

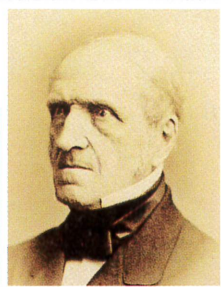
Chapitre 11

Géométrie vectorielle

Objectifs



- Connaître la direction, le sens et la norme d'un vecteur.
- Connaître les opérations sur les vecteurs.
- Connaître la relation de Chasles.
- Savoir représenter géométriquement des vecteurs.
- Savoir construire géométriquement la somme de deux vecteurs.
- Savoir caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.



➤ Culture scientifique

Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français connu pour ses travaux en géométrie et en analyse. C'est en son honneur que la définition de la somme de deux vecteurs porte le nom de « relation de Chasles ». Ses contributions ont permis de simplifier et d'unifier de nombreux concepts géométriques, et elles sont encore utilisées aujourd'hui dans la recherche en géométrie : cinématique, électromagnétisme...



Et sinon, dans la vraie vie ?

Les robots utilisent des vecteurs pour représenter leur position et leur orientation dans l'espace, pour déterminer la trajectoire à suivre pour atteindre une destination. Les capteurs des robots s'appuient sur les vecteurs pour calculer les distances des objets environnants.

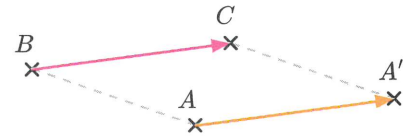


A Translation dans le plan

↳ Définition

Soit B et C deux points distincts du plan.

L'image d'un point A par la **translation** qui transforme B en C est le point A' tel que $ABCA'$ est un **parallélogramme**.



B Vecteur

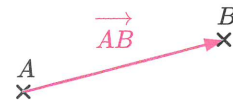
↳ Définition

Soit A et B deux points distincts du plan. À la translation qui transforme

A en B , on associe le **vecteur d'origine** A et d'extrémité B , noté \overrightarrow{AB} ,

qui correspond au déplacement de A vers B . Le vecteur \overrightarrow{AB} est défini par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme**, notée $||\overrightarrow{AB}||$: la **longueur** AB .



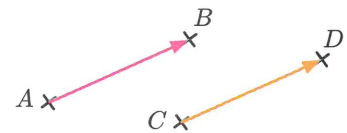
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

C Vecteurs égaux

↳ Définition

On dit que deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont **égaux** s'ils ont :

- la **même direction** ;
- le **même sens** ;
- la **même norme**.



Propriété

Soit A, B, C et D quatre points du plan, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

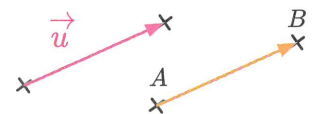
D Représentant d'un vecteur

↳ Définition

Soit A et B deux points du plan. En notant \vec{u} un vecteur qui a la même direction, le même

sens et la même norme que le vecteur \overrightarrow{AB} , on a $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On dit que le vecteur \overrightarrow{AB} est un **représentant** du vecteur \vec{u} .

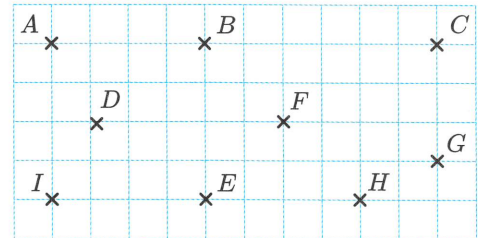


Propriété

Soit A un point et \vec{u} un vecteur, alors il existe un unique point B tel que \overrightarrow{AB} soit un représentant de \vec{u} .

- 1 Sur un quadrillage régulier, on a placé les points ci-après.
 Pour chaque proposition, cocher Vrai ou Faux.

