

Chapitre 16

Probabilités

Objectifs

- ➔ Connaître le vocabulaire associé aux événements : univers, issue, réunion, intersection, complémentaire.
- ➔ Connaître la loi de probabilité d'une situation.
- ➔ Connaître et savoir utiliser la relation $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
- ➔ Savoir dénombrer à l'aide de tableaux et d'arbres.
- ➔ Savoir utiliser des modèles théoriques de référence (dés, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité).
- ➔ Savoir calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.



↳ Culture scientifique

Blaise Pascal (1623-1662) est un mathématicien, physicien, philosophe et inventeur français. Il a marqué l'histoire des sciences par ses contributions notamment dans le calcul des probabilités des jeux de hasard (Problème du Chevalier de Méré, Problème du Duc de Toscane). Il a créé le premier modèle de calculatrice : la Pascaline.

Et sinon, dans la vraie vie ?

Dans les jeux de hasard, les probabilités prédisent la ruine du joueur, en montrant que la probabilité de tout perdre augmente avec le temps. Il n'existe donc pas de stratégie gagnante, contrairement aux idées reçues sur les martingales.



A Expériences aléatoires

» Définitions

- Une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats possibles et que l'on ne peut pas prévoir, *a priori*, le résultat qui se produira. L'expérience est soumise au hasard.
- Un résultat possible d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.
L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers**. On le note Ω .
- On peut représenter une expérience aléatoire sous la forme d'un arbre, d'un diagramme ou d'un tableau. Ces représentations permettent de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

Exemples

- On lance un dé équilibré à 6 faces. On ne peut savoir *a priori* la face sortante.
Ce lancer est soumis au hasard. On dit que ce lancer de dé est une expérience aléatoire.
- Lors d'un lancer d'un dé cubique, une issue est le résultat 4.
Les issues sont les résultats 1, 2, 3, 4, 5, 6.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

B Événements

» Définitions

- Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue.

C Réunion et intersection d'événements

» Définitions

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

• **L'intersection** de A et de B , notée $A \cap B$, est l'événement constitué des issues appartenant à la fois à A et à B .



• **La réunion** de A et de B , notée $A \cup B$, est l'événement constitué des issues appartenant à A ou à B (ou aux deux).



D Événements contraires

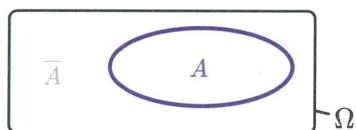
» Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **contraires** lorsque A est composé de toutes les issues de l'univers n'appartenant pas à B .

On note $B = \bar{A}$ (se lit A barre).

$A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.



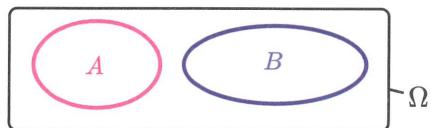
E Événements incompatibles

» Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun ($A \cap B = \emptyset$).

A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément.



1 Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, décrire l'univers et donner le nombre d'issues qui le compose.

- On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le plus grand des numéros obtenus.
- On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note la somme des numéros obtenus.
- On lance une pièce de monnaie trois fois successivement et on note les trois côtés (pile ou face) obtenus.

2 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On note :

- A l'évènement : "La carte tirée est l'as de pique";
- B l'évènement : "La carte tirée est un as";
- C l'évènement : "La carte tirée est rouge".



Décrire les évènements $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, \bar{C} .

3 On lance deux dés et on note la somme des deux faces obtenues.

Représenter l'univers, c'est à dire l'ensemble de toutes les issues possibles, à l'aide d'un tableau.

4 Monsieur Pink a 4 chemises, 2 roses, 1 bleue et 1 grise. Il a aussi 3 pantalons : 1 rose, 1 bleu et 1 gris.

Représenter les tenues composées d'une chemise et d'un pantalon que M. Pink peut choisir par un arbre de dénombrement.

F Probabilité d'un évènement

» Définitions

Loi des grands nombres : les fréquences de réalisation d'un événement E se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente.

Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'évènement E et se note $p(E)$.

Propriété

La probabilité $p(E)$ d'un événement E est une fréquence théorique donc on a $0 \leq p(E) \leq 1$.

