Chapitre 10
Configurations du plan

Objectifs

- Connaître le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Savoir résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Savoir calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Savoir traiter des problèmes d'optimisation.

Culture scientifique

Euclide (env. 300 av. J.-C.) est un mathématicien de la Grèce antique, il est considéré comme le père de la géométrie.
Dans son ouvrage «*Les Éléments*», il élabore toute la théorie de la géométrie dite euclidienne à l'aide d'un ensemble d'axiomes et de propriétés. Son œuvre établit les fondamentaux de la démonstration géométrique.

Et sinon, dans la vraie vie ?

Les architectes et ingénieurs utilisent les principes de la géométrie euclidienne pour concevoir des bâtiments, des ponts, des routes et d'autres structures. Les triangles, les cercles et d'autres formes géométriques constituent des éléments clés dans la conception et la construction de ces structures.

Compléments numériques

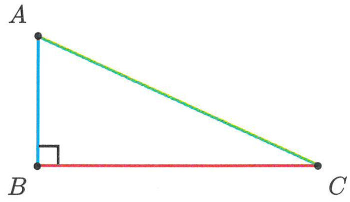
↘ Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 136

A Théorème de Pythagore

↘ Théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Si ABC est un triangle rectangle en B alors on a l'égalité : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors on peut affirmer que le triangle est rectangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors on peut affirmer que le triangle ABC est rectangle en A.

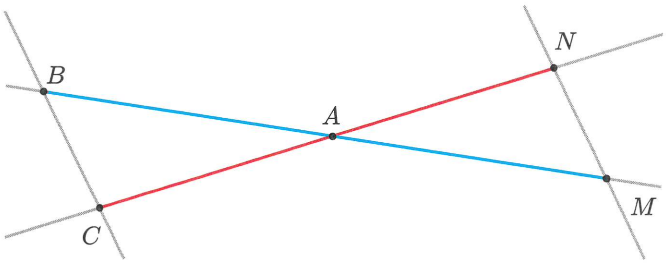
B Théorème de Thalès

↘ Théorème

Si les points A, B, C, M et N forment une configuration de Thalès, alors les triangles ABC et AMN ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$



Réciproque du théorème de Thalès

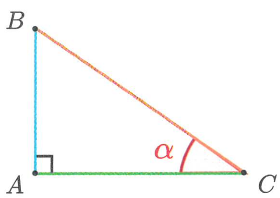
Si les points B, A, M et C, A, N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ alors on peut affirmer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

C Trigonométrie

↘ Définition

Dans un triangle rectangle :

- le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{longueur du coté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- le **sinus** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{longueur du coté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- la **tangente** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{longueur du coté opposé à cet angle}}{\text{longueur du coté adjacent à cet angle}}$



$$cos\ (\alpha) = \frac{AC}{BC}$$

$$sin\ (\alpha) = \frac{AB}{BC}$$

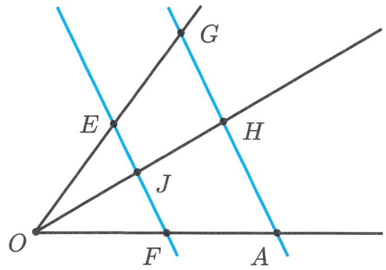
$$tan\ (\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{sin\ (\alpha)}{cos\ (\alpha)}$$

Compléments numériques

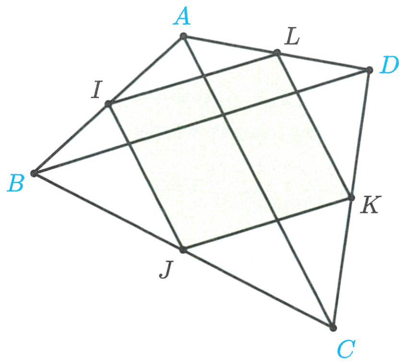
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 137

