
4 a deux antécédents par f qui sont 1 et 3.

Résoudre graphiquement une équation



L'équation $f(x) = 2$ a trois solutions : -6 ; -4 et 0.

Résoudre graphiquement une inéquation



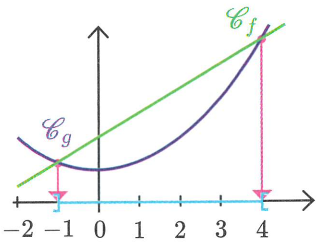
L'inéquation $f(x) < 4$ a pour ensemble de solutions :
$S = [\,-6\,;\,1\,[\;\cup\;]\,3\,;\,4\,]$.

G Résolution graphique d'équations et d'inéquations à deux fonctions

Propriété

Soit f et g deux fonctions, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses pour lesquelles $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.



Dans l'exemple ci-contre :

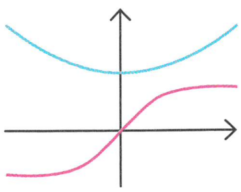
- $f(x) = g(x)$ a pour solutions -1 et 4.
- L'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]\,-1\,;\,4\,[$.

H Fonction paire, fonction impaire

Définition

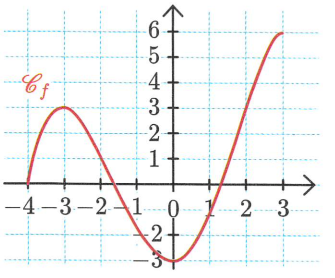
Soit f une fonction définie sur D_f et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$ alors on dit que f est paire et dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$ alors on dit que f est impaire et $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 109

11 On donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ci-contre.



a. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f.

....

b. Déterminer graphiquement l'image de 1 par f. ....

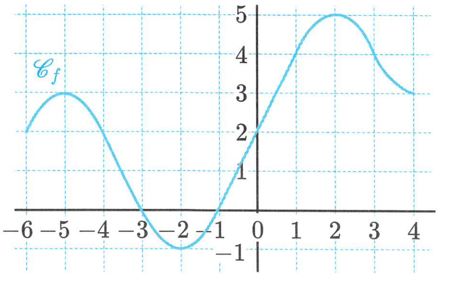
c. Déterminer graphiquement $f(-2)$. ....

d. Déterminer graphiquement les antécédents de 3 par f. ....

e. Déterminer graphiquement les antécédents de 6 par f. ....

f. L'équation $f(x) = -1$ admet-elle deux solutions négatives ? ....

12 Soit f la fonction représentée ci-contre :



a. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f.

....

b. Résoudre graphiquement :

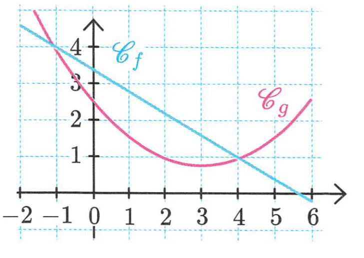
$(E) : f(x) = 0$ ....

$(I_1) : f(x) > 0$ ....

$(I_2) : f(x) < 0$ ....

c. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

13 Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et leurs courbes représentatives sont données ci-contre.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :



a. $f(x) = g(x)$ ....

b. $f(x) > g(x)$ ....

c. $f(x) \leq g(x)$ ....

14 Compléter le tableau de valeurs suivant, sachant que f est paire et que g est impaire.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	....	7	3	....
$g(x)$	1	....	....	4	....

Cours et applications directes

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 110

I Variations d'une fonction

↘ Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$,
alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans le même ordre que leurs images.

- Si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$,
alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.
Les réels de l'intervalle I sont rangés dans l'ordre contraire de leurs images.

- Dire que f est **strictement monotone** sur I signifie que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

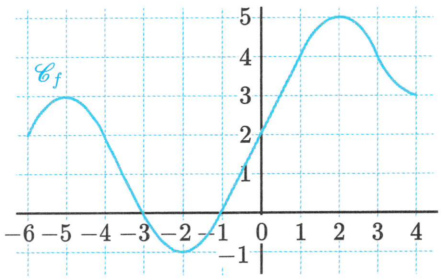
Exemple

Soit f la fonction représentée ci-contre.

