Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F01V01

1 Donner les distances exactes suivantes :

$d_1 = |3-7| = \dots\dots\dots$

$d_2 = |\pi - \sqrt{18}| = \dots\dots\dots$

$d_3 = \left|\frac{17}{3}+2\right| + \left|\frac{19}{3}-7\right| = \dots\dots\dots$

2 Compléter :

- $|x-5| = 1$ signifie que la distance entre ……… et ……… est de ………
- $|x+1| \leqslant 7$ signifie que la distance entre ……… et ……… est inférieure ou égale à ………
- Le centre de $[-1\,;5]$ est ………

3 Compléter les tableaux suivants.

Valeur absolue	Intervalle	Schéma
	$x \in]-3\,;5[$	-3 -4 1 $+4$ 5
		-7 -10 3 $+10$ 13
$\lvert x+4\rvert \leqslant 3$		

Valeur absolue	Intervalle	Inégalité
$\lvert x+6\rvert < 4$		
	$x \in [3\,;13]$	
		$-7 \leqslant x \leqslant 11$

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 30 min. — F01V02

1 Soit un intervalle $I = [-5\,;17]$. Utiliser la notation de valeur absolue pour décrire l'intervalle I.

2 Utiliser la notation de valeur absolue pour décrire « La distance de x à -2 est inférieure ou égale à 3 ».

3 Citer les entiers relatifs appartenant à l'intervalle obtenu à la question précédente.

4 Traduire par une phrase contenant le mot « distance » les expressions suivantes :

- $|x+5| = 3$
- $|x-1| < 10$
- $|x+2| \geqslant 3$

5 Quels sont les intervalles décrits dans la question précédente ?

6 Compléter par l'un des symboles $\in$ ou $\notin$:

2022 ……… $\mathbb{N}$ 2,01 ……… $\mathbb{Z}$

0,01 ……… $\mathbb{R}^*$ $\frac{1}{3}$ ……… $\mathbb{Q}$

-5 ……… $\mathbb{N}$ 2π ……… $\mathbb{Q}$

$\frac{1}{3}$ ……… $\mathbb{D}$ $\frac{3\pi}{4}$ ……… $\mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……… $\mathbb{R}$

Bloc 3

Difficulté : ●●● — 45 min. — F01V03

I Les intervalles

1 Déterminer l'ensemble I des entiers relatifs inclus dans l'intervalle $\left[-\sqrt{26}\,;\sqrt{3}\right]$.

2 Déterminer l'ensemble J des entiers relatifs inclus dans l'intervalle $\left[-\frac{17}{4}\,;\frac{13}{4}\right]$.

3 Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

4 Soit $G =]-5\,;7]$ et $H = [-2\,;8[$, déterminer :

$G \cap H =$

$G \cup H =$

$G \cap \mathbb{Z}^* =$

$G \cap \mathbb{R}^+ =$

II Pour aller plus loin

1 Déterminer les diviseurs premiers de 10.

2 En déduire que $\frac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

III Encore plus loin

1 Montrer que :

- Si a est multiple de 3, alors a^2 est multiple de 3.
- Si a n'est pas multiple de 3, alors a^2 n'est pas multiple de 3.

2 En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 15 min. — F01V04

1 En utilisant une calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $\sqrt{5}$.

2 Quel est l'objectif de l'algorithme suivant ?

$e \leftarrow 10^{-2}$, $a \leftarrow 2$, $b \leftarrow 3$
Tant que $|b-a| > e$ faire
  $t \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  Si $t^2 < 5$ alors
    $a \leftarrow t$
  Sinon
    $b \leftarrow t$
  Fin Si
Fin tant que
Afficher t

3 Compléter le script suivant de sorte qu'il traduise l'algorithme ci-dessus.

```
def racine():
    e = ...
    a = 2
    b = 3
    while ......... :
        t = ......
        if ...... :
            ......
        else :
            ......
    return ......
```

4 Quelle est la valeur de t, après exécution pour : $e = 10^{-2}$, $a = 2$ et $b = 3$?

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F01V05

PARTIE I

On considère sur une droite graduée deux points A et B d'abscisses respectives -5 et 7.

1 Déterminer l'encadrement des abscisses x des points $M \in [AB]$.

2 Traduire la situation précédente à l'aide d'une valeur absolue.

PARTIE II

On considère une droite graduée ci-dessous sur laquelle on a placé un point M d'abscisse x.

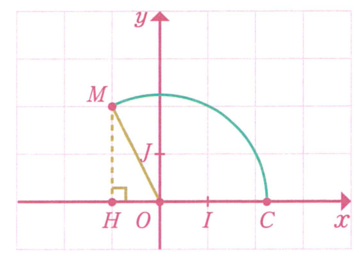
1 Placer sur cet axe les points A, B, C et D d'abscisses respectives -3, $\frac{7}{2}$, -1 et 6.

2 Placer sur cet axe les points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'abscisses respectives $\frac{x}{2}$, $-x$, $\frac{3}{2}x$ et $2x$.

3 Placer sur cet axe les points E, F et G d'abscisses respectives $x-1$, $x+2$ et $-x+1$.

PARTIE III

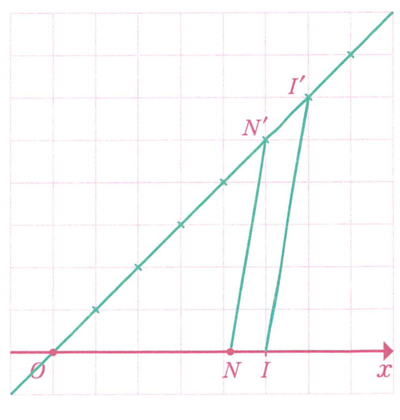
A On considère le schéma ci-dessous $(OI = OJ = 1)$:



1 En utilisant le théorème de Pythagore, justifier que l'abscisse du point C est : $c = \sqrt{5}$.

2 Placer le point D d'abscisse $d = \sqrt{13}$ en s'inspirant de l'exemple précédent.

B Ci-contre, la droite graduée (Ox) d'origine O. Le point I a pour abscisse 1. Les droites (II') et (NN') sont parallèles.



1 Déterminer n, l'abscisse du point N.

2 Construire le point P d'abscisse $p = \frac{3}{8}$.

→ Objectifs visés

Être capable de

- Reconnaître la nature d'un nombre.
- Comprendre les inclusions d'ensemble, à savoir que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Utiliser une droite graduée.
- Faire le lien entre un intervalle et une inégalité.
- Passer d'un algorithme à un script Python.
- Formuler une équivalence par le symbole « $\Leftrightarrow$ » et lire « si et seulement si ».
- Différencier l'usage des symboles $\in$, $\subset$, $\cup$ et $\cap$.
- Utiliser le « raisonnement par l'absurde » pour construire une démonstration.
- Démontrer que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Une valeur absolue est une distance. Elle ne peut donc pas être négative.
- Un nombre noté $-x$ n'est pas forcément négatif.
- Un nombre décimal est forcément rationnel, l'inverse n'est pas toujours vrai.
- Confondre l'union et l'intersection de deux ensembles.