	Vrai	Faux
1. Les vecteurs \overrightarrow{BF} et \overrightarrow{DE} ont la même direction.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Les vecteurs \overrightarrow{FC} et \overrightarrow{HG} ont la même direction.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Les vecteurs \overrightarrow{ID} et \overrightarrow{HG} ont la même norme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{EI} ont la même direction, le même sens mais des normes différentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. L'image du point E par la translation de vecteur \overrightarrow{BA} est H .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Les vecteurs \overrightarrow{DF} et \overrightarrow{BC} ont la même direction, le même sens et la même norme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



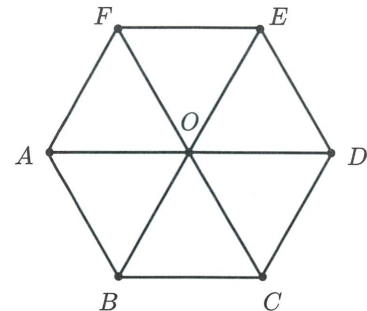
- 2 $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O .

a. Donner tous les vecteurs égaux à \overrightarrow{AB} .

b. Déterminer le représentant de \overrightarrow{DC} d'origine O .

c. Déterminer l'image de A par la translation de vecteur \overrightarrow{FD} .

d. Déterminer le représentant de \overrightarrow{BD} d'origine A .



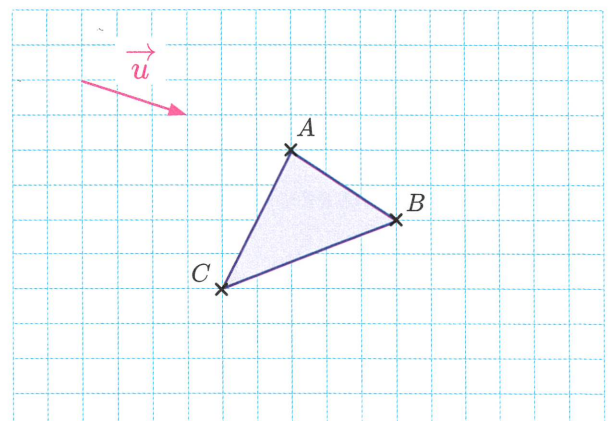
- 3 On considère un triangle ABC et un vecteur \vec{u} .

a. Construire le représentant \vec{v} du vecteur \overrightarrow{CB} d'origine A .

b. Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

c. Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \vec{u}$.

d. Placer le point F tel que $CBEF$ soit un parallélogramme.



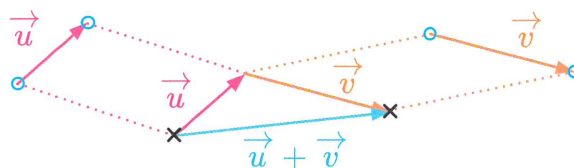
E Somme de vecteurs

➤ Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Si on enchaîne la translation de vecteur \vec{u} puis la translation de vecteur \vec{v} , on obtient une translation.

On appelle **somme des vecteurs** \vec{u} et \vec{v} , notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur qui lui est associé.



F Relation de Chasles

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan, alors $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Propriétés

Addition des vecteurs

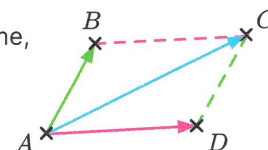
Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} :

• $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, l'addition est commutative.

• $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, l'addition est associative.

Règle du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme, alors $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.



Exercice corrigé

Soit A, B, C et D quatre points, exprimer $\vec{BD} + \vec{AB} + \vec{CA}$ en fonction d'un seul vecteur.

$$\vec{BD} + \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CD}$$

G Le vecteur nul

➤ Définition

Soit A un point du plan, on appelle vecteur \vec{AA} le **vecteur nul** et on le note $\vec{0}$.

Propriété

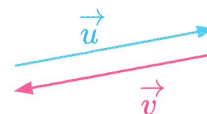
Pour tout vecteur \vec{u} , on a : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

H Vecteurs opposés

➤ Définition

On dit que deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} **sont opposés** lorsqu'ils ont : la **même direction**, la **même norme** et **des sens contraires**. On le note : $\vec{v} = -\vec{u}$.

Et on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.



