Chapitre 5
Calculs numériques

Objectifs

- Connaître les règles de calcul sur les nombres relatifs, les nombres rationnels, les puissances entières relatives et les racines carrées.
- Savoir effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines carrées et des écritures fractionnaires.

↘ Culture scientifique

Curieusement, l'informatique est née avant la construction du premier ordinateur avec l'algorithmique. En 1936, **Alan Turing (1912-1954)** cherche à définir mathématiquement ce qu'est un « calcul ».
Durant la Seconde Guerre mondiale, il contribue à la découverte des clés de chiffrement de la machine allemande Enigma.

Et sinon, dans la vraie vie ?

Le développement du calcul numérique est étroitement lié à l'évolution de l'informatique et de la technologie.
Avec l'avènement des ordinateurs modernes de plus en plus puissants, le calcul numérique permet aux ingénieurs et aux scientifiques d'aborder des problèmes complexes avec une précision et une efficacité accrues.

Cours et applications directes

Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 62

A Somme, différence, produit et quotient

Définitions

- La **somme** de deux termes a et b est le résultat de l'addition des nombres a et b, elle se note $a+b$.
- La **différence** entre deux termes a et b est le résultat de la soustraction des nombres a et b, elle se note $a-b$.
- Le **produit** de deux facteurs a et b est le résultat de la multiplication des nombres a et b, il se note $a \times b$ ou ab.
- Le **quotient** du nombre a par le nombre b est le résultat de la division de a par b, il se note $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$.

B Nombres opposés

Définitions

- Deux nombres réels sont dits **opposés** si leur somme est nulle.
- **L'opposé du nombre réel** a se note : $-a$. Il vérifie $a+(-a)=0$ et $-a=(-1)\times a$.

Remarque

$-a$ n'est pas nécessairement un nombre négatif :

- si a est positif alors $-a$ est négatif ;
- si a est négatif alors $-a$ est positif.

C Nombres inverses

Définitions

- Deux nombres réels non nuls sont dits **inverses** si leur produit est égal à 1.
- **L'inverse d'un nombre réel** a non nul se note : $\dfrac{1}{a}$.
  Il vérifie $a \times \dfrac{1}{a}=1$ et $\dfrac{1}{a}=1\div a$.

Remarques

- Deux nombres opposés sont de signes contraires.
- Deux nombres inverses sont de même signe.

D Règles de calculs

Propriétés

<u>Signes</u>

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $-(a+b)=(-1)\times(a+b)=-a-b$
- $(-a)\times b=a\times(-b)=-ab$
- si $b\neq 0$, $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$

<u>Distributivité</u>

Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a :

- $k(a+b)=ka+kb$
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

<u>Calcul avec des fractions</u>

Pour tous nombres réels a, b, c et d (b, c et d non nuls) :

- $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$
- $\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-b}{c}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\times c}{b\times d}$
- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\times d}{b\times c}$

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 63

1 Traduire les phrases suivantes par un calcul puis effectuer ce calcul.

a. A est le produit de la somme de 8 et de 5 par la différence entre le carré de 2 et 10.

$A =$ ……………………

b. B est la somme du produit de l'opposé de (-3) par l'inverse de 2 et du double de 4.

$B =$ ……………………

c. C est le quotient du carré de la somme de 3 et de l'opposé de 5 par le triple de 4.

$C =$ ……………………

2 Pour chacun des nombres suivants, donner son opposé et son inverse (lorsqu'il existe) :

	5	$-0{,}5$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	0
Opposé					
Inverse					

3 Effectuer les calculs suivants :

$A = 21 - (-12 + 8) \times (-3)$

$B = (-3 - 4 \times 2) \div (3 - 8)$

$C = -5 \times (3 - 8) + (4 - 7) \times (-2)^2$

4 Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{-3}{4}$

$B = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

$C = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{3} - 2\right)$

Compléments numériques
↘ Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 64

E Puissances avec un exposant positif

↘ Définition

Soit a un nombre réel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note a^n le produit $\underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

a^n se lit "a exposant n" ou "a puissance n".

Par convention : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Exemple

$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$

F Puissances avec un exposant négatif

↘ Définition

Soit a un nombre réel non nul et n un entier naturel.