01 Nombres et Intervalles de $\mathbb{R}$

Nombres et calculs

OCTOMAP 2de

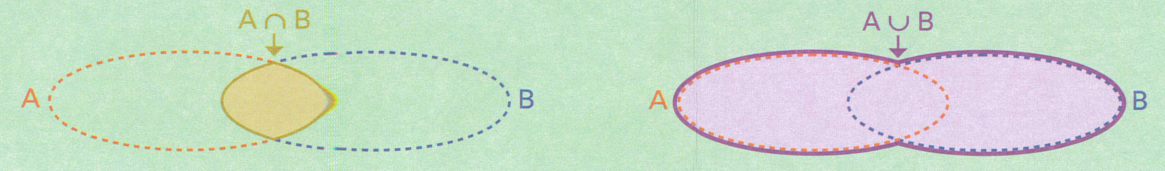
Nombres et Intervalles de $\mathbb{R}$

Le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ se lit « si et seulement si ».

Unions et intersections

F01R04

A et B sont deux ensembles de nombres :
A $\cap$ B (A **inter** B) : ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.
A $\cup$ B (A **union** B) : ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.



$A = \{-3 ; 0 ; 2 ; 6 ; 7 ; 10 ; 18\}$ $B = \{0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 15 ; 18\}$

Compléter : $A \cap B = \{\ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots\}$

$A \cup B = \{\ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots ; \ldots\ldots\}$

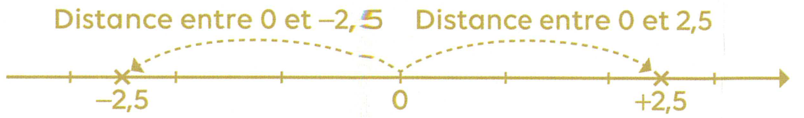
$\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs donc $\mathbb{R}^+ = [0 ; \ldots\ldots[$

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privés de 0 donc $\mathbb{R}^* =]-\infty ; \ldots\ldots[\cup]\ldots\ldots ; +\infty[$

Valeur absolue

F01R03

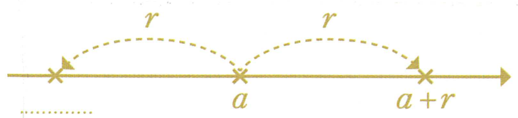
Pour $x \in \mathbb{R}$, la **valeur absolue de x**, notée $|x|$, est la **distance entre x et 0**.



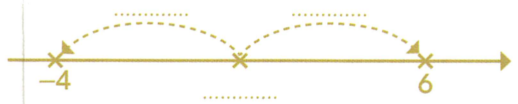
$|\ldots\ldots 2{,}5| = |+2{,}5| = \ldots\ldots$

$a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$

$x \in [a-r ; a+r]$ si et seulement si $|x-a| \leqslant r$



$x \in [-4 ; 6]$ si et seulement si $|x - \ldots\ldots| \leqslant \ldots\ldots$



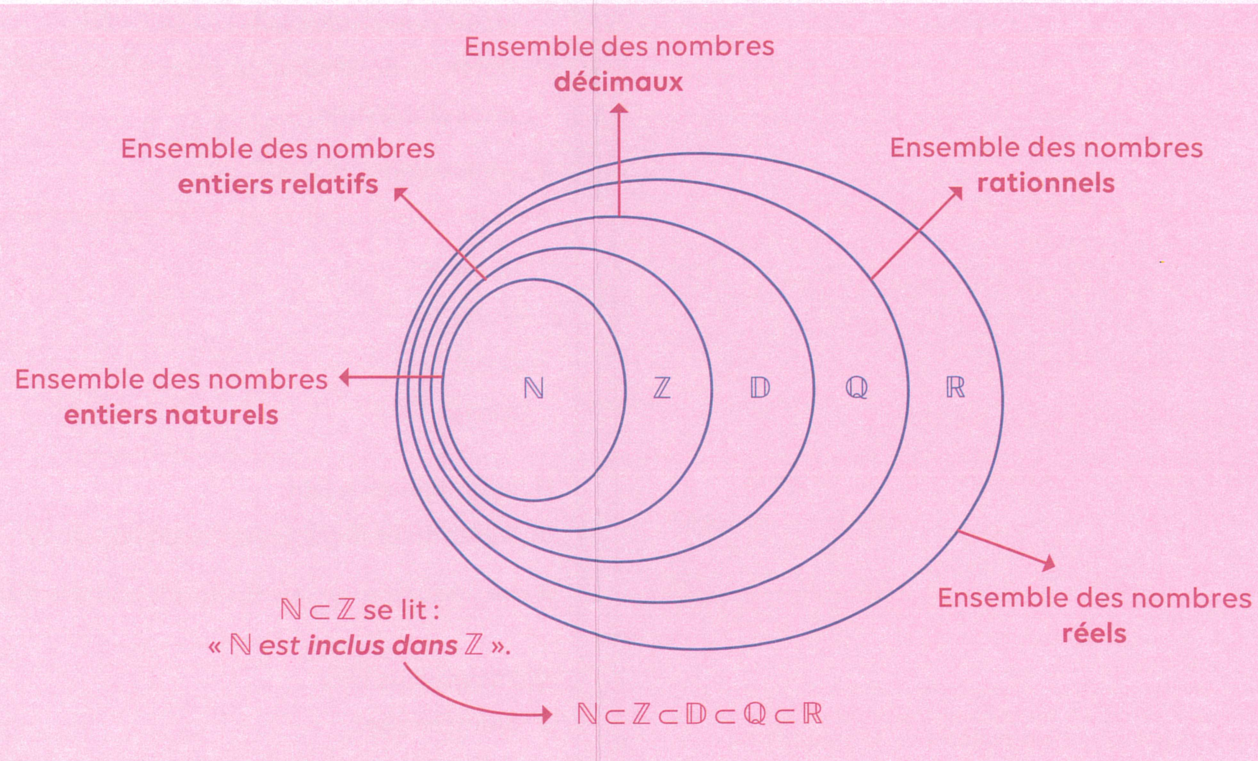
Intervalles

F01R02

$x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Compléter :

Description	Intervalle	Encadrement	Schéma
fermé en a et b	$[a ; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	a b
ouvert en a et b	$]a ; b[$	$a < x \ldots\ldots b$	
fermé en a, ouvert en b	$[a ; b \ldots\ldots$	$a \leqslant x < b$	a b
ouvert en a, fermé en b	$\ldots\ldots a ; b \ldots\ldots$	$a \ldots\ldots x \ldots\ldots b$	
fermé en a, plus l'infini	$\ldots\ldots a ; +\infty[$	$x \ldots\ldots a$	a $+\infty$
ouvert en a, plus l'infini	$\ldots\ldots a ; +\infty \ldots\ldots$	$x \ldots\ldots a$	
moins l'infini, ouvert en b	$]-\infty ; b \ldots\ldots$	$x \ldots\ldots b$	
moins l'infini, fermé en b	$]-\infty ; b \ldots\ldots$	$x \ldots\ldots b$	

Ensembles de nombres



Donner le plus petit ensemble $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ contenant chacun des ensembles proposés.

$A = \{2 ; -1 ; -2 ; -3 ; -80 ; -945\}$ $A \subset \ldots\ldots$

$B = \{-\pi ; -\sqrt{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{3} ; -80 ; 2{,}51 ; -\frac{1}{3}\}$ $B \subset \ldots\ldots$

$C = \{2{,}51 ; \frac{359}{10^3} ; -3 ; 27\}$ $C \subset \ldots\ldots$

$D = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 27 ; 543\}$ $D \subset \ldots\ldots$

$E = \{-\frac{1}{3} ; -\frac{2}{10} ; 2 ; \frac{58}{11} ; 1{,}333\ldots\}$ $E \subset \ldots\ldots$

d est un ***nombre décimal*** ($d \in \mathbb{D}$) $\Leftrightarrow$ il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $d = \frac{a}{10^n}$

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est **pas décimal** $\left(\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}\right)$ démonstration

q est un ***nombre rationnel*** $\Leftrightarrow$ il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q = \frac{a}{b}$

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est **pas rationnel** ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) démonstration

a est un ***nombre pair*** $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ et tel que $a = 2k$

a est un ***nombre impair*** $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ et tel que $a = 2k + 1$

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair. démonstration

F01R01

Bloc 1

Difficulté : ●○○ 30 min.