1 ABC est un triangle équilatéral de côté de longueur $6\ cm$.
Le point H est le milieu de $[BC]$. Calculer AH.

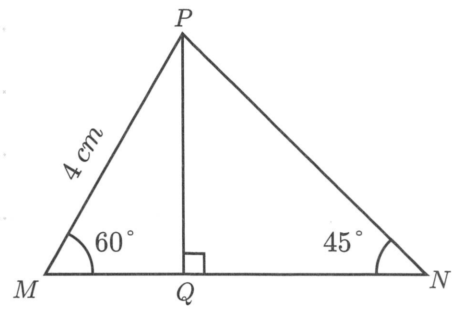
2 Les droites (EF) et (GA) sont parallèles. $JF = 1\ cm$, $AH = 1{,}8\ cm$ et $EG = 1{,}2\ cm$. Calculer OE.
La figure n'est pas à l'échelle.



3 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et I, J, K, L les milieux respectifs de ses côtés.
Démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme.



4 Calculer l'aire du triangle MNP. *La figure n'est pas à l'échelle.*



Cours et applications directes

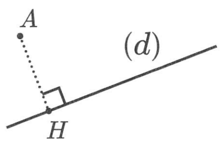
Compléments numériques
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 138

D Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition

Soit une droite (d) et un point A du plan.

Le **projeté orthogonal** du point A sur la droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) avec la perpendiculaire à (d) passant par A.



Propriété

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche du point A.

> Preuve
>
> H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d).
>
> Soit K le point de (d) le plus proche de A alors K est plus proche de A que H donc $AK \leq AH$ et $AK^2 \leq AH^2$.
>
> Le triangle AKH est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :
>
> $AK^2 = AH^2 + KH^2$ donc $AH^2 + KH^2 \leq AH^2$
>
> soit $KH^2 \leq 0$ donc $KH = 0$ donc K et H sont confondus.
>
> Ainsi, H est le point de la droite (d) le plus proche du point A.

Propriété

Dans un triangle rectangle, si α est une mesure d'un angle aigu alors $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

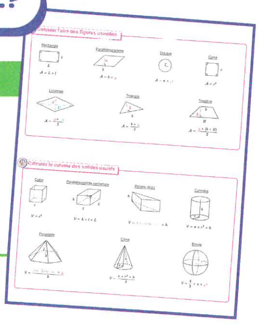
> Preuve
>
> H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d).
>
> Soit P un point de (d) et soit α l'angle $\widehat{APH}$, le triangle APH est rectangle en H donc on peut utiliser les formules de trigonométrie :
>
> $\cos(\alpha) = \dfrac{PH}{PA}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{AH}{PA}$, donc :
>
> $$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{PH^2}{PA^2} + \frac{AH^2}{PA^2} = \frac{PH^2 + AH^2}{PA^2}$$
>
> Or d'après le théorème de Pythagore : $PH^2 + AH^2 = PA^2$.
>
> Donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \dfrac{PH^2 + AH^2}{PA^2} = \dfrac{PA^2}{PA^2} = 1$.

Pssst ! Besoin d'un petit rappel...?

UTILE POUR CE CHAPITRE

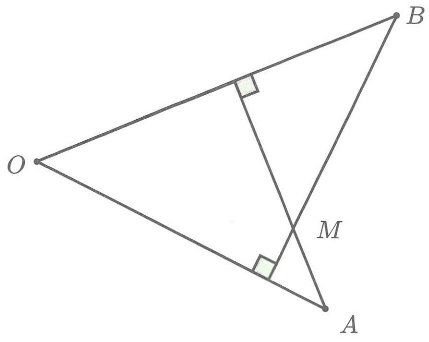
Tu ne te rappelles plus comment calculer une **aire** ou un **volume** ?

Alors, rendez-vous **pages 227-228** où se trouve le ***Rappel de formules***.



Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **139**

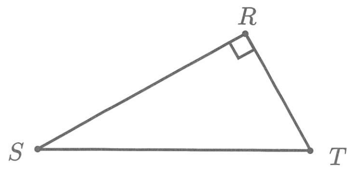
5 Les droites (AM) et (BM) sont respectivement perpendiculaires aux droites (OB) et (OA).



a. Que représente le point M pour le triangle OAB ?

b. Démontrer que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires.