La fonction f est croissante sur $[-6\,;\,-5]$ et sur $[-2\,;\,2]$.

La fonction f est décroissante sur $[-5\,;\,-2]$ et sur $[2\,;\,4]$.

On peut représenter les variations dans un tableau appelé le tableau de variations de f.



x	-6		-5		-2		2		4
Variations de f	2	↗	3	↘	-1	↗	5	↘	3

J Extremum d'une fonction

↘ Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f admet un **maximum** M sur I signifie qu'il existe un réel a de I tel que $f(a) = M$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
Graphiquement, M est l'ordonnée la plus grande de tous les points de la courbe de f.

- f admet un **minimum** m sur I signifie qu'il existe un réel b de I tel $f(b) = m$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.
Graphiquement, m est l'ordonnée la plus petite de tous les points de la courbe de f.

- Un **extremum** de f est un maximum ou un minimum de f.

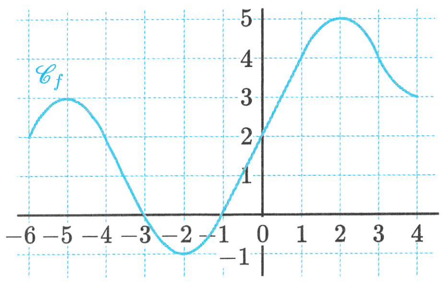
- f est **bornée** sur I lorsqu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$.

Exemple

Soit f la fonction représentée ci-contre.

Sur $[-6\,;\,4]$, la fonction f admet pour maximum 5 atteint en $x = 2$.

Sur $[-6\,;\,4]$, la fonction f admet pour minimum -1 atteint en $x = -2$.

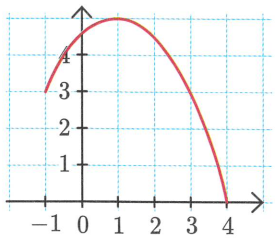


Attention
Les extremums dépendent de l'intervalle choisi : sur $[-6\,;\,0]$, le maximum de la fonction f est 3, il est atteint en $x = -5$.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **111**

15 On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1\,;\,4]$.



a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Donner le minimum et le maximum de f sur $[-1\,;\,4]$.

16 Soit f une fonction dont on donne le tableau de variations :

x	-5		0		3		7
Variations de f	4	↘	1	↗	6	↘	2

a. Donner l'ensemble de définition de f.

b. Décrire les variations de f sur son ensemble de définition.

c. Donner le maximum de f. En quel réel est-il atteint ?

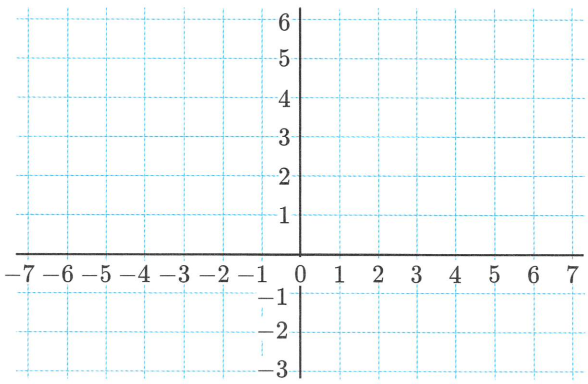
d. f admet-elle un minimum ?

e. Comparer si possible $f(1)$ et $f(2)$. Justifier.

f. Comparer si possible $f(-4{,}5)$ et $f(-4{,}4)$. Justifier.

g. Comparer si possible $f(2{,}9)$ et $f(3{,}1)$. Justifier.