F02V01

1 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible : $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \ldots\ldots$

2 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers :

$(2^2)^3 \times 6^4 = \ldots\ldots$

$\frac{12 \times 14^2}{21^3} = \ldots\ldots$

3 Écrire sous la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$:

$5\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = \ldots\ldots$

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \ldots\ldots$

4 Écrire sous la forme scientifique :

$0{,}00099 = \ldots\ldots$ $\quad 2022 \times 10^{-2} = \ldots\ldots$

$2007 \times 10^4 = \ldots\ldots$ $\quad 0{,}2 \times 10^2 \times 0{,}2 = \ldots\ldots$

5 Relations entre 32 et 72

- L'ensemble des diviseurs de 32 est : $D_{32} = \{\ldots\ldots\}$
- L'ensemble des diviseurs de 72 est : $D_{72} = \{\ldots\ldots\}$
- $PGCD(32\,;72) = \ldots\ldots$
- La fraction irréductible égale à $\frac{32}{72}$ est : ……
- Le dénominateur commun de $\frac{10}{32}$ et $\frac{1}{72}$ est : ……

Bloc 2

Difficulté : ●●● 45 min.

F02V02

I Fractions et ensembles de nombres

1 Calculer A et B :

$$A = \frac{\frac{5}{3} - \frac{7}{2}}{\frac{11}{12}} \qquad B = \frac{-2^5 \times (-3)^4 \times 7^2}{14^3 \times 24^2}$$

2 Cocher les bonnes réponses :

☐ $A \in \mathbb{N}$ ☐ $A \in \mathbb{Z}$ ☐ $A \in \mathbb{D}$ ☐ $A \in \mathbb{Q}$ ☐ $A \in \mathbb{R}$

☐ $B \in \mathbb{N}$ ☐ $B \in \mathbb{Z}$ ☐ $B \in \mathbb{D}$ ☐ $B \in \mathbb{Q}$ ☐ $B \in \mathbb{R}$

II Nombres premiers et fractions irréductibles

1 Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres $a = 80$ et $b = 250$.

2 En déduire la fraction irréductible $\frac{a}{b}$.

III Nombres premiers et fractions irréductibles

Soient x et y deux réels strictement positifs.

On considère les nombres :

$$A = \frac{x+y}{2} \qquad G = \sqrt{xy} \qquad \text{et} \qquad H = \frac{2xy}{x+y}$$

1 Calculer et comparer A, G et H pour : $x = \sqrt{3}$ et $y = 5\sqrt{3}$

2 Calculer et comparer A, G et H pour : $x = 3^2$ et $y = \frac{3^4}{2^2}$

Bloc 3

Difficulté : ●●○ 30 min.

F02V03

I La vitesse de la lumière est d'environ 3×10^5 km.s^{-1}. La distance du Soleil à la Terre est d'environ 15×10^7 km.

Combien de temps la lumière met-elle pour parcourir la distance du Soleil à la Terre ?

II Écrire sous la forme $a + b\sqrt{5}$:

$$A = (2\sqrt{5})^3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4$$

$$B = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$$

$$C = (3\sqrt{5} + 2)(2\sqrt{5} + 3)$$

$$D = \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$$

III Déterminer l'entier n tel que, quand on lui ajoute les trois entiers qui lui succèdent, on obtient un total de 286.

IV Pour aller plus loin

1 Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre $N = 210$.

2 Déterminer un entier n tel que : $N = n(n+1)$.

Bloc 4

Difficulté : ●○○ 30 min.

F02V04

Pour déterminer le reste r et le quotient q d'une division euclidienne d'un entier naturel a par un autre entier naturel non nul b, on utilise l'algorithme suivant :

$r = 0$
$q = 0$
Tant que $b \leqslant a$
  $a = a - b$
  $q = q + 1$
Fin tant que
$r = a$
Afficher q , r

1 En utilisant l'algorithme, compléter le script Python ci-contre.

```
def div(a,b):
    r = ......
    q = ......
    while b<= ......... :
        a = ......
        q = ......
    ......
    return ......
```

2 Saisir le script sur la calculatrice avec $a = 1037$ et $b = 13$.

Donner les résultats $q = \ldots\ldots$ et $r = \ldots\ldots$

3 Compléter alors l'égalité suivante :

$1037 = \ldots\ldots \times 13 + \ldots\ldots$

Bloc 5

Difficulté : ●●○ 60 min.

F02V05

Soient les nombres $a = 108$, $b = 135$ et $c = 180$.

PARTIE I

1 Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a, b et c.

2 Déterminer l'ensemble des diviseurs de chacun de ces nombres.

3 En déduire le plus grand commun diviseur de :

- a et b
- a et c
- b et c
- a, b et c

4 Déterminer le plus petit commun multiple de :

- a et b
- a et c

PARTIE II

1 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers $m = a \times b$.

2 En déduire que $\frac{m}{c}$ est un entier naturel.

3 Simplifier chacun des nombres suivants :

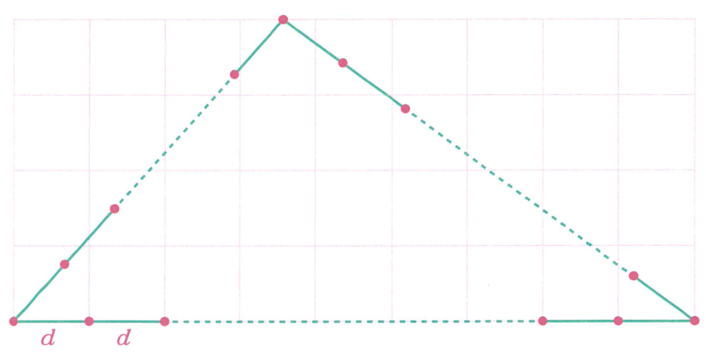
$A = \sqrt{a}$

$B = \sqrt{c}$

$C = \sqrt{a \cdot b}$

PARTIE III

Un agriculteur dispose d'un champ triangulaire de dimensions 108 m, 135 m et 180 m. Il a placé des poteaux régulièrement espacés d'une distance $d \in \mathbb{N}$ telle que $2 \leqslant d \leqslant 5$. De plus, il veut un poteau à chaque coin.



1 Déterminer la distance d.

2 Calculer le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.

3 Le mètre linéaire de grillage vaut 34,51 € et les poteaux sont au prix unitaire de 6,14 €. Calculer le prix de revient des matériaux nécessaires à la réalisation de la clôture.

4 Un artisan propose à l'agriculteur de lui poser son grillage en 40 heures à 60 €/h. En contrepartie, il lui fait une remise de 12 % sur le matériel. Calculer à combien lui revient cette clôture.

