Chapitre 2
Arithmétique

Objectifs

- Connaître les notations $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- Savoir modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Savoir présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

Culture scientifique

Mathématicienne, physicienne et philosophe française, **Sophie Germain (1776-1831)** a travaillé sur le *Grand théorème de Fermat* et a introduit « *les nombres premiers de Sophie Germain* » qui servent de nos jours en cryptographie.

Elle est la première femme à remporter la médaille de l'Académie des sciences de Paris. En physique, sans ses travaux sur la théorie de l'élasticité des métaux, un projet comme la tour Eiffel n'aurait pas pu voir le jour.

Et sinon, dans la vraie vie ?

L'arithmétique est présente dans notre vie et dans des cadres très variés. Son utilisation la plus courante est sans doute le chiffrement des informations et la vérification des codes secrets.
Par exemple, les deux derniers chiffres des cartes vitales, appelés la clé, est un nombre obtenu par une formule basée sur la division euclidienne des 13 premiers chiffres par 97.

Cours et applications directes

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 22

A Multiples et diviseurs

↘ Définition

Soit d un nombre entier.

On dit que « m *est un* ***multiple*** *de* d » ou « m *est* ***divisible*** *par* d » s'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $m = qd$.

On dit alors que le nombre d est un diviseur de m.
Le nombre q est donc aussi un diviseur de m.

> Exemple
>
> $35 = 5 \times 7$ où $7 \in \mathbb{Z}$ donc 35 est un multiple de 5 et 5 est un diviseur de 35.
>
> Comme $5 \in \mathbb{Z}$, on peut aussi dire que 35 est un multiple de 7.
> Ainsi 5 et 7 sont deux diviseurs de 35.

Propriétés

- 1 est un diviseur de tous les entiers, et tous les entiers divisent 0.
- Soit a un entier, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

B Nombres pairs

↘ Définition

Un nombre **pair** est un nombre entier divisible par 2.
Autrement dit, un nombre entier a est pair lorsqu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2n$.

> Exemple
>
> $46 = 2 \times 23$
> Donc $46 = 2n$ avec $n = 23$ et $n \in \mathbb{Z}$.
> 46 est donc un nombre pair.

C Nombres impairs

↘ Définition

Un entier a est un nombre **impair** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2n + 1$.

> Exemple
>
> $15 = 2 \times 7 + 1$
> Donc $15 = 2n + 1$ avec $n = 7$ et $n \in \mathbb{Z}$.
> 15 est donc un nombre impair.

Propriété

Le carré d'un nombre impair est impair.

D Nombres premiers

↘ Définition

Un nombre **premier** est un nombre entier naturel qui a exactement 2 diviseurs positifs qui sont alors 1 et lui-même.

> Exemples
>
> - 19 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et lui-même.
> - 18 n'est pas premier : il est divisible par 2.
> - 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

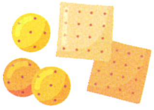
Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 23

1 a. Déterminer les multiples de 4, compris entre 0 et 40 :

b. Déterminer les multiples de 6, compris entre 0 et 40 :

c. Déterminer tous les multiples communs de 4 et de 6, compris entre 0 et 40 :

2 a. Pour son anniversaire, Lila veut acheter des biscuits sucrés vendus par boîte de 12 et des biscuits salés, en vente par paquet de 20. Combien doit-elle acheter au minimum de boîtes et de paquets, pour avoir le même nombre de biscuits sucrés et salés ?



b. Après son anniversaire, il reste 18 biscuits sucrés et 30 biscuits salés. Elle veut les répartir dans des sachets pour les offrir, tous les sachets devant avoir la même composition. En utilisant tous les biscuits, quel est le nombre maximum de sachets qu'elle pourra faire ?

c. Quelle sera alors leur composition ?

3 Lors du Tour de France les coureurs se propulsent avec un braquet de $55-11$ lors des sprints. 55 est le nombre de dents du plateau avant et 11 est le nombre de dents du pignon arrière.

a. Lorsque le plateau parcourt 1 tour, combien en parcourt le pignon arrière ?

b. En déduire la distance parcourue, en un tour de plateau, avec un diamètre de roue de $70\ cm$.

