# Chapitre 6
# Calcul littéral

## Objectifs

- Connaître les identités remarquables.
- Savoir effectuer des calculs littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées et des écritures fractionnaires.
- Savoir choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée, réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.

## Culture scientifique

**François Viète (1540-1603)** est un mathématicien français reconnu pour ses contributions au calcul algébrique.
Dans son ouvrage majeur « *Canon mathematicus* » en 1591, il introduit l'utilisation de lettres pour représenter des quantités variables.
Ses méthodes astucieuses permettent de développer des expressions algébriques, simplifiant les calculs et résolvant des équations complexes.

### Et sinon, dans la vraie vie ?

Le profit d'une entreprise est égal à la différence entre ses recettes et ses dépenses. Les recettes et les dépenses peuvent être exprimées comme des expressions littérales. En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, on peut simplifier l'expression du profit et l'analyser.

# Cours et applications directes

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 76

## A Expression littérale

**↘ Définitions**

Une **expression littérale** est une expression faisant intervenir des lettres désignant des nombres.
Ces lettres sont appelées **variables**, elles remplacent n'importe quel nombre.

> Exemple
> $x^2 - 3x + 5$ est une expression littérale faisant intervenir la variable $x$.

## B Substitution

**↘ Définition**

Lorsqu'on évalue une expression littérale en donnant une valeur à une variable, on dit que l'on **substitue** la lettre par la valeur.

> Exemples
> Lorsqu'on substitue $x$ par $1$ dans l'expression $A(x) = x^2 - 3x + 5$, on obtient $A(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 5 = 3$.
> On note : $A(1) = 3$.
> La valeur de l'expression pour $x = 1$ est donc $3$.
>
> Lorsqu'on substitue $x$ par $-1$ on obtient $A(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 5 = 9$.
> La valeur de l'expression pour $x = -1$ est donc $9$.

**Remarque**
Comme le montre l'exemple précédent, lors d'une substitution, on peut être amené à rajouter des parenthèses ou des signes de multiplication « $\times$ ».

## C Somme, produit, quotient

**↘ Définition**

- Une expression est une **somme** si la dernière opération que l'on effectue en respectant la priorité des opérations est une *addition* ou une *soustraction*.
  → Les expressions que l'on additionne ou soustrait sont appelées **termes**.
- Une expression est un **produit** si la dernière opération que l'on effectue en respectant la priorité des opérations est une *multiplication*.
  → Les expressions que l'on multiplie sont appelées **facteurs**.
- Une expression est un **quotient** si la dernière opération que l'on effectue en respectant la priorité des opérations est une *division*.
  → Ce qui est divisé est le **dividende** et ce qui divise est le **diviseur**.

> Exemple
> L'expression $3x + \dfrac{2}{y}$ est une somme de deux termes.
>
> Le premier terme est le produit des deux facteurs $3$ et $x$, le second terme est le quotient de $2$ par $y$.

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 77

**1** Soit $A = 3x^2 - 5x + 7$. Dans chaque cas, effectuer la substitution demandée puis évaluer l'expression obtenue.

a. Substituer $x$ par $4$ ..................

b. Substituer $x$ par $-3$ ..................

c. Substituer $x$ par $\dfrac{2}{3}$ ..................

**2** a. Dans chaque cas, déterminer si pour tout $x$ réel, $A$ et $B$ sont des expressions égales.

1) $A = 2x - 6$ et $B = 2(x - 3)$ ..................

2) $A = x(x + 3)$ et $B = x^2 + 3$ ..................

b. Soit les expressions $A = x^2 + 1$ et $B = x + 1$.

1) Quelles sont les valeurs de $A$ et $B$ pour $x = 0$ ? $x = 1$ ?

..................

..................

2) Les expressions $A$ et $B$ sont-elles égales pour tout $x$ réel ?

..................

**3** Pour chaque expression, dire si c'est une somme (et dans ce cas, donner ses termes) ou un produit (et dans ce cas, donner ses facteurs).

$A = (x + 3)\,(x + 4) - 7$ ..................

$B = (x + 3)\,\big((x + 4) - 7\big)$ ..................

$C = xy^2z$ ..................

**4** L'expression $A$ est une somme, dont le premier terme est le produit des facteurs $3$ et $x$ et le deuxième terme est le quotient de $4$ par $x$. Donner l'expression $A$.

$A =$ ..................