2de

OCTOMAP

Nombres et calculs

Calcul numérique

02

→ Objectifs visés

Être capable de

- ↗ Maîtriser les règles de calcul des fractions, des puissances et des racines carrées.
- ↗ Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un nombre donné.
- ↗ Déterminer un PGCD et l'appliquer pour obtenir une fraction irréductible.
- ↗ Comparer deux nombres donnés.
- ↗ Modéliser une situation par une relation algébrique.
- ↗ Démonter que, pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.
- ↗ Démontrer que, quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- ↗ Démontrer que, si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- ↗ 1 n'est pas un nombre premier car il n'a pas exactement deux diviseurs distincts.
- ↗ 2 est le seul nombre premier pair.

Calcul numérique

Racine carrée

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, la **racine carrée de** a est le nombre **positif** dont le carré vaut a.
On le note $\sqrt{a}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$: $(\sqrt{a})^2 = a$

La racine carrée de 9 est .... car .... = ... On la note ....

La racine carrée de 121 est .... car .... = ... On la note ....

Pour tous réels positifs a et b :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

démonstration

Pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

démonstration

Pour tous réels positifs a et b :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{avec} \quad b \neq 0$$

Simplifier :

$(\sqrt{54})^2 =$ ....

$\sqrt{20} =$ ....

$\sqrt{\frac{9}{25}} =$ ....

F02R04

Fractions

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$,

$c \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$$

$$k \times \frac{a}{c} = \frac{ka}{c}$$

$$\frac{a}{m} \times \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{c}{n}} = \frac{a}{m} \times \frac{n}{c}$$

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$\frac{39}{74} - \frac{18}{74} =$ ....

$2 \times \frac{9}{5} =$ ....

$\frac{2}{3} \times \frac{11}{13} =$ ....

$\frac{4}{5} + \frac{7}{6} =$ ....

$\frac{\frac{3}{11}}{\frac{7}{10}} =$ ....

F02R01

Multiples d'un nombre

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$

b est un **multiple** de a $\longrightarrow$ $b = k\,a$ $\longleftarrow$ a est un **diviseur** de b

La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

démonstration

$p \in \mathbb{N}$ est un **nombre premier** $\Leftrightarrow$ p admet exactement **deux diviseurs** : 1 et lui-même.

F02R03

Puissances

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$, $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{avec } a \neq 0$$

Par convention : $a^0 = 1$ et $0^n = 0$

Écriture scientifique :

$$a \times 10^{n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Avec $-10 < a \leqslant -1$ ou $1 \leqslant a < 10$, $(a \in \mathbb{D})$

Écrire sous la forme scientifique :

0,0000000185 = ...

0,00098 = ...

6315,07 = ...

25471 = ...

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exprimer sous forme d'un entier relatif ou d'une fraction :

$2^4 =$ .... $(-2)^4 =$ .... $-2^4 =$ ....

$5^{-3} =$ .... $6^{-2} =$ .... $(-6)^{-2} =$ ....

Écrire sous la forme d'une puissance a^n :

$3^9 \times 3^{-11} =$ .... $\frac{5^7}{5^4} =$ .... $\frac{3^5}{3} =$ ....

$(9^5)^2 =$ .... $2{,}5^3 \times 4^3 =$ .... $\frac{18^4}{5^4} =$ ....

F02R02

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min.

F03V01

Développer et réduire les expressions suivantes et préciser le degré de chacune d'elles :

$A(x)=3x(x-2)+x^2+7x-16$

$B(x)=5x-(x+2)^2+x(x+3)$

$C(t)=t^2-9+(t-1)^2$

$D(x)=x^2-4+2x(x+4)^2$

Bloc 2

Difficulté : ●●● — 45 min.

F03V02

I Factoriser les expressions algébriques suivantes :

1 $A(x)=3x^2-5x$

2 $B(x)=(x+1)^2-2(x+3)(x+1)$

3 $C(x)=8(x-1)+(x-1)(x+2)$

4 $D(t)=4t^2-25$

5 $E(u)=(u+1)^2-(2u+3)^2$

6 $F(x)=x^2-6x+9$

7 $G(y)=4y^2+4y+1$

8 $H(t)=5t^2-2\sqrt{5}t+1$

9 $K(x)=(x-1)^2-9x^2$

10 a $L(x)=x^2-4$

b $M(x)=x^2-4x+4$

c $N(x)=x^2-4+2(x^2-4x+4)$

II Indiquer la forme développée des expressions suivantes, en cochant la bonne réponse :

$A(x)=(3x-1)^2$

☐ $A(x)=3x^2+6x+1$ ☐ $A(x)=9x^2-6x+1$

☐ $A(x)=3x-6x+1$ ☐ $A(x)=9x^2-3x+1$

$B(x)=\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)$

☐ $B(x)=x^2-4$ ☐ $B(x)=x^2+4$

☐ $B(x)=x^2-8$ ☐ $B(x)=x^2+8$

Bloc 3

Difficulté : ●○○ — 30 min.

F03V03

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre x.
- L'augmenter de 1.
- Élever le résultat au carré.
- Diminuer le résultat de 9.

1 Donner le résultat obtenu pour $x=-3$.

2 Donner l'expression algébrique de $A(x)$ générée par ce programme de calcul. Quel est son degré ?

3 Montrer qu'en factorisant $A(x)$, on obtient : $A(x)=(x-2)(x+4)$

4 Développer $A(x)$.

5 Parmi les trois formes précédentes, choisir celle qui convient le mieux pour évaluer l'expression $A(x)$, lorsque :

- $x=-1$
- $x=\sqrt{3}$
- $x=2$

6 Pour chacune des équations suivantes, utiliser l'expression la plus appropriée pour les résoudre :

- $A(x)=0$
- $A(x)=-8$
- $A(x)=-9$
- $A(x)=3(x-2)$

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 15 min.

F03V04

On considère le script Python suivant :

```
def test(x):
    e1=2*(x-1)**2-8
    e2=x**2-x-6
    if e1==e2:
        return True
    else:
        return False
```

1 Quelle est l'expression de $e1$?

☐ $e1=2(x-1)\times 2-8$ ☐ $e1=2(x-1)^2-8$

2 Que renvoient `test(0)` et `test(3)` ?

3 Marie-Jeanne affirme que pour tout réel x : $2(x-1)^2-8=x^2-x-6$. A-t-elle raison ? Justifier.

4 Quel test aurait suffi pour donner la bonne réponse ?

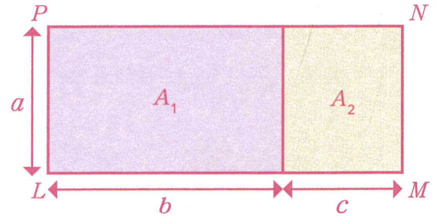
Bloc 5

Difficulté : ●○○ — 30 min.

F03V05

PARTIE I

Soit le rectangle $LMNP$.



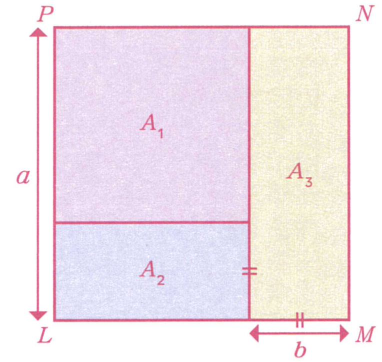
1 Exprimer A_1 en fonction de a et de b.
Exprimer A_2 en fonction de a et de c.

2 En notant A_3 l'aire de $LMNP$, justifier alors que $a(b+c)=ab+ac$.

3 En déduire sans calculatrice 7×24 et 16×99.

PARTIE II

Soit le carré $LMNP$ de côté a.