On note a^{-n} l'inverse du nombre a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples

· $4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ · $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

G Calculs avec des puissances

↘ Théorème

Règles opératoires

Soit a et b deux nombres réels non nuls et n et m deux entiers relatifs.

· $a^n \times a^m = a^{n+m}$ · $(a^n)^m = a^{n\times m}$ · $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

· $a^n \times b^n = (ab)^n$ · $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples

· $(-3)^2 \times (-3)^5 = (-3)^{2+5} = (-3)^7$ · $\left(4^2\right)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6$ · $\dfrac{2^9}{2^5} = 2^{9-5} = 2^4$

· $5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = 10^3$ · $\dfrac{(-8)^3}{2^3} = \left(\dfrac{-8}{2}\right)^3 = (-4)^3$

H Écriture scientifique d'un nombre décimal

↘ Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal non nul est son écriture sous la forme $a \times 10^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{D}$ tel que $1 \leq |a| < 10$.

Exemples

· L'écriture scientifique de $132{,}7$ est $1{,}327 \times 10^2$.

· L'écriture scientifique de $-0{,}000\,321$ est $-3{,}21 \times 10^{-4}$.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 65

5 Calculer les nombres suivants :

$a = 3^4$ ……

$b = (-2)^3$ ……

$c = (-1)^{12}$ ……

$d = -5^2$ ……

$e = 2^{-2}$ ……

$f = 5^{-1}$ ……

6 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance de 2 :

$a = 64$ ……

$b = \dfrac{1}{8}$ ……

$c = 0{,}5$ ……

$d = \dfrac{1}{2^{-13}}$ ……

$e = \dfrac{2^3 \times 2^{-5}}{2^8}$ ……

$f = 1$ ……

7 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un nombre.

$a = 3^4 \times 3^5$ ……

$b = \dfrac{2^7}{2^4}$ ……

$c = \left(7^4\right)^{-3}$ ……

$d = 5^3 \times 4^3$ ……

$e = \dfrac{5^3 \times 5^8}{5^{-7}}$ ……

$f = \dfrac{2^{13} \times 4^3}{16^2}$ ……

8 Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$a = 1{,}23 \times 10^4$ ……

$b = 5{,}21 \times 10^{-2}$ ……

$c = 134{,}3 \times 10^6$ ……

$d = 215{,}47 \times 10^{-4}$ ……

9 Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$a = 352$ ……

$b = 0{,}0035$ ……

$c = 2\,158 \times 10^{-9}$ ……

$d = 0{,}003254 \times 10^{12}$ ……

$e = \dfrac{3 \times 10^5 \times 5 \times \left(10^{-2}\right)^{-4}}{2 \times 10^{-12}}$ ……

10 Parmi les trois nombres ci-dessous, déterminer le nombre le plus petit.

$a = 5{,}5 \times 10^{-9}$ $b = 9{,}4 \times 10^{-6}$ $c = 3{,}7 \times 10^{-8}$

……

……

……

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 66

I Racine carrée

↘ Définition

Soit a un nombre réel positif.

On appelle **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré est égal à a.

Pour tout nombre a positif : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a}$ est un nombre positif.

Remarques

- Il y a deux nombres dont le carré est égal à 36 : -6 et 6.
  $\sqrt{36}$ est celui qui est positif : $\sqrt{36} = 6$.
- Seuls les nombres positifs ou nuls ont une racine carrée. Un réel négatif n'a pas de racine carrée.
  Ainsi la racine carrée de -3 n'existe pas car il n'y a pas de nombre réel dont le carré soit égal à -3 (le carré d'un nombre réel est toujours positif).
- Si a est positif, $\sqrt{a}$ existe et est positif ; $-\sqrt{a}$ existe aussi et est négatif.

Exemples

- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$
- $-\sqrt{25} = -5$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{0} = 0$

J Racine carrée et produit

Propriété

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls :

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

Exemple

$$\begin{aligned}\sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3}\\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

K Racine carrée et quotient

Propriété

Soit a et b deux nombres réels positifs, $b \neq 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Exemple

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$$

L Racine carrée et somme

Propriété

Pour tous nombres réels a et b positifs ou nuls :

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 67

11 Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$A = -2\sqrt{81} + \left(\sqrt{7}\right)^2 - 20 \div \sqrt{25}$ ....

....