**5** Pour chaque somme, donner les facteurs de chaque terme et les facteurs communs à tous les termes.

$A = 3x^2 + 5x$ : ..................

$B = 7(2x + 3) + 5(2x + 3)^2 + x(2x + 3)$ : ..................

$C = -x^2 + \dfrac{x}{x + 2}$ : ..................

# Cours et applications directes

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 78

## D Puissance

**↘ Définition**

Pour tout nombre $a$ et tout entier naturel $n \geq 1$ : $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ où le nombre de facteurs $a$ est $n$.
On a $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
Pour tout nombre $a \neq 0$ et tout entier positif $n$ : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

## E Règles de calcul sur les puissances

**Propriétés**

- Pour tous entiers $n$, $m$ et tout nombre $a$ (non nul si $n < 0$ ou $m < 0$) :
$a^{n+m} = a^n \times a^m$ et $(a^n)^m = a^{nm}$
- Pour tous entiers $n$ et $m$, et tout nombre $a \neq 0$ :
$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- Pour tout entier $n$, et tous nombres $a$ et $b$ (non nuls si $n < 0$) :
$a^n b^n = (ab)^n$

Exemples

$a^3 = a \times a \times a$ ; $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ ; $a^3 \times a^4 = a^7$ ; $(a^2)^3 = a^6$ ; $\dfrac{a^7}{a^4} = a^{7-4} = a^3$ ; $(2a)^3 = 2^3 a^3 = 8a^3$.

## F Développer, factoriser une expression

**↘ Définition**

- **Développer** une expression signifie *l'écrire sous la forme d'une somme*.
- **Factoriser** une expression signifie *l'écrire sous la forme d'un produit*.

## G Simple distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

**Propriété**

- Pour tous $k$, $a$ et $b$ : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$
$= ka + kb$.

Cas particulier, pour $k = -1$ : $-(a+b) = -a - b$

- Pour tous $k$, $a$ et $b$ : $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$
$= ka - kb$.

Cas particulier, pour $k = -1$ : $-(a-b) = -a + b$
$= b - a$.

## H Factorisation par facteur commun

**Méthode**

Une méthode pour factoriser une somme est d'identifier un facteur commun à chaque terme de la somme.
On peut alors utiliser la simple distributivité.

Exemple

$A = 3(x+2) + 5x(x+2)$, le facteur $(x+2)$ est commun aux deux termes.
Après factorisation, on obtient le produit $A = (x+2)(3+5x)$.

## I Double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

**Propriété**

Pour tous nombres $a$, $b$, $c$ et $d$ : $(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
$= ac + ad + bc + bd$

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 79

**6** Simplifier :

a. $a^3 \times a^2 \times a^{-5} =$ ..................

b. $(a^3)^{-2} =$ ..................

c. $a^2(b^3)^2 = ($ .................. $)^2$

**7** Développer en utilisant la simple distributivité :

a. $-2(x+3) =$ ..................

b. $x(x^2+5x-7) =$ ..................

c. $(2y+3)x =$ ..................

**8** Déterminer l'opposé des expressions littérales suivantes :

a. $3+x =$ ..................

b. $x^2-2x+3 =$ ..................

c. $(x-1)(-x-2)+3x =$ ..................

**9** Déterminer un facteur commun puis factoriser :

a. $5x^3+10x =$ ..................

b. $(x+2)(3x+7)+3(x+2) =$ ..................

c. $(x-5)(3x+7)-x+5 =$ ..................

d. $-(2x+1)(3x+7)+2x+1 =$ ..................

**10** Développer en utilisant la double distributivité :

a. $(x+3)(x+5) =$ ..................

b. $(x+3)(x-5) =$ ..................

c. $(2y-3)(5y-2) =$ ..................

**11** $A(x) = 3(x-1)(2x+4) - 5(x-1)(3x-2)$

a. Développer $A(x)$ ..................

..................

b. Factoriser $A(x)$ ..................

..................