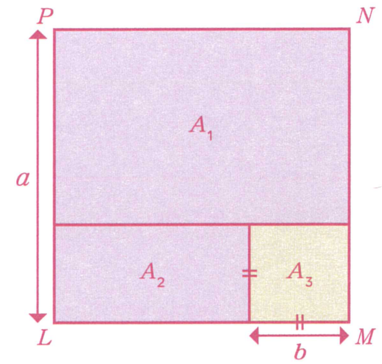
1 Exprimer l'aire A_1 en fonction de a et de b.

2 À l'aide de l'illustration géométrique, montrer que : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

3 En déduire, sans la calculatrice, la valeur de 399^2.

PARTIE III

Soit le carré $LMNP$ de côté a.



1 Exprimer les aires des rectangles A_1 et A_2 en fonction de a et de b. Donner chaque expression sous la forme factorisée.

2 Montrer que : $A_1+A_2=(a-b)(a+b)$.

3 À l'aide de l'illustration géométrique, montrer que : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

4 Sans calculatrice, calculer :

a 42×38.

b 95×105.

5 Soit l'expression $f(x)=4x^2-12x+9-(x+2)^2$.

a En utilisant la partie II, factoriser $4x^2-12x+9$.

b En déduire, à l'aide de la partie III, la factorisation de l'expression $f(x)$.

2de

OCTOMAP

Expressions algébriques

Nombres et calculs

03

→ Objectifs visés

Être capable de

- ↗ Savoir appliquer les identités remarquables apprises par cœur.
- ↗ Développer ou factoriser une expression algébrique.
- ↗ Choisir la forme adaptée d'une expression algébrique pour résoudre un problème.
- ↗ Traduire une expression algébrique en écriture de code python, et réciproquement.
- ↗ Utiliser une illustration géométrique pour démontrer une identité remarquable.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- ↗ Ne pas respecter les priorités des opérations.
- ↗ Négliger les parenthèses.
- ↗ Confondre factorisation et développement.
- ↗ Confondre les identités remarquables.
- ↗ Ne pas appliquer la règle des signes en développant une expression algébrique.

Expressions algébriques

Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels.

Développement

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

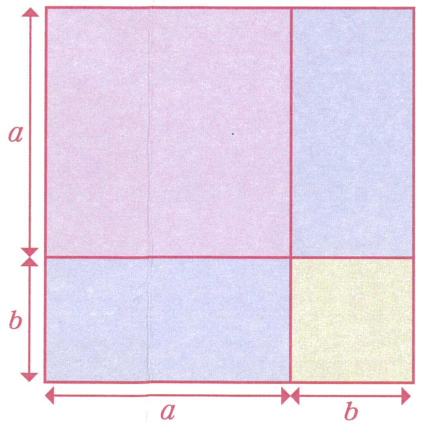
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Factorisation

À l'aide de l'illustration géométrique, montrer que pour tous nombres réels positifs a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



démonstration

....

....

....

....

....

....

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

$L = (x-5)^2$

$L = \dots\dots$

$L = \dots\dots$

$M = (5x+2)^2$

$M = \dots\dots$

$M = \dots\dots$

$N = (2x-1)(2x+1)$

$N = \dots\dots$

$N = \dots\dots$

$P = \left(3x - \sqrt{2}\right)^2$

$P = \dots\dots$

$P = \dots\dots$

Factoriser en utilisant les identités remarquables :

$Q = 16x^2 + 24x + 9^2$

$Q = \dots\dots$

$Q = \dots\dots$

$R = x^2 - 14x + 49$

$R = \dots\dots$

$R = \dots\dots$

$S = 36x^2 - 25$

$S = \dots\dots$

$S = \dots\dots$

$T = (5x-1)^2 - (x+3)^2$

$T = \dots\dots$

$T = \dots\dots$

$V = 9 - (x-3)^2$

$V = \dots\dots$

$V = \dots\dots$

$W = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

$W = \dots\dots$

$W = \dots\dots$

F03R03

Généralités

Le **degré** d'une expression algébrique est indiqué par l'**exposant le plus élevé**.

degré 2

$5x^2 + 3x - 8$

Inconnue : x

$A = 7t^3 - 5t^2 + \frac{1}{2}t - 9$ est une expression algébrique de variable .... et de degré ....

Réduire, si possible :

$B = 5x^2 - 3x + x^2 = \dots\dots$

$C = 3x - 2y + y^2 = \dots\dots$

$D = 10x^2 - 5t^2 + 4t - x^2 = \dots\dots$

$E = 2x^2 + 2x + 2 = \dots\dots$

F03R01

Développer / Factoriser

Soient les nombres réels a, b, c et d.

$c(a+b) = ca + cb$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Développer

somme de termes

$12\,(x+y) = 12x + 12y$

produit de facteurs

Factoriser

Développer et réduire :

$F = 3(2x-1) - 4x\,(1+x)$

$F = \dots\dots$

$F = \dots\dots$

$G = (3-x)(2x+5)$

$G = \dots\dots$

$G = \dots\dots$

Factoriser :

$H = 4(x-3) - (2x-1)(x-3)$

$H = \dots\dots$

$H = \dots\dots$

$I = (2-x)^2 - (2-x)(5x+1)$

$I = \dots\dots$

$I = \dots\dots$

Réduire au même dénominateur :

$J = \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{5}{2-x}$ avec $x \neq 2$ et $x \neq 3$

$J = \dots\dots$

$J = \dots\dots$

$K = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} \times \dfrac{2x}{\sqrt{x}+1}$ avec $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$K = \dots\dots$

$K = \dots\dots$

F03R02

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F04V01

I Parmi un lot de 185 pièces, 5 pièces sont défectueuses. La proportion de pièces non défectueuses est de ....

II On note le coefficient multiplicateur CM. Compléter les phrases suivantes :

1 Si CM > 1, alors on a ....

Si CM < 1, alors on a ....

2 Pour une augmentation de 23 %, CM = ...

3 Pour une diminution de 38 %, CM = ...

4 Pour une augmentation de 20 % suivie d'une diminution de 20 %, CM = ...

5 Pour une augmentation de 20 % suivie d'une diminution de 30 %, CM = ...

6 Après une augmentation de 25 %, pour revenir à la valeur initiale, on doit effectuer une diminution de ....

III Après une hausse de 20 %, un produit coûte 12 €. Combien coûtait-il avant cette hausse ?

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F04V02

I Dans un lycée, 27 des 36 élèves de 2de A pensent suivre la spécialité mathématiques en 1re.
70 % des élèves de 2de B pensent faire spé maths.
Paul affirme qu'en regroupant les deux classes, 72,5 % des élèves pensent faire spé maths.
Zoé, quant à elle, dit qu'on ne peut pas le savoir précisément. Qui a raison ? Justifier.

II La population de la Suisse est passée de 7,8 millions à 8,7 millions d'habitants entre 2011 et 2021. Sur la même période, la population française est passée de 65,3 à 67,5 millions d'habitants.
Paul affirme que la population a plus augmenté en Suisse qu'en France entre 2011 et 2021 alors que Zoé répond que c'est le contraire.
Qui a raison ? Justifier.

III On dispose d'une pièce métallique rectangulaire. On augmente de 10 % sa longueur et de 15 % sa largeur.
De combien augmente l'aire de cette pièce métallique ?

IV On augmente de 10 % le prix d'un produit. Calculer le pourcentage de réduction à appliquer au nouveau prix pour retrouver le prix initial.