» Définitions

- Un évènement **impossible** a une probabilité égale à 0 : $p(\emptyset) = 0$
- Un évènement **certain** a une probabilité égale à 1. Ainsi $p(\Omega) = 1$.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- L'évènement «obtenir un 7» est un évènement impossible.
- L'évènement «obtenir un nombre compris entre 1 et 6» est un évènement certain.

En effet, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ quelque soit la face obtenue.

G Calculs de probabilités

Propriété

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

» Définition

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser on dit que l'expérience est une **situation d'équiprobabilité**.

Exemple

«On choisit au hasard un individu parmi 100 dans une population.»

Cette situation est une situation d'équiprobabilité, puisque chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

Propriété

En situation d'équiprobabilité sur un univers Ω , la probabilité d'un évènement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à la réalisation de l'évènement } A}{\text{nombre total d'issues de } \Omega}$$

Exemple

Lorsqu'on lance un dé équilibré, les six issues 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont équiprobables.

Si A est l'évènement d'obtenir un nombre pair, alors $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

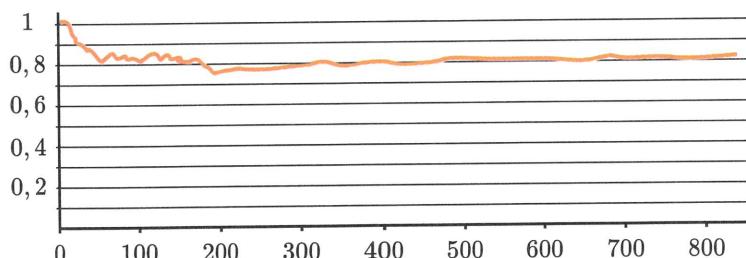
En effet, les faces paires du dé sont 2, 4 et 6.

Il y a donc 3 issues favorables à la réalisation de A et le total des issues est 6 ainsi $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

5

On lance une pièce et on observe la fréquence d'apparition de "Pile".

On a répété 863 fois l'expérience et on a représenté la fréquence observée. La pièce est-elle truquée ? Justifier.



6

On dispose d'un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Une étude statistique conduit à l'estimation suivante :

- les faces de 1 à 4 ont la même probabilité p de sortie.
- la face 5 a une probabilité de sortie égale à 0,1.
- la face 6 a une probabilité de sortie égale à 0,3.

a. Déterminer la probabilité de sortie de chaque face.

b. Déterminer la probabilité d'obtenir une face paire.

7

Dans une cité scolaire, on considère les classes de Terminale :

- il y a 400 élèves en Terminale ;
- parmi eux, 55% sont des filles ;
- le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85% ;
- parmi les candidats ayant échoué, la proportion de filles a été de 5%.

a. Compléter le tableau des effectifs décrivant les résultats au baccalauréat.

	Garçons	Filles	Total
Réussite
Échec
Total	400

b. On choisit un élève au hasard parmi les élèves de Terminale. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été reçu au baccalauréat ?

c. On choisit au hasard un élève ayant eu son baccalauréat. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
 Arrondir le résultat au centième.

H Loi de probabilité

» Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini et constitué de n issues $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω c'est associer à chaque évènement élémentaire e_i sa probabilité.

On peut représenter une loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

e_i	e_1	e_2	e_3	...	e_n
$p(e_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Propriété

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ un univers fini.

La somme des probabilités des n évènements élémentaires est égale à 1 : $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$

I Probabilité d'un évènement contraire

Propriété

Soit A un évènement et \bar{A} son évènement contraire.

On a alors $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ou encore $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

J Probabilité d'une réunion d'évènements

Propriété

Soit A et B deux évènements, on a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple

On tire 1 carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit A : l'évènement obtenir 1 roi.

Soit B : l'évènement obtenir 1 cœur.

$$p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$A \cap B$ est l'évènement d'obtenir le roi de cœur : $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$

$A \cup B$ est l'évènement d'obtenir 1 roi ou 1 cœur : $p(A \cup B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$ (on enlève le roi de cœur qui appartient aux deux évènements).

Propriété

Soit A et B deux évènements incompatibles, on a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Preuve

A et B sont incompatibles donc $p(A \cap B) = 0$

Comme $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

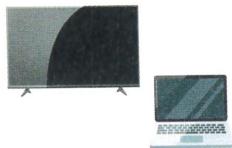
8 On lance un dé truqué à 6 faces et on obtient les probabilités de certaines issues.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,08		0,17	0,1	0,13	0,08

Calculer la probabilité d'obtenir 2.