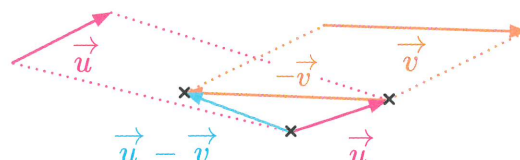
I Soustraction de vecteurs

➤ Définition

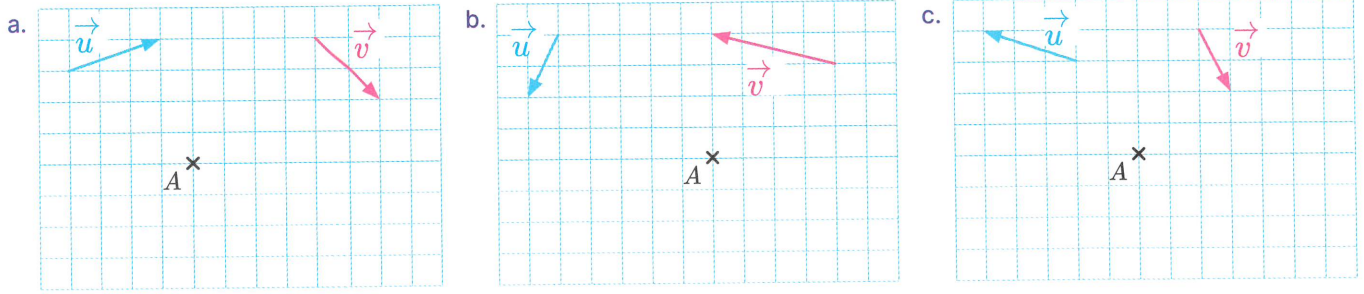
Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

On définit la **différence** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} par : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé.



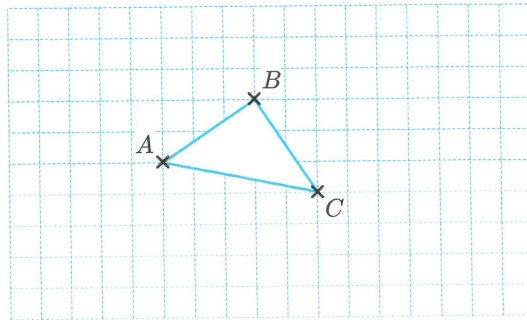
4 Dans chaque cas, placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$:



5 Soit ABC un triangle.
 Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$



6 En utilisant la relation de Chasles, compléter les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EK}$$

$$\overrightarrow{JS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{JA}$$

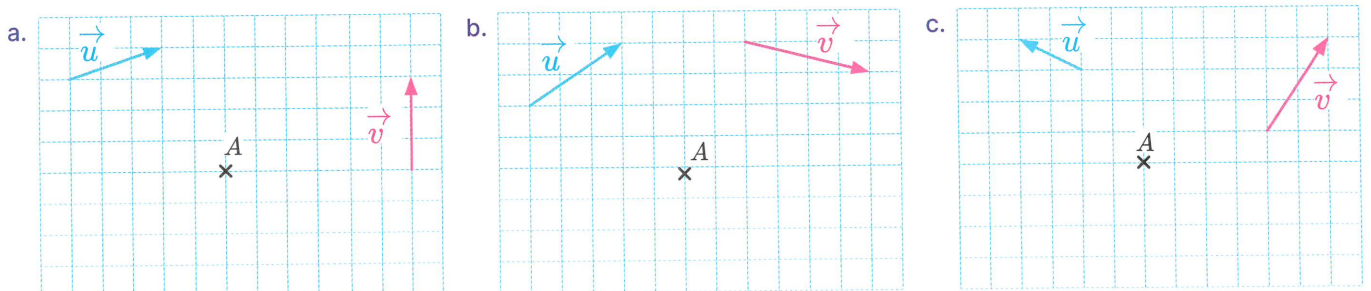
$$\overrightarrow{JP} + \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{JZ}$$

$$\overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{IR}$$

$$\overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{ZV}$$

$$\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0}$$

7 Dans chaque cas, placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} - \vec{v}$.



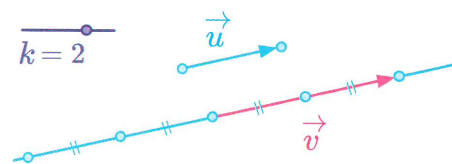
J Produit d'un vecteur par un nombre réel

➤ Définition

Soit \vec{u} un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.