Bloc 3

Difficulté : ●●○ — 30 min. — F04V03

Pour la série générale, 92 % des élèves du lycée B ont réussi l'examen contre 95 % de ceux du lycée A.

effectifs	Lycée A			Lycée B		
	Reçus	Collés	Total	Reçus	Collés	Total
Général						300
Techno	124		155	39		50
Total						

1 Déterminer la proportion d'élèves du lycée A qui a réussi le bac technologique.

2 Déterminer la proportion d'élèves du lycée B qui a réussi le bac technologique.

3 En comparant les taux de réussite des lycées A et B, pourriez-vous dire si l'on réussit mieux dans le lycée A ou dans le lycée B ?

4 Sachant qu'il y a 255 élèves dans le lycée A, compléter le tableau.

5 **a** Calculer pour chaque lycée la proportion d'élèves ayant réussi le bac pour les deux séries.

b Comparer le taux de réussite des deux lycées.

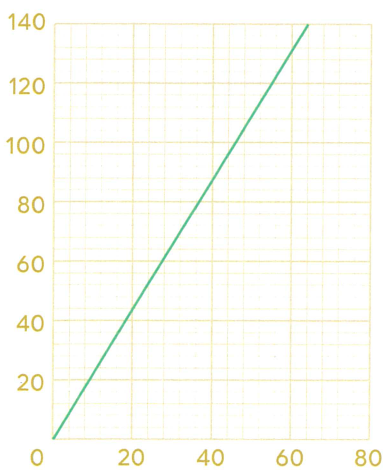
c Est-ce cohérent avec la question n° 3 ?

Bloc 4

Difficulté : ●○○ — 10 min. — F04V04

Associer les évolutions suivantes (exprimées en pourcentage par rapport à la valeur initiale) avec les supports proposés (courbe représentative de fonction, expression d'une fonction, extrait de tableur, fonction Python) :

Évolution a : hausse de 15 %
Évolution b : baisse de 5 %
Évolution c : hausse de 110 %
Évolution d : baisse de 23 %



$f(x) = 0{,}95x$

	A	B
1	valeur initiale	valeur après évolution
2	25	28,75
3	32	=A3*1,15
4	35	
5	48	

```python
def hausse(qi):

    return 0.77*qi
```

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F04V05

PARTIE I

Le Mathosaure, un animal très intelligent menacé de disparition, voit sa population diminuer chaque année. Le tableau ci-dessous donne le nombre de Mathosaures sur 4 ans :

Année	2019	2020	2021	2022
Population	423 470	415 015	406 690	398 542

1 Expliquer pourquoi on peut modéliser cette évolution par une baisse de 2 % par an.

2 Quelle est l'évolution entre 2019 et 2022 ?

3 Si l'évolution se poursuit de la sorte, quelle sera la population des Mathosaures en 2025 ? En 2050 ? En 2100 ?

4 La population des Mathosaures sera considérée en voie de disparition lorsque celle-ci sera inférieure à 100 000 individus. Selon ce modèle, à partir de quelle année ce phénomène sera-t-il effectif ?

5 Quelle hausse (exprimée en pourcentage) faudrait-il appliquer sur la population de 2022 pour retrouver la population de 2019 ?

6 Si des mesures de protection sont prises, on peut estimer que la population augmentera de 5 % par an à partir de 2025. En quelle année retrouvera-t-on une population comparable à celle de 2019 ?

PARTIE II

On définit la fonction Python pop(n) afin qu'elle renvoie la population des Mathosaures (modélisée par une baisse de 2 % par an après n années).

1 Compléter cette fonction afin qu'elle agisse comme attendu :

```python
def pop(n):
    p = 423470
    for i in range(n):
        p = p * ...
    return p
```

La population des Mathosaures sera en réel danger si elle passe sous le seuil de 300 000 individus.

2 Compléter la fonction seuil(S) ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre d'années à partir duquel la population passe sous le seuil S.

```python
def seuil(S):
    p , n = 423470 , 0
    while p ... S:
        p = p * ...
        n = ...
    return n
```

3 Saisir le script sur votre calculatrice. Dire en quelle année la population des Mathosaures sera en réel danger.

2de

Statistiques et Probabilités

Proportions et évolutions

04

→ Objectifs visés

Être capable de

- Déterminer un coefficient multiplicateur :
  - dans le cas d'une augmentation de p % ;
  - dans le cas d'une diminution de p %.
- Faire le lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution.
- Savoir utiliser la relation : $V_{finale} = CM \times V_{initiale}$
- Déterminer un coefficient multiplicateur global dans le cas d'évolutions successives.
- Déterminer le taux d'évolution qui permet de revenir à l'état initial.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Considérer qu'une augmentation de p % est compensée par une baisse de p %.
- Confondre le coefficient multiplicateur avec le taux d'évolution.
- Confondre le taux d'évolution et le pourcentage d'augmentation (ou de diminution).

Proportions et évolutions

Évolution réciproque

Le prix d'un objet subit une augmentation de 25 %.

Quelle diminution doit subir le nouveau prix pour revenir au prix initial ?

Augmenter de 25 % revient à multiplier par CM = ...

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est donc

CM′ = ...

Le prix de l'objet doit subir une baisse de .... %.

$$V_i \xrightarrow{\times \text{CM}} V_f \qquad V_f \xrightarrow{\times \frac{1}{\text{CM}}} V_i$$

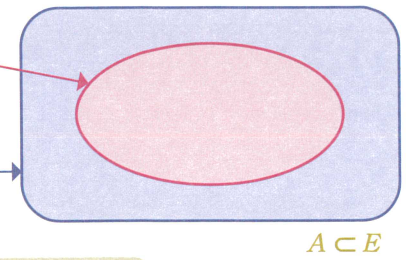
F04R06

Proportions

Proportion de A dans E : $p = \dfrac{n}{N}$ $\quad 0 \leqslant p \leqslant 1$

Sous population A (n éléments)

Population E (N éléments)



Une proportion peut être exprimée en pourcentage avec $0\ \% \leqslant p \leqslant 100\ \%$.

Dans une classe de 30 élèves, on dénombre 12 filles. La proportion p de filles dans la classe est

$p = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots\dots$ %.

En France, sur 67 millions d'habitants, 43 % sont du groupe sanguin O.

Le nombre d'habitants du groupe O en France est n_0 = ... = ... millions.

(Source : Institut National de Transfusion Sanguine.)

Une betterave contient 16 grammes de sucre, ce qui représente 12 % de sa masse. Calculer la masse M de cette betterave.

F04R01

Évolutions successives

$$V_i \xrightarrow{\times \text{CM}_1} V_{\text{interm.}} \xrightarrow{\times \text{CM}_2} V_f$$

$$V_i \xrightarrow{\times \text{CM} = \text{CM}_1 \times \text{CM}_2} V_f$$

Le prix initial d'un article est de 38 €.

Il subit une baisse de 30 % puis une hausse de 20 %.

Calculer son prix final.

CM_1 = ... $\quad \text{CM}_2$ = ... $\Rightarrow \text{CM}_{\text{global}}$ = ...

Le prix final de l'article est donc de .... €.

Le taux d'évolution est de .... %.

Finalement, le prix de l'article a subi une .... de .... %.