6 On considère un triangle RST rectangle en R tel que $RT = 6\ cm$ et $RS = 8\ cm$.
Soit H le projeté orthogonal du point R sur la droite (ST).



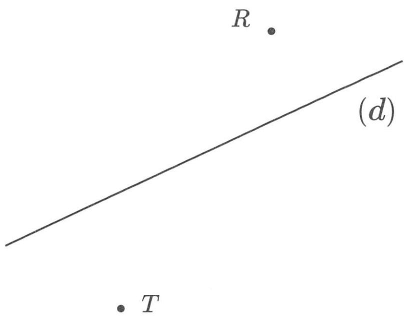
a. Construire H.

b. Déterminer la distance RH.

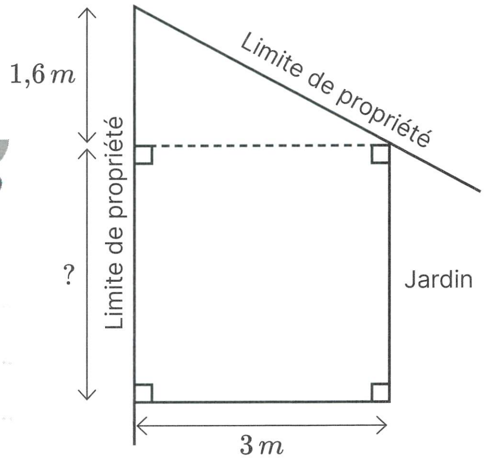
7 Soit ABC un triangle équilatéral de coté a.
M est un point intérieur au triangle ABC. Soit H, I et J les projetés orthogonaux respectifs de A, B, C sur (BC), (AC), (AB). Démontrer que $MH + MI + MJ$ est une constante que l'on déterminera.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **140**

1 Construire les points H et K, projetés orthogonaux respectifs des points R et T sur la droite (d).

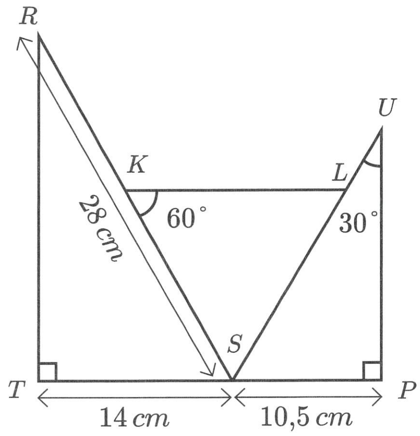


2 Paul veut construire un garage dans le fond de son jardin.
Sur le schéma ci-contre, la partie bleue représente le garage positionné en limite de propriété.
Les longueurs indiquées ($1{,}6\,m$ et $3\,m$) sont imposées ; la longueur marquée par un point d'interrogation est variable, on la notera x.
Sachant que la surface du garage ne doit pas dépasser $20\ m^2$, quelle valeur maximale peut-il choisir pour x ? Arrondir au centimètre près.



3 TSR et SPU sont des triangles rectangles respectivement en T et en P.

- Les points T, S et P sont alignés
- Les points R, K et S sont alignés
- Les points S, L et U sont alignés
- $TS = 14\,cm$
- $SP = 10{,}5\,cm$
- $RS = 28\,cm$
- $\widehat{SKL} = 60^\circ$
- $\widehat{SUP} = 30^\circ$



a. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{TSR}$ est 60°

b. Démontrer que les triangles SRT et SUP sont semblables.

c. Déterminer le coefficient de réduction liant les triangles SRT et SUP.

d. Quelle est la nature du triangle SKL ? Justifier.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 141

1 On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[IJ]$ et le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[OI]$.
Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ différent de I et de J. La droite (MI) coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en S et la droite (MO) coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en T. P est le point d'intersection de la droite (IT) et de la droite perpendiculaire à (IJ) passant par M.

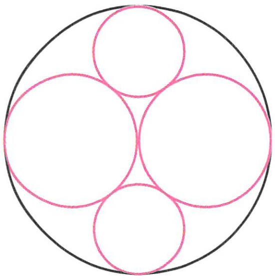
a. Tracer une figure représentant l'énoncé.

b. Démontrer que les points P, O et S sont alignés.

c. Démontrer que le point S est le milieu de $[IM]$.

d. Quelle est la nature du triangle IPM ?