# Cours et applications directes

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 80

## J Les identités remarquables

**Propriétés**

· Pour tous nombres $a$ et $b$,

Développement

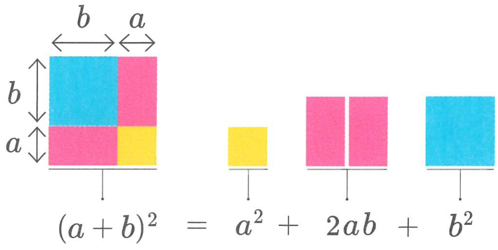
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Factorisation

**Preuve**

Démonstration et illustration dans le cas $a$ et $b$ positifs :

$$\begin{aligned}&(a+b)^2\\ &=(a+b)\times(a+b)\\ &=a^2+ab+ba+b^2\\ &=a^2+ab+ab+b^2\\ &=a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$




· Pour tous nombres $a$ et $b$,

Développement

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Factorisation

**Preuve**

$$\begin{aligned}&(a-b)^2\\ &=(a-b)\times(a-b)\\ &=a^2-ab-ba+(-b)^2\\ &=a^2-ab-ab+b^2\\ &=a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

· Pour tous nombres $a$ et $b$,

Développement

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Factorisation

**Preuve**

$$\begin{aligned}&(a+b)(a-b)\\ &=a^2-ab+ba-b^2\\ &=a^2-ab+ab-b^2\\ &=a^2-b^2\end{aligned}$$

**Exemples**

· $(x+3)^2 = x^2+2\times x\times 3+3^2$
$\quad = x^2+6x+9$

· $(2x-3)^2 = (2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2$
$\quad = 4x^2-12x+9$

· $9x^2-49 = (3x)^2-7^2$
$\quad = (3x-7)(3x+7)$

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 81

**12** Développer :

a. $(x+1)^2 =$ ..........

b. $(2x+3)^2 =$ ..........

c. $(x-3)^2 =$ ..........

d. $(4x-2)^2 =$ ..........

e. $(2x-3)(2x+3) =$ ..........

**13** Factoriser :

$A = x^2 + 2x + 1 =$ ..........

$B = x^2 + 6x + 9 =$ ..........

$C = 4T^2 - 8T + 4 =$ ..........

$D = \pi^2 - 6\pi + 9 =$ ..........

$E = x^2 - 10x + 25 =$ ..........

$F = x^2 + 18x + 81 =$ ..........

**14** Factoriser :

$A = x^2 - 4 =$ ..........

$B = 4x^2 - 9 =$ ..........

$C = \dfrac{1}{4}x^2 - 1 =$ ..........

$D = (x+2)^2 - x^2 =$ ..........

**15** Factoriser en utilisant une identité remarquable :

a. $x^2 + 2x + 1 =$ ..........

b. $x^2 - 6x + 9 =$ ..........

c. $4x^2 + 4x + 1 =$ ..........

d. $x^2 - 25 =$ ..........

# Exercices | **Parcours 1**

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **82**

**1** Dans l'expression $A(x) = 2x^2 + x$ :

a. Substituer $x$ par $2$ puis calculer : ..........

b. Calculer $A(-3)$ : ..........

**2** Simplifier :

a. $a^2 \times a^3 =$ ..........

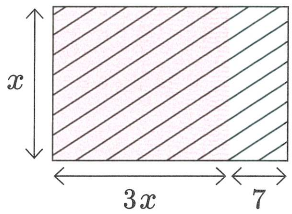
b. $(a^2)^3 =$ ..........

**3** a. Exprimer l'aire du rectangle hachuré ci-contre de deux manières : directement et en le décomposant selon les deux rectangles rose et bleu.

..........

b. Quelle égalité peut-on en déduire ? ..........

..........




**4** Développer :

a. $3(x+2) =$ ..........

b. $x(x+2) =$ ..........

c. $(x+3)(x+2) =$ ..........

**5** Développer :

a. $(2x+3)(x+4) =$ ..........

b. $(x+5)(x-3) =$ ..........

c. $(2x-1)(3x-5) =$ ..........

**6** Factoriser en reconnaissant un facteur commun :

a. $2(x+7) + x(x+7) =$ ..........

b. $2x(3x-2) - 4(3x-2) =$ ..........

c. $2x(3x-2) + 3x - 2 =$ ..........

**7** Développer en utilisant une identité remarquable :

a. $(x+3)^2 =$ ..........

b. $(x-4)^2 =$ ..........

c. $(x-7)(x+7) =$ ..........

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 83

**1** Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Simplifier $\dfrac{(a^3)^5 \times a^4}{a^2}$.

..........

**2** On donne l'expression $A(x) = 3x^2 + 5x$.

a. Calculer $A(-2)$ : ..........