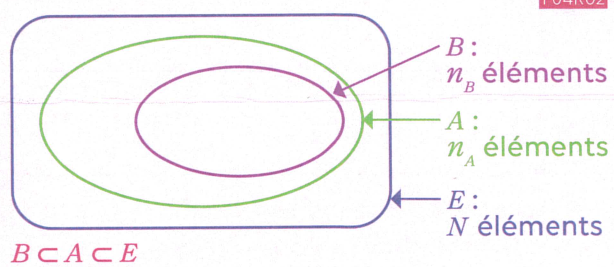
F04R05

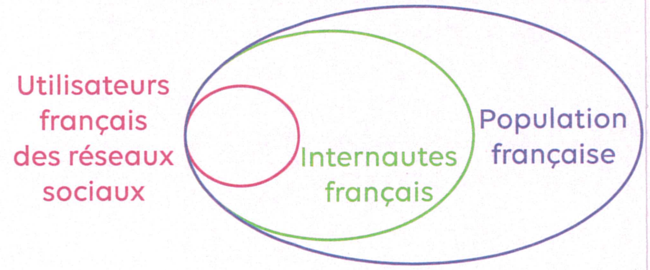
Proportions de proportions

Proportion de A dans E : $p_1 = \dfrac{n_A}{N}$

Proportion de B dans A : $p_2 = \dfrac{n_B}{n_A}$

Proportion de B dans E : $p = p_1 \times p_2 = \dfrac{n_B}{N}$





En 2021, sur 67,5 millions d'habitants, la France comptait 79,7 % d'internautes dont 73,5 % utilisaient régulièrement les réseaux sociaux. Quelle était la proportion d'utilisateurs des réseaux sociaux dans la population française ?

(Source : Ministère de l'économie et des finances.)

F04R02

Coefficient multiplicateur

Pourcentage	→ Taux d'évolution	→ Coefficient multiplicateur	
augmentation de p %	$t = +p$	$\text{CM} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$	$\text{CM} > 1$
diminution de p %	$t = -p$		$0 < \text{CM} < 1$

$$V_i \xrightarrow{\times \text{CM}} V_f \qquad V_f = \text{CM} \times V_i$$

Pendant les soldes, un article ayant un prix initial de 26 € est proposé avec une réduction de 10 %.

Le taux d'évolution est t = ... %.

Le coefficient multiplicateur est CM = ...

Le prix final après réduction est égal à .... €.

F04R04

Taux d'évolution

En 2020, le chiffre d'affaires du e-commerce en France dépassait les 103 milliards d'euros. En 2018, il était de 80 milliards d'euros.

(Source : Fédération du e-commerce et de la vente à distance.)

Variation absolue = ... − .... = ... milliards d'euros.

Variation relative = $\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$ ≈ .... milliards d'euros.

Taux d'évolution t = ... %.

F04R03

V_i Valeur initiale → V_f Valeur finale

Variation **absolue** de V : $\Delta V = V_f - V_i$

Variation relative de V : $\dfrac{\Delta V}{V_i} = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$

Taux d'évolution de V : $t = \dfrac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min.

F05V01

1 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par l'expression $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

- L'image de -1 par la fonction f est ....
- L'image de .... par la fonction f est 2.
- L'antécédent de 0 est ....
- $f\left(\sqrt{2}\right)=$ ....

2 g est définie par $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

- $g(-1)=$ ....
- 1 et .... ont la même image par g.

3 Soit une fonction f représentée ci-dessous. Déterminer graphiquement :

$f(-3)=$ ....

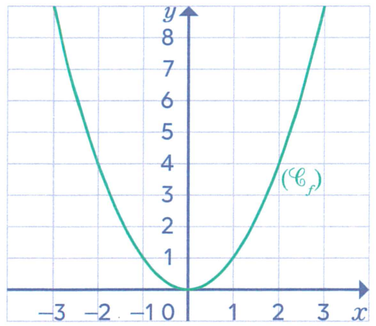
$f(3)=$ ....

$f($........$)=4$

et $f($........$)=4$

Peut-on avoir un antécédent x tel que $f(x)<0$?

☐ Oui ☐ Non



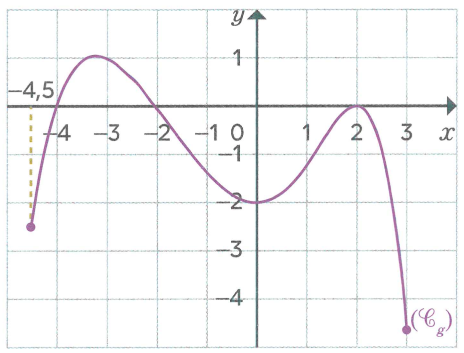
4 On considère $h : x \mapsto h(x)=x^2+3x-4 ; x\in\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel k, le nombre k^2+3k-4 est .... de k par la fonction h.

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 15 min.

F05V02

La représentation graphique d'une fonction g est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement :

1 L'ensemble de définition de g.

....

2 L'image éventuelle de : -3 ; 0 ; 2 et 5.

....

....

3 Les éventuels antécédents des nombres : -4, -2 et 2.

....

....

4 L'ensemble des solutions de l'équation $g(x)=0$.

....

5 L'ensemble des solutions de l'équation $g(x)=1{,}5$.

....

Bloc 3

Difficulté : ●●○ — 30 min.

F05V03

On considère le programme de calcul suivant :

- On choisit un nombre.
- On l'augmente de 1.
- On élève le résultat au carré.
- On soustrait 4 du résultat.

1 On choisit 3. Que renvoie le programme de calcul ?

2 On choisit un nombre réel x. Donner l'expression algébrique de la fonction f qui associe à x le résultat obtenu avec ce programme.

3 Montrer que $f(x)=(x-1)(x+3)$.

4 Montrer que $f(x)=x^2+2x-3$.

5 Calculer les images de : -4 ; $\dfrac{2}{3}$ et $\sqrt{5}$.

6 En choisissant une des trois expressions de $f(x)$, déterminer :

a le ou les antécédents de -4.

b le ou les antécédents de -3.

c le ou les antécédents de 0.

7 Donner une interprétation graphique à la question 6.c.

8 Corriger l'erreur dans le script Python suivant de sorte qu'il renvoie les résultats du programme.

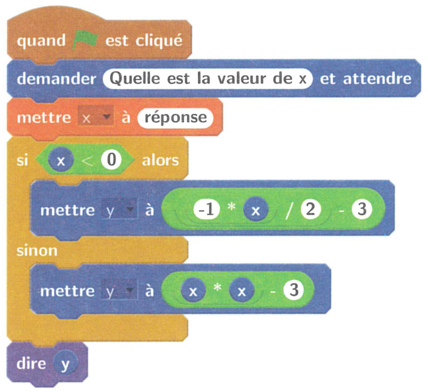
```
def f(x):
    y = x*2+2*x-3
    return y
```

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 15 min.

F05V04

On considère le script Scratch ci-dessous :



1 Lorsque $x=2$ la valeur de $y=$ ....

2 Lorsque $x=-2$ la valeur de $y=$ ....

3 Compléter le script Python de sorte qu'il renvoie les mêmes résultats que le script Scratch.

```
def f(x):
    if x ...... :
        y = -1/2*x-3
    else:
        y = ......
    return y
```

4 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\text{..............} & \text{si } x<0\\ \text{..............} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

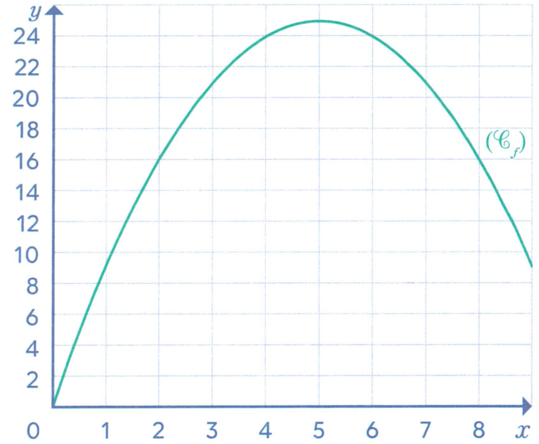
Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min.