Le produit du vecteur \vec{u} par le nombre k , noté $k\vec{u}$ est le vecteur \vec{v} tel que :

- les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont la même direction ;
- les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont : le même sens si $k > 0$, des sens contraires si $k < 0$;
- la norme de \vec{v} est égale à $|k|$ fois la norme de \vec{u} .



Exemple

Les points A, B, C, D, E , et F sont alignés.



On a alors : $\vec{AC} = \frac{3}{4} \vec{AB}$

$\vec{AE} = 2 \vec{AB}$

$\vec{AD} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$

$\vec{AF} = -\frac{6}{4} \vec{AB} = -\frac{3}{2} \vec{AB}$

Propriétés

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

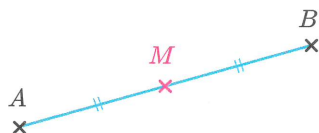
- M est le milieu du segment $[AB]$

$\vec{AB} = 2 \vec{AM}$

$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB}$

$\vec{AM} = \vec{MB}$

$\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$



Pour tous nombres λ et μ et tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$

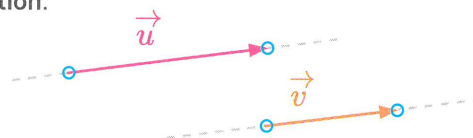
$\lambda (\mu \vec{u}) = (\lambda \mu) \vec{u}$

K Vecteurs colinéaires

➤ Définition

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction**.

Par convention, le vecteur nul, $\vec{0}$, est colinéaire à tout autre vecteur du plan.



Propriété

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ;
- il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$.

Méthode

- Démontrer que trois points A, B et C sont alignés revient à démontrer que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.
- Démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à démontrer que les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

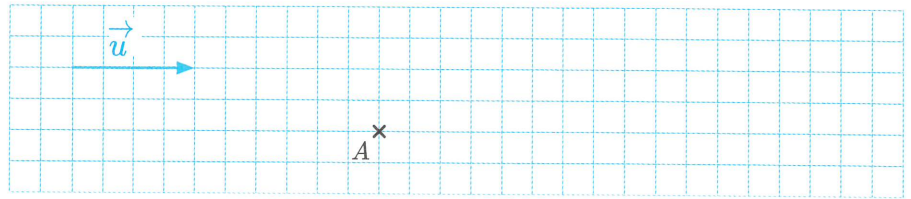
- 8 On a représenté ci-dessous un vecteur \vec{u} et un point A .
Placer les points B , C , D et E tels que :

$$\vec{AB} = -2\vec{u}$$

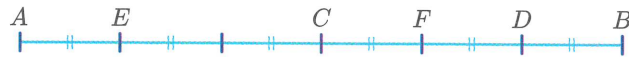
$$\vec{AC} = 2,5\vec{u}$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{u}$$

$$\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{u}$$



- 9 On a partagé le segment $[AB]$ en six parties égales.



Compléter les égalités vectorielles par le nombre qui convient :