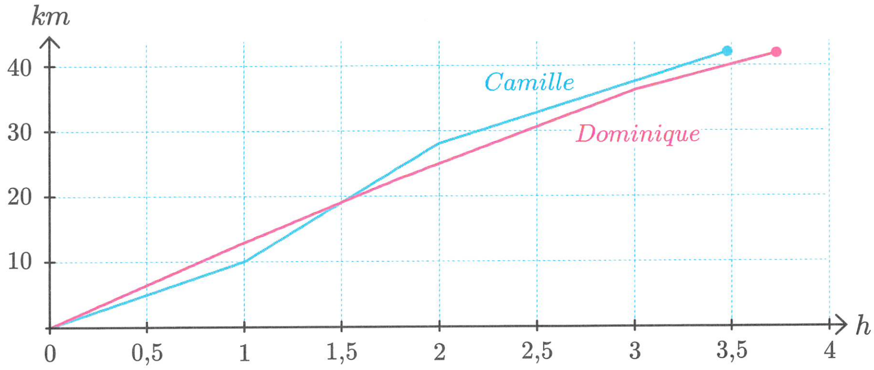
h. Construire une courbe pouvant être la représentation de la fonction f.



Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 112

1 Dominique et Camille courent un marathon. Les courbes suivantes représentent les distances parcourues (en km) par Dominique (en rose) et Camille (en bleu) en fonction du temps (en h).



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

a. Quelle est la longueur d'un marathon ? ....

b. Au bout de 2 heures de course, qui était en tête ? Avec quel écart en km ? ....

c. Sur quel intervalle de temps Dominique a-t-elle été devant Camille ? ....

d. Entre Dominique et Camille, qui est arrivée la première ? ....

e. Qui est arrivée en premier au km 30 ? Avec quel écart en heures ? ....

f. Quelle est la vitesse moyenne de Camille sur la première heure de course ? ....

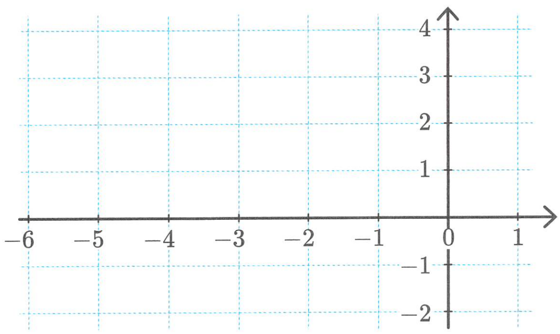
2 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 6x + 5\right)$.

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. ....

b. À l'aide d'une calculatrice, remplir le tableau de valeurs suivant :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	....	....	....	....	....	....	....

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le repère suivant :



d. À partir de la représentation précédente, conjecturer les variations de f sur $[-6\,;\,0]$.

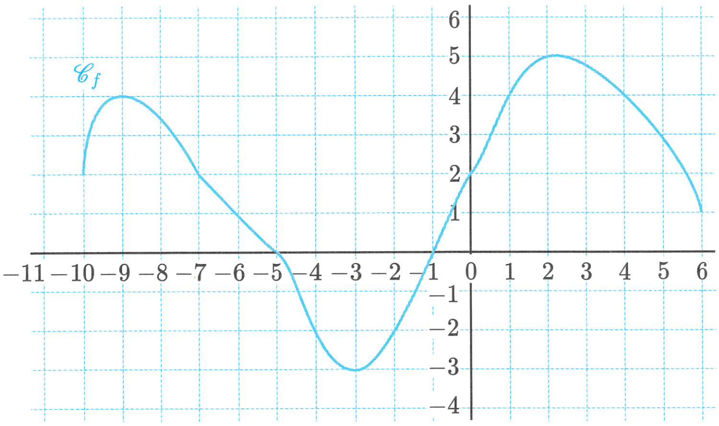
....

....

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 113

1 On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



a. Donner l'ensemble de définition de f : $\mathcal{D}_f =$ ....

b. Déterminer graphiquement l'image de 1 par f, puis $f(-7)$. ....

c. Déterminer les antécédents de 4 par la fonction f. ....

d. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f. ....

e. Résoudre graphiquement l'équation (E) : $f(x) = -2$. ....

f. Résoudre graphiquement l'inéquation (I_1) : $f(x) \leq -2$. ....

g. Résoudre graphiquement l'inéquation (I_2) : $f(x) > 0$. ....

h. Compléter le tableau de signes de la fonction f.

x	
Signes de $f(x)$	

i. Décrire les variations de la fonction f.