9

Une étude montre qu'un adolescent sur quatre possède une télévision dans sa chambre et un sur cinq un ordinateur dans sa chambre. 60% des adolescents n'ont ni l'un ni l'autre dans leur chambre. On choisit un adolescent au hasard. Quelle est la probabilité qu'il possède à la fois une télévision et un ordinateur dans sa chambre ?



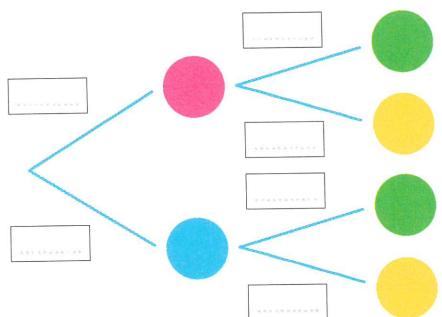
10

Un jeu consiste à piocher au hasard une boule successivement dans deux urnes.

- L'urne 1 contient 16 boules roses et bleues dont 7 roses.
- L'urne 2 contient 8 boules vertes et jaunes dont 3 vertes.

a. Compléter l'arbre de dénombrement ci-contre.

b. En déduire la probabilité d'obtenir une boule rose et une boule verte.



11

Soit A et B deux événements tels que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,7$.

a. Calculer $p(A \cap B)$.

b. $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,2$ et $p(A \cup B) = 0,7$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?

Exercices | Parcours 1

Compléments numériques

Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **220**



- 1** Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, décrire l'univers et donner le nombre d'issues qui le composent.
- On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note l'écart positif ou nul entre les numéros obtenus.
 - On lance trois fois une pièce de monnaie. Obtenir "pile" rapporte un point (+1), obtenir "face" fait perdre un point (-1). On s'intéresse à la somme des points obtenus à l'issue des trois lancers.
- 2** Inaya doit choisir entre trois jeux.
- Le jeu *A* avec lequel un joueur a 7 chances sur 10 de gagner ;
 - Le jeu *B* avec lequel un joueur a 70% de chance de gagner ;
 - Le jeu *C* avec lequel la probabilité de gagner est de 0,8.
- À quel jeu va-t-elle jouer si elle veut avoir la plus grande chance de gagner ?
- 3** Liam a lancé 1 000 fois une pièce de monnaie et a obtenu 321 fois «Pile». La pièce de Liam est-elle truquée ? Justifier.
- 4** Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Les boules 1 et 2 sont vertes, les autres sont bleues. On pioche au hasard une première boule, puis, sans la remettre, une seconde boule. Les issues sont notées (*a* , *b*) où *a* et *b* désignent les numéros obtenus dans l'ordre. Répondre par Vrai ou Faux en justifiant vos réponses.
- L'évènement : «obtenir deux numéros différents» est certain.
 - L'issue (2 , 5) réalise l'évènement : «obtenir des boules de couleurs différentes».
 - L'évènement : «obtenir deux boules vertes» est (1 , 2).
 - L'évènement : «la somme des numéros est 10» est impossible.

Exercices | Parcours 2

Compléments numériques

Sur Sacado via votre ENT

À consulter dans "Livre numérique"

en indiquant le numéro de page :

221

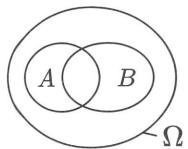


Sacado

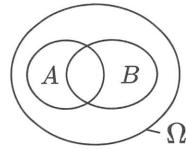
...

- 1 A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,1$.
Représenter les événements suivants et calculer leurs probabilités.