$B = \left(-3\sqrt{2}\right)^2 - 5 \times \left(-3\sqrt{2}\right) + 4$ ....

....

12 Encadrer les nombres suivants par deux entiers consécutifs :

$a = \sqrt{17}$ ....

$b = \sqrt{89}$ ....

$c = \sqrt{3}$ ....

$d = \sqrt{63}$ ....

13 Développer et simplifier :

$A = \left(\sqrt{5} - 3\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)$ ....

....

$B = \left(2\sqrt{3} - 1\right)\left(4 - 5\sqrt{3}\right)$ ....

....

14 Écrire chacun des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible :

a. $\sqrt{8} =$ ....

b. $\sqrt{45} =$ ....

c. $\sqrt{75} =$ ....

d. $\sqrt{72} =$ ....

15 Simplifier l'écriture des nombres suivants :

a. $\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{12}} =$ ....

b. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}} =$ ....

c. $\sqrt{\dfrac{16}{25}} =$ ....

Exercices | **Parcours 1**

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **68**

1 Effectuer les calculs suivants :

$A = \frac{-3}{7} - \frac{-5}{4} =$ ....

$B = \frac{-20}{16} \times \frac{-4}{25} =$ ....

$C = -\frac{-4}{10} \div \frac{-6}{20} =$ ....

2 Effectuer les calculs suivants, donner les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$A = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} =$ ....

$B = \frac{12}{5} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) =$ ....

$C = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} =$ ....

3 Compléter les égalités suivantes en utilisant la notation puissance :

$A = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) =$ ....

$B = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ....

$C = \frac{1}{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)} =$ ....

$D = 5^2 \times 5^6 =$ ....

4 Effectuer les calculs suivants en respectant les règles opératoires.

$A = (5+4)^2$ ....

$B = -2 - (1-3)^2$ ....

$C = -6 + 3^3$ ....

$D = (-10+5)^{-1} - 6^2$ ....

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 69

1 Écrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un nombre :

a. $5^3 \times \left(5^2\right)^4 =$ ....

b. $3^5 \times 9^{-4} =$ ....

c. $\dfrac{4^3 \times 2^7}{8^5} =$ ....

d. $\dfrac{2^6}{5^5} \times \dfrac{5^3}{4^2} =$ ....

e. $\dfrac{2^{12} \times 8^5}{4^{-2}} =$ ....

2 Simplifier l'écriture du nombre $a = \dfrac{2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7^2}{2^2 \times 3^6 \times 5^6 \times 7^2}$.

....

....

3 Soit x un nombre réel non nul.
Écrire les nombres suivants sous la forme d'une puissance de x :

a. $x \times x \times x \times x =$ ....

b. $\dfrac{1}{x \times x \times x} =$ ....

c. $x^5 \times x^8 =$ ....

d. $\dfrac{x^4}{x^9} =$ ....

e. $x^5 \times (x^3)^4 =$ ....

f. $\dfrac{x^7 \times x^{-12}}{x^{-5}} =$ ....

4 Soit x et y deux nombres réels non nuls, simplifier les expressions littérales suivantes :

a. $x^5(y^3)^2 =$ ....

b. $x^3(x^5 - y^4) =$ ....

c. $\dfrac{x^6y^3}{x^4y^7} =$ ....

d. $\dfrac{x^3(xy^2)^4}{xy^3} =$ ....

5 Écrire chacun des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible :

a. $\sqrt{63} =$ ....

b. $\sqrt{48} =$ ....

c. $\sqrt{500} =$ ....

d. $\sqrt{243} =$ ....

6 Simplifier les écritures des nombres suivants :

$a = \dfrac{\sqrt{20}}{4}$ ....

$b = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{4}$ ....

$c = \left(3 - 2\sqrt{5}\right)^2$ ....

$d = \sqrt{18} \times \sqrt{2}$ ....

$e = \sqrt{12} - \sqrt{45}$ ....

7 Écrire chacun des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible :

$A = \sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{32}$ ....

$B = 2\sqrt{300} - 5\sqrt{48} + 3\sqrt{75}$ ....

8 On pose $a = 4 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \dfrac{20}{3}$. Démontrer que $\sqrt{a}$ est un nombre décimal.

....