....

j. Préciser les extremums de f sur son ensemble de définition.

....

k. Compléter le tableau de variations de la fonction f.

x	
Variations de f	

12. Comparer si c'est possible en justifiant la réponse :

a. $f(0{,}5)$ et $f(1{,}2)$. ....

b. $f(-7{,}3)$ et $f(-7{,}2)$. ....

c. $f(-2{,}9)$ et $f(-3{,}1)$. ....

2 Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

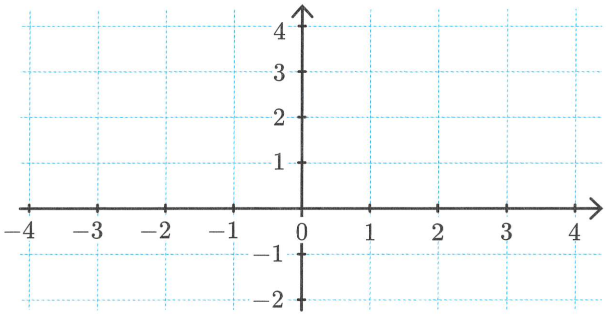
a. Déterminer les ensembles de définition de f et de g. ....

....

b. À l'aide d'une calculatrice, remplir le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3	4
$f(x)$	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......
$g(x)$	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

c. Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g dans le repère suivant :



d. Par lecture graphique, résoudre :

1) l'équation $f(x) = g(x)$ ....

2) l'inéquation $f(x) < g(x)$ ....

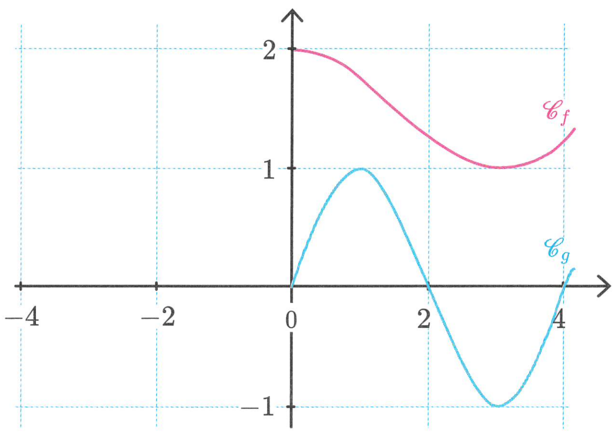
3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(1) < f(2)$.

a. Peut-on affirmer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$? ....

b. Peut-on affirmer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$? ....

c. Peut-on affirmer que f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$? ....

4 a. Compléter les courbes ci-dessous, sachant que f est paire et g est impaire.



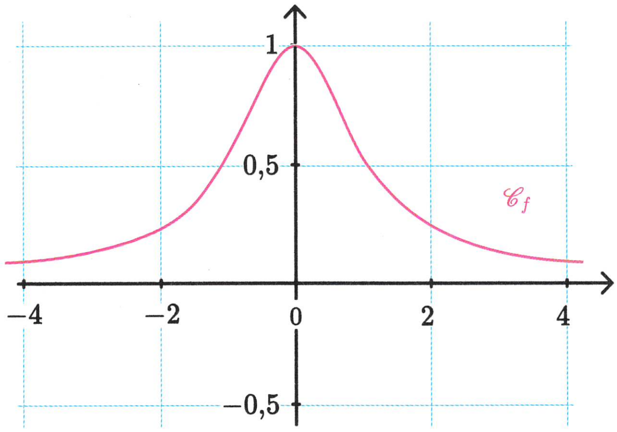
b. Déterminer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui est à la fois paire et impaire.

....

....