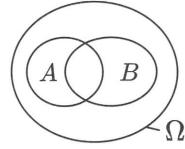
a. \bar{A}



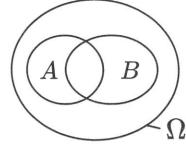
b. \bar{B}



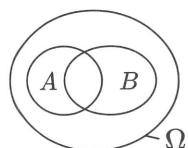
c. $\bar{A} \cap B$



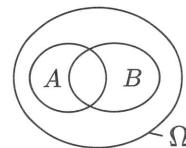
d. $\bar{A} \cup B$



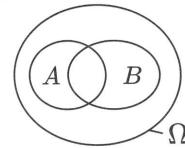
e. $\bar{A} \cap \bar{B}$



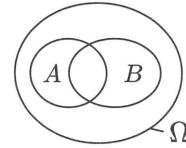
f. $\bar{A} \cap \bar{B}$



g. $\bar{A} \cup \bar{B}$



h. $\bar{A} \cup \bar{B}$



- 2 Une urne contient deux boules rouges numérotées 1 et 2, notées R_1, R_2 et trois boules bleues numérotées de 1 à 3, notées B_1, B_2, B_3 . Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement deux boules avec remise. Représenter la situation par un arbre de probabilité, puis calculer la probabilité des événements suivants (donner vos réponses sous forme de fraction irréductible).

a. A : «le tirage ne comporte que des boules bleues».

b. B : «le tirage comporte au moins une boule bleue».

c. C : «le tirage ne comporte que des boules numérotées 2».

d. D : «le tirage comporte au moins une boule numérotée 2».

e. E : «le tirage comporte au moins une boule bleue ou une boule numérotée 2».

- 3 Dans la population mondiale, les groupes sanguins sont répartis comme indiqué dans le tableau ci-contre. On choisit une personne au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité qu'elle soit :



	O	A	B	AB
Rhésus +	38%	34%	9%	3%
Rhésus -	7%	6%	2%	1%

a. Donneuse universelle, c'est à dire du groupe O et de rhésus - ?

b. Du groupe AB ?

c. De rhésus + ?

4 Dans une classe de Seconde, tous les élèves pratiquent au moins une langue étrangère et sont répartis ainsi :

- 25 élèves pratiquent l'anglais ;
- 11 élèves pratiquent l'italien ;
- 13 élèves pratiquent l'allemand ;
- 8 élèves pratiquent l'anglais et l'allemand ;
- 5 élèves pratiquent l'anglais et l'italien ;
- 2 élèves pratiquent les 3 langues.

a. Représenter cette situation en schématisant par des ensembles.

b. Déterminer le nombre d'élèves ne pratiquant que l'allemand.

c. Déterminer le nombre d'élèves de cette classe.

d. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard dans cette classe ne pratique que l'italien.

5 On considère un cadenas à code de 3 chiffres de 0 à 9.



a. Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

b. On tente une combinaison au hasard. Quelle est la probabilité de trouver le bon code ?

6 On lance un dé non équilibré à 6 faces tel que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ et $p_6 = 0,3$. Déterminer p_1 .

7 On lance successivement deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on calcule l'écart positif ou nul entre ces deux numéros.

a. Donner l'univers de cette expérience aléatoire.

b. Représenter la situation en utilisant le tableau à double entrée ci-contre :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

c. Donner la loi de probabilité de cette expérience. Quelle est l'issu la plus probable ?

Exercices | Parcours 3

Compléments numériques

Sur Sacado via votre ENT



À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page :

223

1 Une loterie est proposée à l'aide d'une roue à 8 secteurs identiques numérotés de 1 à 8.

Si la roue s'arrête sur un nombre strictement supérieur à 6, le joueur gagne un cadeau qu'il tire dans un sac contenant 12 lapins en peluche de couleur rouge et 16 lapins en peluche de couleur bleue. Les probabilités seront données sous forme d'une fraction irréductible.



a. Quelle est la probabilité de gagner un cadeau ?

b. Quelle est la probabilité de gagner un lapin en peluche de couleur rouge ?

2 Morgan est perchiste dans une station de sports d'hiver. Il observe qu'une personne sur 3 est un snowboarder et les autres sont des skieurs. Les trois quarts des snowboarders ont moins de 20 ans alors que la moitié des skieurs ont 20 ans ou plus. Quelle est la probabilité que la prochaine personne qui se présente à la remontée mécanique soit un skieur de 20 ans ou plus ? Le résultat sera donné sous forme de fraction irréductible.

3 Dans un QCM, on propose pour chaque question trois réponses possibles dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il réponde juste à toutes les questions lorsque le QCM comporte 4 questions ?

b. À partir de combien de questions la probabilité de répondre tout juste est-elle inférieure à 1 pour 1 000 ?