4 Prouver que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

5 Démontrer que tout nombre entier n multiple de 9 est un multiple de 3.

Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 24

E Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en **produit de facteurs premiers**.
Cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près).

Exemples

Les décompositions en produit de facteurs premiers de 8, 15, 19 et 120 sont :

- $8 = 2^3$;
- $15 = 3 \times 5$;
- $19 = 19$;
- $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$.

F Application de la divisibilité

Exemple

On considère les nombres : $a = 2^2 \times 3$; $b = 2^4 \times 3^2 \times 5$ et $c = 2^3 \times 5^2 \times 7$.

$$\begin{aligned} b &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \\ &= (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3 \times 5) \\ &= a \times (2^2 \times 3 \times 5) \end{aligned}$$

Donc a est un diviseur de b.

c n'est pas divisible par 3 donc a ne divise pas c.

Le plus grand diviseur commun de b et de c est $2^3 \times 5$.

G Fraction irréductible

Définition

Une **fraction est irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont qu'un seul diviseur positif commun : 1.

Méthode

Pour rendre irréductible une fraction, on peut décomposer en produit de facteurs premiers son numérateur et son dénominateur, puis simplifier tous les facteurs communs.

$$\begin{aligned} \frac{42}{60} &= \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{7}{2 \times 5} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Exemples

- 8 et 15 n'ont pas de diviseur commun autre que 1. Donc les fractions $\frac{8}{15}$ et $\frac{15}{8}$ sont irréductibles.
- Les nombres 10 et 12 possèdent 2 comme diviseur commun. Donc la fraction $\frac{10}{12}$ n'est pas irréductible.

  On peut effectivement écrire : $\frac{10}{12} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{5}{6}$

  5 et 6 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 donc $\frac{5}{6}$ est irréductible.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 25

6 a. Décomposer 24 en produit de facteurs premiers :

b. Décomposer 60 en produit de facteurs premiers :

7 Déterminer les diviseurs communs des nombres suivants.

· 12 et 15 :

· 14 et 45 :

· 182 et 546 :

8 a. Écrire la fraction $A = \dfrac{735}{840}$ sous forme irréductible :

b. Écrire la fraction $B = \dfrac{672}{1\,224}$ sous forme irréductible :

9 On considère les nombres $a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2$ et $b = 2^2 \times 5$.
Trouver le nombre c tel que $a = b\,c$.

10 Vrai ou faux : quel que soit l'entier naturel n, $2n + 3$ est un nombre premier. Justifier.

Compléments numériques

↘ Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 26

1 Déterminer les diviseurs communs de 30 et 42.

2 Déterminer les multiples communs de 15 et de 18 inférieurs à 100.

3 a. Écrire la fraction $a = \dfrac{60}{126}$ sous forme de fraction irréductible.

b. Écrire la fraction $b = \dfrac{2\,310}{2\,730}$ sous forme de fraction irréductible.

4 Répondre par vrai ou faux et justifier.

a. Si a est un nombre premier alors $11a$ est aussi premier.

b. 5 est un multiple de 45.

c. Soit a un entier impair. $2a + 4$ est un nombre pair.

5 a. Calculer la somme de 2 et de 3.

b. Calculer la somme de 2 et de 5.

c. La somme de deux nombres premiers est-elle un nombre premier ? Justifier.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 27

1 <u>Le crible d'Eratosthène</u>

L'algorithme procède par élimination : il s'agit de rayer d'une table d'entiers tous les multiples d'un entier n (autres que lui-même), et d'entourer tous les autres. En supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier à part 1 et eux-mêmes, et qui sont donc les nombres premiers. On commence par entourer 2, puis on raye tous les multiples de 2 sauf 2 lui-même.
On entoure alors le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 3, et on raye les multiples de 3 sauf 3. Puis on entoure le premier nombre non rayé ni entouré, qui est 5, et on raye tous les multiples de 5 sauf 5...
On répète l'opération jusqu'à ce que tous les entiers soient rayés ou entourés.