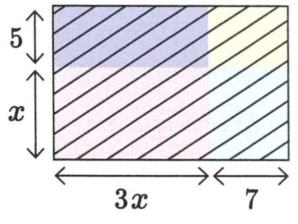
b. Simplifier $A\left(\dfrac{2}{3}\right)$ : ..........

c. Simplifier $A(t+1)$ : ..........

**3** a. Exprimer l'aire du rectangle hachuré ci-contre de deux manières : directement puis en le décomposant selon les quatre rectangles colorés.

..........

..........




b. Quelle égalité peut-on en déduire ? ..........

c. Quand $x = 0$, le rectangle hachuré est d'une seule couleur, laquelle ? Quelle est son aire ?

..........

**4** Développer :

a. $(2x+1)(3x+4) =$ ..........

b. $(2t+5)^2 =$ ..........

c. $(-3y-2)^2 =$ ..........

d. $(2x-7y)(2x+7y) =$ ..........

**5** Factoriser en reconnaissant un facteur commun ou une identité remarquable :

a. $(3x+2)(x+4) + 6x + 4 =$ ..........

b. $(3t+2)^2 - 9t - 6 =$ ..........

c. $4y^2 - 9 =$ ..........

d. $9z^2 - 12z + 4 =$ ..........

**6** L'égalité $(3x+6)(2x+5) = 0$ est-elle vraie pour tout $x$ ? Justifier. ..........

..........

Existe-t-il une valeur de $x$ pour laquelle $(3x+6)(2x+5) = 0$ ? Justifier. ..........

..........

# Exercices | **Parcours 3**

**Compléments numériques**
*Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : **84**

**1** Soit $A = \dfrac{x+1}{x-1}$. Dans $A$, substituer $x$ par $\dfrac{x+1}{x-1}$, c'est-à-dire par $A$, puis simplifier (on obtient un résultat très simple).

**2** Développer et réduire.

a. $(a+b)^3 =$

b. $(a-b)^3 =$

c. $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$

d. $(a+b+c)^2 =$

**3** Factoriser :

a. $x^2 - 7 =$

b. $a^2 - 4 + 7(a-2) =$

c. $t^2 + 4t + 4 - (t+2)(2t+3) =$

**4** a. En utilisant le développement de $(a+b)^2$, exprimer $ab$ en fonction de $(a+b)^2$, $a^2$ et $b^2$.

b. Une calculatrice est abîmée, la touche « $\times$ » ne fonctionne plus, les autres (les dix chiffres, $+$, $-$, $\div$, et la touche d'élévation au carré « $x^2$ ») sont intactes. Comment calculer un produit ?

**5** Compléter pour obtenir une expression au carré.
Par exemple $x^2 + 2x + \ldots$ se complète en $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

a. $x^2 + 4x + \ldots$

b. $x^2 - 5x + \ldots$

c. $4x^2 - 12x + \ldots$

**6** a. Développer $(10d+5)^2$.

b. Soit $n$ un entier naturel dont le chiffre des unités est $5$, et les autres chiffres forment un nombre $d$.
Pour obtenir $n^2$, on peut calculer $d^2 + d$ puis rajouter les chiffres $2$ et $5$ derrière ce nombre.
Par exemple, pour $n = 25$, on a $d = 2$, $d^2 + d = 6$, on écrit $6$ et on rajoute les chiffres $2$ et $5$ ce qui donne $625$, qui est bien $25^2$. Justifier que cette technique est correcte.