$$\vec{AE} = \dots \vec{AB}$$

$$\vec{DC} = \dots \vec{DB}$$

$$\vec{AC} = \dots \vec{DB}$$

$$\vec{ED} = \dots \vec{FC}$$

$$\vec{CE} = \dots \vec{AB}$$

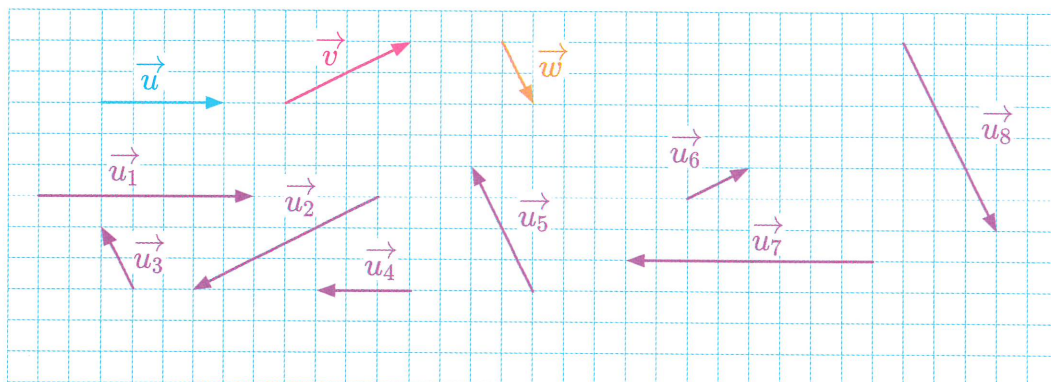
$$\vec{EF} = \dots \vec{EC}$$

$$\vec{EC} = \dots \vec{BC}$$

$$\vec{CD} = \dots \vec{FA}$$

- 10 On considère trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

Chacun des autres vecteurs représentés est obtenu en multipliant \vec{u} , \vec{v} ou \vec{w} par un nombre réel k .



Exprimer chacun des vecteurs en fonction de \vec{u} , \vec{v} ou \vec{w} :

$$\vec{u}_1 = \dots$$

$$\vec{u}_2 = \dots$$

$$\vec{u}_3 = \dots$$

$$\vec{u}_4 = \dots$$

$$\vec{u}_5 = \dots$$

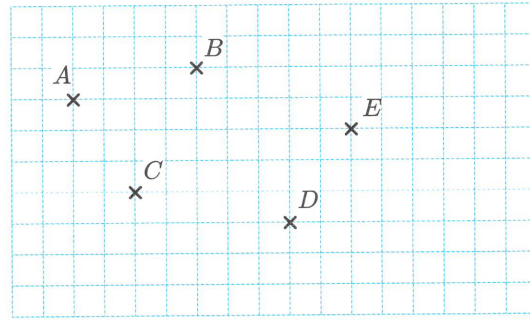
$$\vec{u}_6 = \dots$$

$$\vec{u}_7 = \dots$$

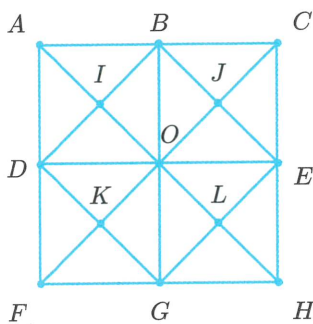
$$\vec{u}_8 = \dots$$

1 Sur la figure ci-contre, construire :

- L'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
- Le vecteur représentant \overrightarrow{AB} , d'origine D .
- Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.



2 $ACHF$ est un carré de centre O .



a. Citer deux vecteurs égaux à \overrightarrow{AB} : $\overrightarrow{AB} = \dots = \dots$

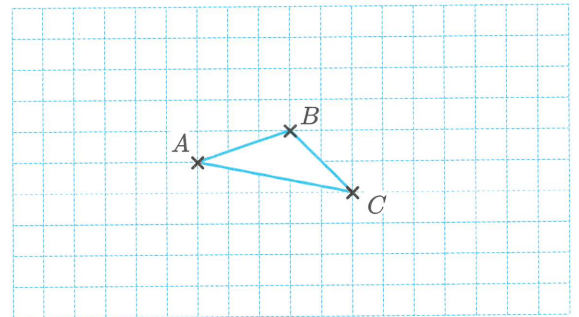
b. Déterminer le représentant du vecteur \overrightarrow{DK} d'origine B :
.....

c. Compléter les égalités :

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{O}$	$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{D}$
$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{G}$	$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{A}$
$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{O}$	$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{G}$

3 Soit ABC un triangle. Construire les points M , N , P et Q tels que :

- $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

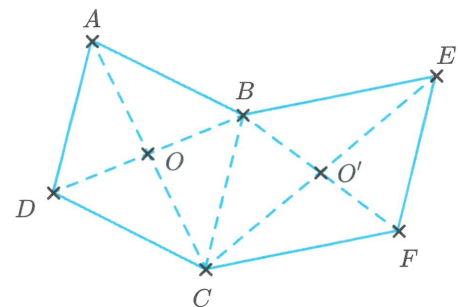


4 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O , et $BEFC$ est un parallélogramme de centre O' .

a. Compléter les égalités :

- | | |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\overrightarrow{AB} = \dots$ | $\overrightarrow{CO'} = \dots \overrightarrow{CE}$ |
| $\overrightarrow{EB} = \dots \overrightarrow{CF}$ | $\overrightarrow{OB} = \dots \overrightarrow{OD}$ |
| $\overrightarrow{DB} = \dots \overrightarrow{DO}$ | $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} = \dots$ |

b. Prouver que le quadrilatère $AEFD$ est un parallélogramme.