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 115

1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.



a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. ...

b. Par lecture graphique, donner les variations de f sur $\mathbb{R}$. ...

c. Quel est le maximum de f ? En quel réel est-il atteint ? ...

d. f admet-elle un minimum sur $\mathcal{D}_f$? ...

e. f est-elle bornée sur $\mathcal{D}_f$? ...

f. Soit b un réel quelconque de $]\,0\,;\,1\,]$. Résoudre $f(x) = b$ et en déduire le ou les antécédents de b.

...

g. Pour $x \in \mathbb{R}$, démontrer que $f(-x) = f(x)$. ...

...

h. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et $M'(-x, y)$. Démontrer que $M \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $M' \in \mathscr{C}_f$.

...

i. Comment se traduit graphiquement le résultat précédent ? ...

...

2 a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
Qu'en déduit-on concernant f ?

...

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2$.
Calculer $f(1)$ et $f(-1)$, que peut-on en déduire concernant la parité de f ?

...

3 On construit une boîte à partir d'une feuille de carton carrée de côté $30\ cm$ de la manière suivante :

- On retire aux quatre coins un carré de côté $x\ cm$, comme montré dans la **Fig. 1**.
- On replie les 4 rectangles obtenus, selon les pointillés.

a. Quel est l'intervalle I des valeurs possibles de x ?

b. Pour $x \in I$, exprimer le volume $V(x)$ de la boîte.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction V dans le repère de la **Fig. 2**.

d. Quel semble être le maximum de V sur $[0\,;\,15]$? Pour quel x est-il atteint ?

e. Démonstration des résultats conjecturés à la question précédente.

1) Calculer $V(5)$.

2) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;\,15]$, $V(x) - V(5) = 4(x-5)^2\,(x-20)$.

3) Justifier que sur $[0\,;\,15]$, $V(x) \leq V(5)$.

4) En déduire le maximum de V et le réel x pour lequel ce maximum est atteint.

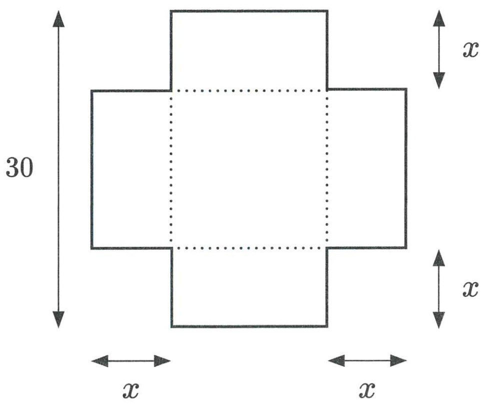


Fig. 1

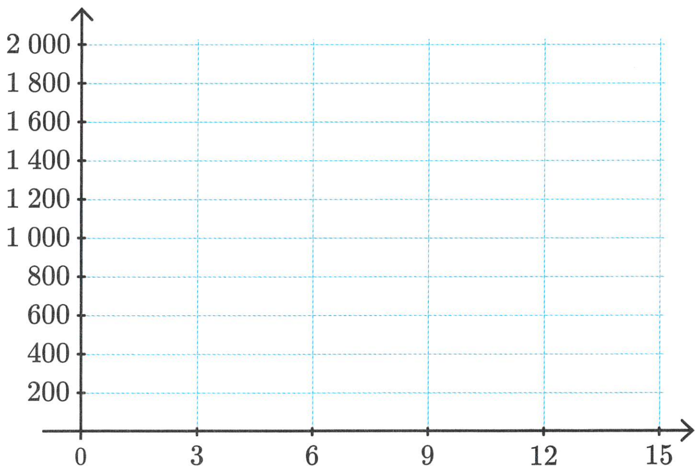


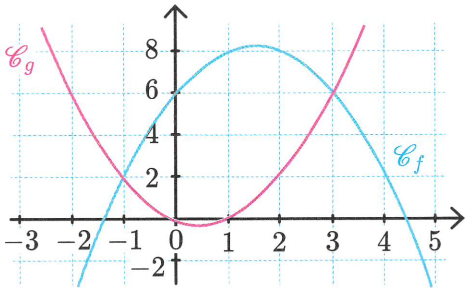
Fig. 2

Autoévaluation

Corrigé QCM
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 117

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.	Ma note / 10

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dont on donne les courbes représentatives :