# Autoévaluation

**Corrigé QCM**

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **85**

**QCM** · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

**Ma note** / 10

**1** La valeur de $\dfrac{x^2+3}{x}$ pour $x=-1$ est :

a. ☐ $-4$
b. ☐ $-2$
c. ☐ $3$

**2** Soit $a \neq 0$, $\dfrac{(a^2)^3 \times a^4}{a^7}$ est égal à :

a. ☐ $a$
b. ☐ $a^2$
c. ☐ $a^3$

**3** En développant $(2x+3)(x-1)$ on obtient :

a. ☐ $3x+2$
b. ☐ $2x^2+x-3$
c. ☐ $2x^2-3$

**4** En développant $(2x+3)^2$ on obtient :

a. ☐ $2x^2+6x+9$
b. ☐ $4x^2+9$
c. ☐ $4x^2+12x+9$

**5** $(2x-4)(x+3)+x-2$ se factorise en :

a. ☐ $(x-2)(2x-7)$
b. ☐ $(x-2)(2x+7)$
c. ☐ $(2x-4)(x+4)$

**6** La factorisation de $4x^2-9$ est :

a. ☐ $(2x-3)(2x+3)$
b. ☐ $(2x-3)^2$
c. ☐ $(4x-3)^2$

**7** Déterminer les constantes $A$ et $B$ pour que l'identité $(2x+3)(Ax+B)=2x^2+11x+12$ soit vraie.

a. ☐ $A=1$ et $B=4$
b. ☐ $A=2$ et $B=2$
c. ☐ $A=2$ et $B=1$

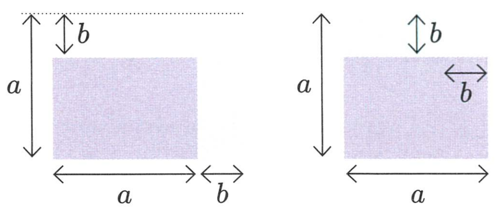
**8** La factorisation complète de $x^4-1$ est :

a. ☐ $(x^2-1)(x^2+1)$
b. ☐ $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
c. ☐ $(x^2-1)^2$

**9** L'égalité $(x+1)^2=x^2+1$ est :

a. ☐ vraie pour tout $x$
b. ☐ fausse pour tout $x$
c. ☐ vraie pour certains $x$ et fausse pour d'autres

**10** Quelle identité remarquable est illustrée par les figures ci-dessous ?




a. ☐ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
b. ☐ $(a-b)^2=(a^2-2ab+b^2)$
c. ☐ $(a+b)^2=(a^2+2ab+b^2)$

# Algorithmique, TICE & logique

**Compléments numériques**
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : **86**

**1** Voici un programme de calcul :
choisir un nombre ; lui ajouter $5$ ; élever au carré le résultat ; soustraire $15$.

a. On choisit le nombre $1$. Quel est le résultat ? ..........

b. On appelle $x$ le nombre choisi. Donner une expression du résultat du programme de calcul, en fonction de $x$.

..........

c. On choisit pour $x$ un entier naturel dont le chiffre des unités est $1$. Justifier que le résultat est aussi un entier naturel dont le dernier chiffre est $1$.

..........

**2** Dans la feuille de calcul ci-contre, on a évalué, pour quelques valeurs de $x$, les expressions $A(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ et $B(x) = x^3 + 1$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | x | (x+1)(x^2-x+1) | x^3+1 |
| 2 | -4 | -63 | -63 |
| 3 | -3 | -26 | -26 |
| 4 | -2 | | |
| 5 | -1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 2 | 2 |
| 8 | 2 | 9 | 9 |
| 9 | 3 | 28 | 28 |
| 10 | 4 | 65 | 65 |

a. Quelle formule a-t-on écrit dans la cellule **B2**, et recopiée vers le bas, pour remplir la colonne **B** ?

..........

b. Les valeurs des cellules **B4** et **C4** ont été effacées. Les calculer.

..........

c. Sur les quelques valeurs de $x$ considérées, on a $A(x) = B(x)$.
Est-ce que cette égalité est vraie pour tout $x$ ? Justifier la réponse.

..........

**3** On souhaite écrire un programme qui calcule le développement des expressions de la forme $(ax+b)^2$.
Ce programme demande à l'utilisateur les nombres $a$ et $b$ et affiche l'expression $(ax+b)^2$ et son développement.
Par exemple, pour $a = 2$ et $b = 5$, le programme affichera « $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$ ».

a. Qu'affichera le programme lorsque $a = 3$ et $b = 4$ ? ..........

b. Développer $(ax+b)^2$ pour $a$ et $b$ quelconques. ..........

c. Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```
print(" Développement de (ax+b) ^2")
# lecture des données
a = float(input("entrer le nombre a :"))
b = ........................................
# calcul des coefficients p,q,r tels que (ax+b)^2= px^2+qx+r
p = .......................
q = .......................
r = .......................
print("(",a,"x +",b,")^2 =",p,"x^2 +",q,"x +",r).
```

d. Lorsque l'on applique ce programme pour le calcul de $(-2x+3)^2$, on obtient l'affichage `(-2.0x+3.0)ˆ2 = 4.0xˆ2+-12.0x+9.0` qui n'est pas correct à cause des opérateurs accolés « `+-` » qui apparaissent pour le coefficient de $x$.

1) À quelles conditions sur $a$ et $b$ le coefficient $q$ devant $x$ est-il négatif ? ..........

..........

2) Corriger le programme pour supprimer ce problème.