		2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a. Exécuter le crible sur la table ci-contre.

b. Quel est le résultat de ce crible ?

2 a. Décomposer 186 et 155 en produit de facteurs premiers.

b. Déterminer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 186 et 155.

c. Un pâtissier a fabriqué 186 pralines et 155 chocolats qu'il répartit dans des colis. Les colis sont constitués ainsi :

- le nombre de pralines est le même dans chaque colis ;
- le nombre de chocolats est le même dans chaque colis ;
- tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés.

1) Quel nombre maximal de colis pourra-t-il réaliser ?

2) Combien y aura-t-il de chocolats et de pralines dans chaque colis ?

3 On veut démontrer que la proposition universelle $\mathcal{P}$ suivante : « *La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.* » est vraie.

a. Calculer $a = 5 + 7$. Peut-on en déduire que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie ?

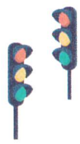
b. Soit n et m deux nombres impairs. Il existe donc deux entiers relatifs k et q tels que $n = 2k + 1$ et $m = 2q + 1$.
Calculer $n + m$ en fonction de k et q.

c. En déduire que la somme $n + m$ est un nombre pair.

4 a. Déterminer les 8 premiers multiples de 30.

b. Quel est le plus petit multiple commun (PPCM) à 30 et à 42 ?

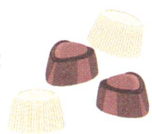
c. Dans une rue, un premier feu de circulation passe au vert toutes les 30 secondes, tandis qu'un second passe au vert toutes les 42 secondes. Au moment où je regarde, les deux feux de circulation passent au vert en même temps. Combien de temps dois-je attendre pour qu'ils repassent au vert exactement en même temps ?



5 a. En utilisant les décompositions en produit de facteurs premiers, démontrer que les entiers qui sont divisibles par 2 et 3 sont divisibles par 6.

b. Est-il vrai que tout entier divisible par 4 et 6, est aussi divisible par 24 ?

6 Un chocolatier dispose de $1\,575$ bonbons au chocolat blanc et de $4\,410$ bonbons au chocolat noir.
Afin de préparer les fêtes de fin d'année, il veut répartir ses chocolats dans des boîtes de la manière suivante :



- tous les chocolats doivent être utilisés ;
- toutes les boîtes doivent avoir la même composition.

De plus il veut réaliser le plus grand nombre de boîtes possible.

a. Combien pourra-t-il faire de boîtes ? Justifier.

b. Dans chaque boîte, combien y aura-t-il de chocolats blancs et de chocolats noirs ? Justifier.

Exercices | Parcours 3

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 29

1 On a décomposé trois nombres en produit de facteurs premiers :
$a = 2^3 \times 3^5 \times 5$; $b = 2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$; $c = 2^5 \times 3^8 \times 5^2 \times 7$.

a. Le nombre a est-il divisible par 15 ? Justifier.

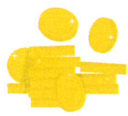
b. Le nombre a est-il un diviseur de b ? Justifier.

c. Déterminer le plus grand diviseur commun de a et de b.

d. Par quel nombre faut-il multiplier a pour obtenir c ?

2 Je suis un nombre à trois chiffres non nuls. Je suis divisible par 94. Si on change l'ordre de mes chiffres d'une certaine manière, je deviens divisible par 49. Qui suis-je ?

3 «*Dans un pays où le système fiduciaire (les pièces et les billets) n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un algorithme qui donne le nombre minimal de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8.*» *Source : d'après PISA, items libérés*



4 Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.