9 On donne $E = \dfrac{2}{3} + \dfrac{17}{2} \times \dfrac{4}{3}$ et $F = \dfrac{\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{16}}{\sqrt{2}}$. Démontrer que les nombres E et F sont égaux.

....

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 71

1 On pose $x = \sqrt{3}$ et $y = \sqrt{2}$. Calculer.

$A = x^4 - y$ ....

$B = 2x^2 + 2x + 3$ ....

$C = (x+2)(x-4)$ ....

$D = x^3 \times y^3$ ....

2 Simplifier les expressions sans écrire de radical au dénominateur.

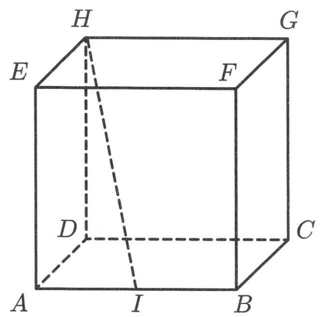
$A = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ ....

$B = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{5}}$ ....

$C = \dfrac{5}{4-\sqrt{3}}$ ....

$D = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ ....

3 $ABCDEFGH$ est un cube de longueur de coté a. I est le milieu de $[AB]$.
Calculer la longueur IH en fonction de a.



....

4 $ABCDS$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ de coté de longueur a et de sommet S dont la hauteur est $10\ cm$. Pour quelle valeur de a, $SA = 15\ cm$? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au mm près.

....

Autoévaluation

Corrigé QCM
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 72

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note / 10

1 $(-2)^4 =$

a. ☐ -8
b. ☐ -16
c. ☐ 16

2 $5^{-1} =$

a. ☐ -5
b. ☐ 5
c. ☐ $0{,}2$

3 $\dfrac{3^2 \times 3^5}{3^4} =$

a. ☐ 3^3
b. ☐ 3^{11}
c. ☐ 3^6

4 $2^5 \times 3^5 =$

a. ☐ 6^{10}
b. ☐ 6^5
c. ☐ 5^5

5 $\dfrac{x^2 x^{-5}}{x^4 x^{-7}} =$

a. ☐ x^{-6}
b. ☐ x^{18}
c. ☐ 1

6 $-0{,}035 \times 10^{-3} =$

a. ☐ $-3{,}5 \times 10^{-6}$
b. ☐ -350×10^{-7}
c. ☐ $-0{,}35 \times 10^{-3}$

7 $-\sqrt{5}^2 =$

a. ☐ 5
b. ☐ -5
c. ☐ 10

8 $\sqrt{54} =$

a. ☐ $7{,}35$
b. ☐ $6\sqrt{3}$
c. ☐ $3\sqrt{6}$

9 $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{32}} =$

a. ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b. ☐ $0{,}75$
c. ☐ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

10 $\sqrt{45} \times \sqrt{8} =$

a. ☐ 180
b. ☐ 30
c. ☐ $6\sqrt{10}$

Algorithmique, TICE & logique

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 73

1 Soit a un nombre strictement positif.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. La racine carrée de l'inverse de a est égale à l'inverse de la racine carrée de a.

b. L'opposé de la racine carrée de a est égale à la racine carrée de l'opposé de a.

c. La racine carrée de la somme de deux nombres positifs est égale à la somme des racines carrées de ces nombres.

d. La racine carrée de la somme de deux nombres positifs est égale au produit des racines carrées de ces nombres.

2 Pour trouver la première puissance de a supérieure à b, on peut comparer les puissances de a à b et choisir la première qui est plus grande que b. En Python, l'opérateur puissance s'écrit `**`, par exemple 2^5 s'écrit `2**5`.

a. Saisir le script suivant dans une console Python.

```
def puissanceSup(a,b) : # a,b entiers positifs
        .................
        .................
        .................
        return n
```

b. Les lignes « .... » sont manquantes dans le script.
Elles sont données en langage naturel :

$n \leftarrow 0$
$tant\ que\ a^n \leq b$
$\quad n \leftarrow n+1$

Compléter le script Python afin qu'il détermine la première puissance de a supérieure à b.

c. Exécuter le script Python dans la console.
Appeler la fonction **`puissanceSup()`** avec différentes valeurs de a et b pour tester son fonctionnement.
Afficher les résultats obtenus pour chaque cas de test.