Autoévaluation

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note
/ 10

Corrigé QCM

✓ Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **224**



1 Obtenir tous les bons numéros au loto est un événement

- a. très probable
- b. équitable
- c. très peu probable

2 $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ et $B = \{1; 3; 5; 7\}$, alors $A \cap B =$

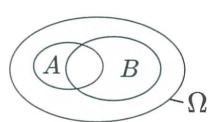
- a. $\{3; 5\}$
- b. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
- c. $\{1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 7\}$

3 La probabilité d'un événement E est $p(E) = 0$ alors

- a. E est un événement incertain
- b. E est un événement impossible
- c. E est un événement nul

4 On a représenté deux événements A et B d'un univers Ω . L'ensemble représenté en bleu est :

- a. $A \cup B$
- b. $A \cap B$
- c. $\overline{A \cap B}$



5 Pour une certaine expérience aléatoire, $p(A) = 0,39$. Alors $p(\overline{A}) =$

- a. 0,39
- b. 0,61
- c. On ne peut pas savoir

6 Alice lance un dé équilibré. La probabilité p d'obtenir une face inférieure ou égale à 4 est :

- a. 4
- b. $\frac{2}{3}$
- c. $\frac{1}{6}$

7 Dans une classe, il y a 16 filles et 17 garçons. La probabilité de choisir au hasard une fille de la classe est :

- a. $\frac{16}{17}$
- b. $\frac{16}{33}$
- c. $\frac{17}{33}$

8 Une loi de probabilité est représentée par le tableau ci-dessous. La probabilité manquante est $p =$

Issues	e_1	e_2	e_3	e_4
Probabilités	0,3	0,21	0,23	?

- a. 0,16
- b. 0,26
- c. 0,36

9 Une expérience consiste à choisir aléatoirement une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de choisir un 10 est :

- a. $\frac{1}{32}$
- b. $\frac{1}{8}$
- b. $\frac{10}{32}$

10 A et B sont deux événements tels que $p(B) = 0,27$, $p(A \cup B) = 0,36$ et $p(A \cap B) = 0,1$. Alors $p(A) =$

- a. 0,19
- b. 0,27
- c. 0,73

1 Au XVII^e siècle, à la cour de Florence, de nombreux jeux de société étaient pratiqués.

Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés.

Le Grand-Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Python peut être utilisé pour vérifier ce constat.

- Compléter le code ci-dessous.
- Vérifier la conjecture du Grand-Duc de Toscane.
- Supprimer les lignes inutiles pour la validation du Duc de Toscane.

```

1  compteur1 , compteur2 , tot = 0,0,0
2  for i in range(..., ...):
3      for j in range(..., ...):
4          for k in range(..., ...):
5              som = i+j+k
6              if som==... :
7                  compteur1 = compteur1 + 1
8                  print("l'issue {} - {} - {} a pour somme 9"
9              elif som==... :
10                 compteur2 = compteur2 + 1
11                 print("l'issue {} - {} - {} a pour somme 10"
12             else : print("l'issue est {} - {} - {}"
13             tot = tot +1
14 print("Obtenir 9 : {}/")
15 print("Obtenir 10 : {}/")

```

2 La fonction `random` de Python renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1. La probabilité que ce réel soit inférieur à un nombre $p \in [0; 1]$ est p . Par exemple, il y a une chance sur deux que `random()` rende un nombre inférieur à 0,5.

- Comprendre ce que fait la fonction suivante et compléter les commentaires «# ??? ».

```

1  from random import random
2  def success(n,p):
3      # n est le nombre de simulations
4      # p est la probabilité d'un succès
5      s=0
6      for k in range(n):    # ???
7          t=random()
8          if t<p:          # ???
9              s=s+1          # ???
10     return s, s/n        # ???

```

- On veut simuler 1 000 lancers d'une pièce équilibrée et compter combien de faces sont obtenues. Quel appel à la fonction `success` doit-on effectuer ?

- On exécute la simulation de la question précédente.

- 1) Obtient-on forcément 500 succès ?
- 2) Est-il possible d'obtenir 1 000 succès ?
- 3) La probabilité d'obtenir 1 000 succès est-elle plutôt élevée ou plutôt faible ?