5 Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Autoévaluation

Corrigé QCM
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 30

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note / 10

1 La forme irréductible de $\frac{46}{54}$ est :

a. ☐ $\frac{6}{5}$

b. ☐ $\frac{23}{27}$

c. ☐ $\frac{3}{7}$

2 La forme irréductible de $\frac{12a+4}{12}$ est :

a. ☐ $\frac{12a+1}{3}$

b. ☐ $\frac{3a+4}{3}$

c. ☐ $\frac{3a+1}{3}$

3 60 et 77 n'ont que 1 comme diviseur commun.

a. ☐ Vrai

b. ☐ Faux

c. ☐ On ne peut pas savoir

4 Tous les diviseurs positifs de 24 sont :

a. ☐ $2, 3, 4, 6, 12$

b. ☐ $1, 2, 3, 4, 6, 12$

c. ☐ $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

5 La forme irréductible de $\frac{5+3}{11+3}$ est :

a. ☐ $\frac{5}{11}$

b. ☐ $\frac{8}{14}$

c. ☐ $\frac{4}{7}$

6 $1\,136$ est un multiple de 4.

a. ☐ Vrai

b. ☐ Faux

c. ☐ On ne peut pas savoir

7 91 est un nombre premier.

a. ☐ Vrai

b. ☐ Faux

c. ☐ On ne peut pas savoir

8 La décomposition en facteurs premiers de 72 est :

a. ☐ 9×8

b. ☐ $3^2 \times 4^2$

c. ☐ $2^3 \times 3^2$

9 La forme irréductible de $\frac{5}{3} \times \frac{6}{4}$ est :

a. ☐ $\frac{30}{12}$

b. ☐ $\frac{10}{4}$

c. ☐ $\frac{5}{2}$

10 Le produit de deux nombres impairs est impair.

a. ☐ Vrai

b. ☐ Faux

c. ☐ On ne peut pas savoir

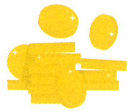
Algorithmique, TICE & logique

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **31**

1 Écrire une fonction en Python qui permet de définir si un nombre a divise un nombre b.

2 Écrire une fonction qui teste la primalité d'un nombre n.

3 Coder l'exercice 3 du Parcours 3 :
« Dans un pays où le système fiduciaire (les pièces et les billets) n'est constitué que de pièces de 3 et de 5, il s'agit d'aider les habitants en créant un algorithme qui donne le nombre minimal de pièces nécessaires à tout achat d'un montant entier supérieur ou égal à 8. » Source : *d'après PISA, items libérés*



Pour tester l'algorithme, utiliser une console Python.

4 Écrire un code en Python du crible d'Eratosthène (cf. exercice 1 du Parcours 2) sur une console Python.

5 Compléter le programme suivant :

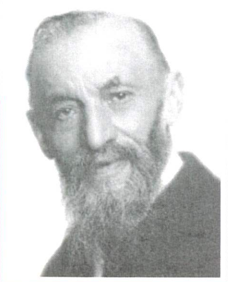
```
def premier(n) :
    # on cherche un diviseur autre que 1 et n
    if n==1 : # cas particulier pour n=1
        return .........

    for d in range(...) :
        if .........
            return .........
    return .........
```

Chapitre 3
Ensemble de nombres

Objectifs

- Connaître les différents ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
- Connaître l'inclusion d'un ensemble dans un autre.
- Savoir déterminer l'union et l'intersection de deux ensembles.
- Savoir déterminer l'appartenance d'un nombre à un ensemble.
- Savoir déterminer si un nombre appartient à un ensemble donné.



Culture scientifique

Giuseppe Peano (1858-1932), mathématicien italien, est considéré comme le fondateur de la logique mathématique et de la théorie des ensembles. Ses travaux ont jeté les bases de la compréhension moderne des nombres. Il a formulé cinq axiomes (propositions non démontrées) qui définissent et permettent de construire logiquement les nombres entiers naturels.

Et sinon, dans la vraie vie ?

Le nombre d'Or, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,
prend part dans les formes et structures naturelles comme celles des coquillages, des ouragans, des pétales de fleurs. Sa nature irrationnelle ajoute à son mystère et à son intrigue, renforçant son importance dans divers domaines des mathématiques, de l'art et de la nature.