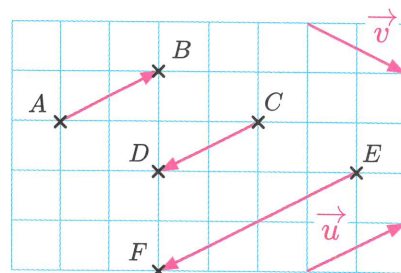
1 Parmi les vecteurs représentés ci-contre, citer :

a. Deux vecteurs égaux.

b. Deux vecteurs de même direction, de même sens mais pas de même norme.

c. Deux vecteurs de même norme, mais pas de même direction.

d. Deux vecteurs de même direction, de même norme mais pas de même sens.

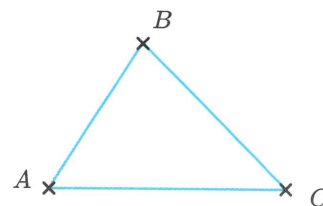


2 On considère un triangle ABC .

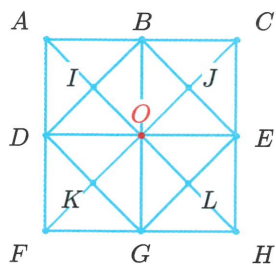
a. Construire les points M , N et P tels que :

$$\vec{CM} = \vec{AB} + \vec{CB} \quad \vec{AN} = \vec{BA} - \vec{CA} \quad \vec{BP} = \vec{AB} + \vec{CA}$$

b. Montrer que $\vec{PA} = \vec{AN}$



3 Utiliser la figure ci-après pour compléter les égalités :



$$\vec{DI} + \vec{IA} = \vec{OA} = \vec{OA}$$

$$\vec{AI} + \vec{IE} = \vec{AE} = \vec{AE}$$

$$\vec{KG} + \vec{GL} = \vec{KL} = \vec{KL}$$

$$\vec{GL} + \vec{LO} = \vec{GO} = \vec{GO}$$

$$\vec{DF} + \vec{FK} = \vec{DK} = \vec{DK}$$

$$\vec{IO} + \vec{OB} = \vec{IB} = \vec{IB}$$

4 On considère les points A , B et C et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Construire les points M , N , O , P , Q et R tels que :

$$\vec{AM} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

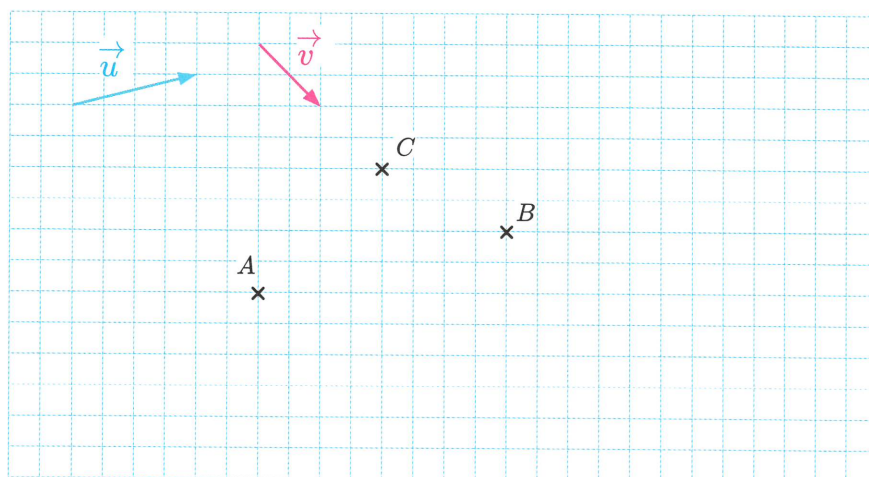
$$\vec{BN} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{CO} = -2\vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{CP} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{AQ} = -\vec{v} - \frac{3}{2}\vec{u}$$

$$\vec{BR} = \frac{3}{2}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u}$$



5 Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles.