2 Les cercles roses sont tangents deux à deux. Le rayon du plus grand cercle noir est de $4\ cm$.
Calculer le rayon des deux plus petits.



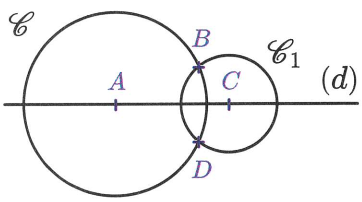
3 $ABCD$ est un carré de côté de longueur c.

a. Calculer la longueur de la diagonale AC.

b. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire les valeurs exactes de $cos(\widehat{BAC})$ et $sin(\widehat{BAC})$.

4 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ sont deux cercles de centres respectifs A et C sécants en B et D. Les points A et C appartiennent à la droite (d).



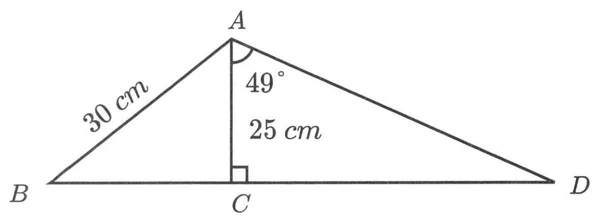
a. Démontrer que la droite (d) est perpendiculaire à la droite (BD).

b. 1) À quelle condition le projeté orthogonal de D sur (d) est-il le milieu de $[AC]$?

2) Quelle est alors la nature du quadrilatère $ABCD$?

5 On considère la figure suivante où les points B, C et D sont alignés.

La figure n'est pas à l'échelle.



a. Calculer la valeur exacte de la distance BC.

b. Calculer la distance BD. Arrondir au centimètre près.

Exercices | **Parcours 3**

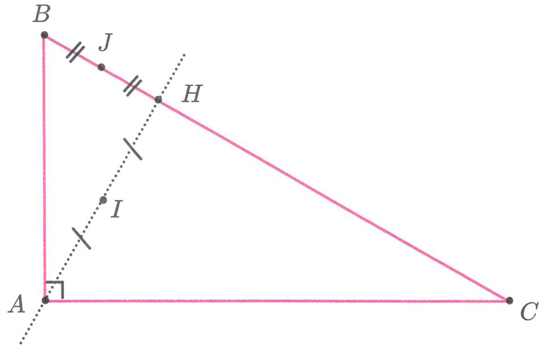
Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **143**

1 Démontrer que les trois médiatrices d'un triangle quelconque ABC sont concourantes.

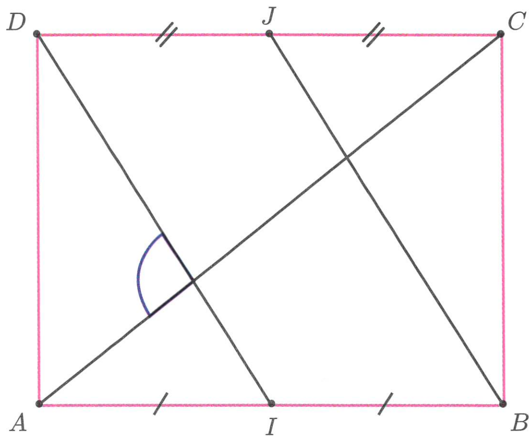
2 On donne :

- un triangle ABC rectangle en A ;
- le point H projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$;
- le point I, le milieu du segment $[AH]$;
- le point J, le milieu du segment $[BH]$.

Démontrer que les droites (CI) et (AJ) sont perpendiculaires.



3 $ABCD$ est un rectangle. Le point I est un milieu du segment $[AB]$, le point J est le milieu du segment $[CD]$.
Déterminer les dimensions du rectangle pour que les droites (AC) et (DI) soient perpendiculaires.



Autoévaluation

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note / 10

Corrigé QCM
Sur Sacado via votre ENT
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 144

Etudier la situation qui suit, puis répondre aux questions 1 à 5.