1 $f(2)$

a. ☐ égale 8
b. ☐ égale 2
c. ☐ n'existe pas

2 L'ensemble des antécédents de 6 par f est :

a. ☐ $\{6\}$
b. ☐ $\{0\,;\,3\}$
c. ☐ $\emptyset$

3 $f(g(1)) =$

a. ☐ 0
b. ☐ 8
c. ☐ 6

4 L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 9$

a. ☐ est $\{-2{,}5\,;\,3{,}5\}$
b. ☐ n'existe pas
c. ☐ est $\emptyset$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 9$

a. ☐ n'existe pas
b. ☐ est $\emptyset$
c. ☐ est $\mathbb{R}$

6 L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

a. ☐ $\emptyset$
b. ☐ $\{3\}$
c. ☐ $\{-1\,;\,3\}$

7 L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est :

a. ☐ $[-1\,;\,3]$
b. ☐ $]-1\,;\,3[$
c. ☐ $\{-1\,;\,3\}$

8 La fonction f est :

a. ☐ paire
b. ☐ impaire
c. ☐ ni paire, ni impaire

9 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est :

a. ☐ croissante
b. ☐ décroissante
c. ☐ ni croissante, ni décroissante

10 Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet :

a. ☐ un maximum mais pas de minimum
b. ☐ un maximum et un minimum
c. ☐ ni maximum, ni minimum

Algorithmique, TICE & logique

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **118**

Au fond d'un récipient cylindrique de $15\ cm$ de rayon, on dispose une boule de rayon $r\ cm$ avec $r \leq 15$. On verse ensuite de l'eau dans le récipient jusqu'à ce que l'eau arrive au ras de la boule. La hauteur de la surface de l'eau est donc $2r$.

a. Rappeler le volume en cm^3 d'une sphère de rayon $r\ cm$. ....

b. Donner le volume d'un cylindre de rayon $15\ cm$ et de hauteur $2r\ cm$. ....

c. En déduire que le volume d'eau versée en cm^3 est $v(r) = 450\pi r - \dfrac{4}{3}\pi r^3$. ....

....

d. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche une valeur approchée du maximum `vmax` de la fonction v et du rayon `rmax` où ce maximum est atteint.

```python
def v(r) :
    return ....................................
def maxi() :
    vmax =0 #l' ordonnée maximale trouvée
    rmax =0 #l' abscisse correspondante
    for i in range(1,151) : # i est le rayon de la boule en mm
        r = ......... # r est le rayon de la boule en cm
        if v(r)>vmax : # on a trouvé un point plus haut
            vmax = ........
            rmax = ........
    return rmax , vmax
```

e. Le volume $v(r)$ est-il maximum lorsque r est maximum, c'est-à-dire égal à 15 ? ....

f. On peut démontrer que la fonction v est croissante sur $[0\,;\,rmax]$ et est décroissante sur $[rmax\,;\,15]$ et que pour tout $y \in [0\,;\,vmax[$, y admet deux antécédents par v (un inférieur à `rmax` et un supérieur à `rmax`).
On souhaite obtenir une valeur approchée du plus petit rayon r_1 pour lequel le volume $v(r_1)$ vaut $0{,}5$ litre, c'est-à-dire le premier antécédent de ce volume par la fonction v.v

Compléter le programme suivant pour qu'il rende une valeur approchée de r_1 :

```python
def premier_antecedent (y) :
    r =0.0   # le rayon
    pas =0.1 # distance entre deux r consécutifs
    while r <15 and v(r) <....... :
        r = r + ...... # on ajoute le pas à r.
    return ......
print( premier_antecedent (.....) ) # affiche r_1
```

g. En se fondant sur le programme précédent, écrire une fonction **`deuxieme_antecedent`** qui rend une valeur approchée du deuxième antécédent r_2 du réel y passé en paramètre.

```python
def deuxieme_antecedent (y) :
......................................................................
......................................................................
......................................................................
......................................................................
......................................................................
......................................................................
```