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

6 Exprimer les vecteurs \vec{u} et \vec{v} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA}$$

7 On considère un triangle ABC et le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

a. Exprimer \overrightarrow{AE} en fonction de \overrightarrow{AB} .

b. Prouver que les points A , B et E sont alignés.

8 ABC est un triangle. On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

a. Exprimer \overrightarrow{AN} en fonction de \overrightarrow{AC} .

b. En déduire \overrightarrow{MN} en fonction de \overrightarrow{BC} .

c. En déduire que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1

On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis par : $\vec{u} = 3\vec{AB} + 9\vec{BC}$ et $\vec{v} = -6\vec{BA} - 2\vec{CB} - 8\vec{AC}$.

a. Exprimer \vec{u} et \vec{v} en fonction de \vec{AB} et \vec{AC} .

b. Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2

On considère un triangle ABC .

Soit M tel que $\vec{AM} = -2\vec{BC} + 3\vec{AB}$ et N tel que $\vec{AN} = -3\vec{AB} + 6\vec{AC}$.

Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

3

On a partagé un segment $[AB]$ en 5 parties égales.

Construire les points M et N tels que :

$$\vec{AM} - 4\vec{MB} = \vec{0}$$

$$2\vec{AN} + 3\vec{BN} = \vec{0}$$



4

On considère un triangle ABC et le point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

a. Soit I le milieu de $[BC]$, montrer que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$.

b. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

c. Pour tout point M , montrer que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes,
une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note
/ 10

1 Si $IJKL$ est un parallélogramme alors :

- a. ☐ $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$
- b. ☐ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$
- c. ☐ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$

2 Si M est le milieu de $[AB]$ alors :

- a. ☐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- b. ☐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$
- c. ☐ $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3 Soit R, S et T trois points alors :

- a. ☐ $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RT}$
- b. ☐ $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{RT}$
- c. ☐ $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{RT}$

4 D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{RZ} + \overrightarrow{ZG} =$

- a. ☐ \overrightarrow{GR}
- b. ☐ \overrightarrow{RG}
- c. ☐ \overrightarrow{ZR}

5 $\overrightarrow{VK} + \overrightarrow{LO} - \overrightarrow{LK} =$

- a. ☐ \overrightarrow{VK}
- b. ☐ \overrightarrow{VO}
- c. ☐ \overrightarrow{OL}

6 Si $EFHG$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} =$

- a. ☐ \overrightarrow{FG}
- b. ☐ \overrightarrow{EH}
- c. ☐ \overrightarrow{FH}

7 Si $\vec{u} = -3\vec{v}$ alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont :

- a. ☐ de même direction et de même sens
- b. ☐ colinéaires
- c. ☐ égaux

8 Deux vecteurs colinéaires ont :

- a. ☐ la même direction
- b. ☐ le même sens
- c. ☐ la même norme

9 Si les vecteurs \overrightarrow{BR} et \overrightarrow{RT} sont colinéaires alors :

- a. ☐ R est le milieu de $[BT]$
- b. ☐ les points B, R et T sont alignés
- c. ☐ $R \in [BT]$

10 Si $\overrightarrow{IF} = -2\overrightarrow{PM}$ alors :

- a. ☐ les droites (IF) et (PM) sont parallèles
- b. ☐ les points I, F, P et M sont alignés
- c. ☐ $IFPM$ est un parallélogramme

1 Pour chaque affirmation, justifier qu'elle est vraie ou fausse, écrire sa réciproque et déterminer si elle est vraie ou fausse.

a. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.

Réciproque :

b. Si \vec{u} et \vec{v} sont opposés alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Réciproque :

c. Si A, B, C et D sont alignés alors \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

Réciproque :

2 Soit A, B et C trois points non alignés. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \quad \vec{v} = c\overrightarrow{AB} + d\overrightarrow{AC}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

Écrire une fonction en langage Python qui permet de déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires selon les valeurs de a, b, c et d .