$[AB]$ est un segment de milieu O tel que $AB = 12\ cm$. Le point C appartient au cercle de centre O passant par A. De plus $AC = 6\ cm$. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 30°.

1 Le triangle ABC est :
- a. ☐ rectangle en C
- b. ☐ isocèle en C
- c. ☐ équilatéral

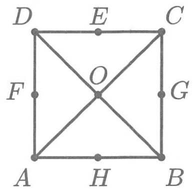
2 Le segment $[BC]$ mesure :
- a. ☐ $6\sqrt{3}\ cm$
- b. ☐ $10\ cm$
- c. ☐ $3\sqrt{6}\ cm$

3 L'angle $\widehat{AOC}$ mesure :
- a. ☐ 45°
- b. ☐ 60°
- c. ☐ 30°

4 L'aire du triangle ABC est :
- a. ☐ $16\sqrt{3}\ cm^2$
- b. ☐ $18\sqrt{3}\ cm^2$
- c. ☐ $18\sqrt{2}\ cm^2$

5 L'angle $\widehat{BOC}$ mesure :
- a. ☐ 30°
- b. ☐ 120°
- c. ☐ 60°

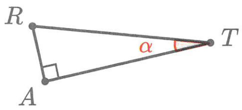
Observer la figure, puis répondre aux questions 6 et 7.



6 O est le projeté orthogonal de :
- a. ☐ E sur (DB)
- b. ☐ E sur (AC)
- c. ☐ D sur (AC)

7 Le point C est le projeté orthogonal de B sur :
- a. ☐ (AC)
- b. ☐ (BC)
- c. ☐ (DC)

Observer la figure, puis répondre aux questions 8 à 10.



8 $\sin(\alpha) =$
- a. ☐ $\dfrac{RA}{AT}$
- b. ☐ $\dfrac{RA}{RT}$
- c. ☐ $\dfrac{AT}{RT}$

9 $tan\ (\alpha) =$
- a. ☐ $\dfrac{RT}{AT}$
- b. ☐ $\dfrac{AR}{AT}$
- c. ☐ $\dfrac{AT}{AR}$

10 Si $\alpha = 15^\circ$ et $AT = 5\ cm$, RT est égal à environ :
- a. ☐ $5{,}17\ cm$
- b. ☐ $19{,}31\ cm$
- c. ☐ $18{,}66\ cm$

Algorithmique, TICE & logique

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : **145**

1 On dit qu'un triangle rectangle est presque isocèle lorsque son hypoténuse est un nombre entier et que les côtés de son angle droit sont des nombres entiers consécutifs.

a. Montrer qu'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4, 5 est un triangle rectangle presque isocèle.

b. Donner un algorithme permettant de déterminer d'autres triangles rectangles presque isocèles.

2 Les trois entiers a, b et c sont les côtés d'un triangle.

a. Compléter la fonction **nature** suivante, afin qu'elle renvoie, selon le cas, les chaînes de caractères : "équilatéral", "rectangle", "isocèle non équilatéral", ou "sans particularité".

```
def nature (a, b, c):
    if ............... :
        return "équilatéral"
    else :
        if .............. or .............. or .............. :
            return "rectangle"
        else :
            if .............. or .............. or .............. :
                return "isocèle non équilatéral"
            else :
                return ............................
```

b. Lucia pense qu'il manque le cas des triangles rectangles-isocèles. Elle écrit donc un programme qui cherche des triangles rectangles-isocèles ayant des côtés entiers, en se limitant aux triangles dont les côtés sont inférieurs à n. Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise cette recherche.

```
def cherche_rectangle_isocele(n) :
    for a ............... : # longueur commune des deux petits côtés
        for b ............... : # longueur du grand côté
            if ............... :
                return a, b
    return False # on rend False si aucun triangle n'a été trouvé
```

c. David pense que le programme de Lucia ne trouvera jamais de triangle rectangle-isocèle.
Démontrer qu'en effet, il n'existe pas de triangle rectangle-isocèle dont tous les côtés sont des entiers.