F05V05

PARTIE I

On donne $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique d'une fonction f, dans le repère ci-dessous :



1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2 Lire les images de 2 et de 6 par la fonction f.

3 Lire, s'ils existent, les antécédents de 16 par la fonction f.

4 Traduire algébriquement la recherche d'éventuels antécédents de 20 par la fonction f.

5 Déterminer les valeurs approximatives d'éventuels antécédents de 20 par la fonction f.

6 Pour chaque antécédent de 20 par la fonction f, déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs.

PARTIE II

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est celle de la fonction f définie sur $[0;9]$ par $f(x)=-x^2+10x$.

1 Montrer que $f(x)=25-(x-5)^2$.

2 On s'intéresse aux antécédents de 9 par f.

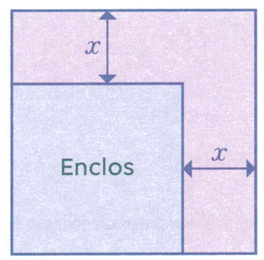
a Montrer que $f(x)=9$ équivaut à $16-(x-5)^2=0$.

b Montrer que $16-(x-5)^2=(9-x)(x-1)$.

c Résoudre $f(x)=9$.

PARTIE III

On souhaite fabriquer un enclos de forme carrée dans un terrain carré de 25 m².



1 Déterminer l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles l'enclos est réalisable.

2 Justifier que l'aire du terrain restant est donnée par l'expression algébrique de la fonction f définie dans la **partie II**.

3 Déterminer x, pour que l'aire du terrain restant vaille 9 m².

2de

OCTOMAP

Fonctions

Généralités sur les fonctions

05

→ Objectifs visés

Être capable de

- À partir d'une représentation graphique :
  - lire l'image d'un antécédent ;
  - lire le(s) antécédent(s) d'une image et faire le lien avec la résolution graphique d'une équation du type $f(x)=k$;
  - commencer à comprendre la lecture des variations d'une fonction.
- À partir d'une expression algébrique :
  - calculer l'image d'un antécédent ;
  - transformer l'écriture de l'expression en utilisant les identités remarquables.
- Traduire une situation donnée par une fonction.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Ne pas être attentif à l'ensemble de définition de la fonction étudiée.
- Confondre f et $f(x)$.
- Confondre les antécédents lus sur l'axe des abscisses avec les images lues sur l'axe des ordonnées.
- Erreurs de calcul.

Généralités sur les fonctions

Les trois modes de représentation d'une fonction

$h : x \mapsto h(x) = 2x^2 + 8$ avec $D_h = [0\,;5]$. Calculer l'image de 4 et de 5 par h.

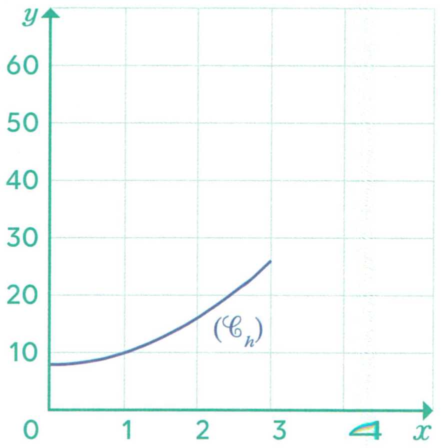
$h(4) =$ .... $h(5) =$ ....

Expression algébrique

Compléter le tableau de valeurs de la fonction h :

x	....	2	4	5	antécédents
$h(x)$	10	16	....	....	images

Tableau de valeurs

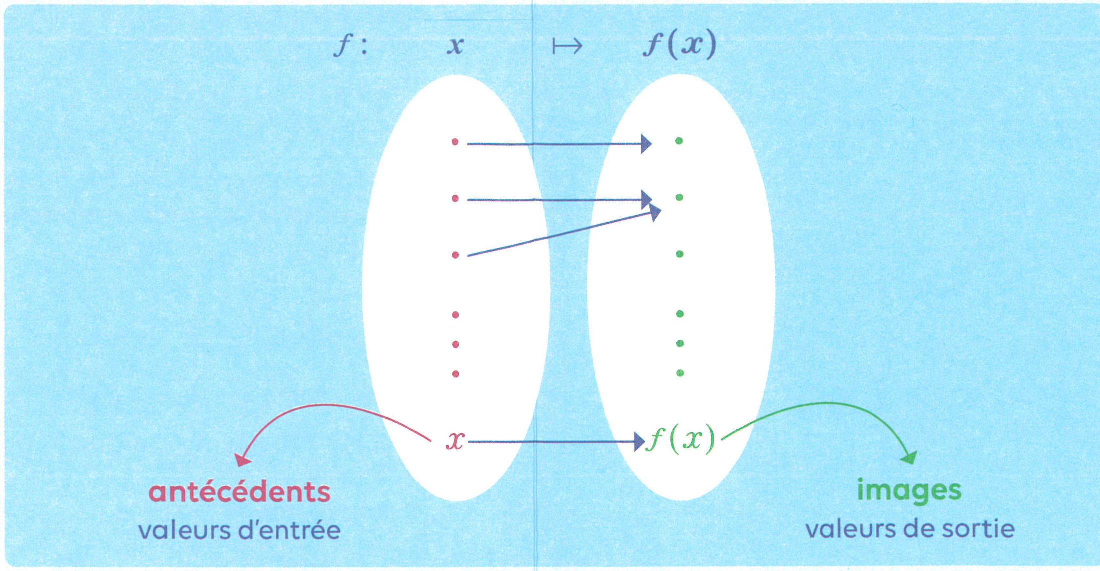


La **courbe représentative** de la fonction h, notée $(\mathscr{C}_h)$, est **l'ensemble des points $M(x\,;h(x))$ du plan**, avec $x \in D_h$.

Courbe représentative

Compléter le tracé de la représentation graphique.

Définitions



$f :\ t \mapsto f(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$
$3 \mapsto 5{,}2$
$7 \mapsto -8$

Le nom de la fonction est ....

3 est .... de 5,2 par la fonction ....

–8 est .... de .... par la fonction ....

t est .... de .... par la fonction ....

Soit $f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in D_f$
D_f est **l'ensemble de définition** ou **domaine de définition.**

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3}{7x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.
Expliquer pourquoi $D_g = \mathbb{R}^*$.

....

....

Soit h la fonction définie par $h(t) = \sqrt{t-1}$ avec $t \geqslant 1$.
Expliquer pourquoi $D_h = [1\,;+\infty[$.

....

....

Calculs d'images et d'antécédents

Soit $f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in D_f$. Soit y un nombre réel.
Les **antécédents** de y sont les nombres x **de D_f tels que $f(x) = y$.**

Antécédents

$g : x \mapsto g(x) = 5x - 12$ et $D_g = \mathbb{R}$.

Déterminer l'antécédent de 28 par g.

28 a pour antécédent .... par ....

$h : x \mapsto h(x) = x^2 - 25$ et $D_h = \,]-\infty\,;+\infty[$.

Déterminer les antécédents de 0 par h.

Les antécédents de 0 par .... sont ....

Images

Soit $f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in D_f$.
Soit $a \in D_f$, $f(a)$ est **l'image de a par f.**

$g : x \mapsto g(x) = \dfrac{4}{3}x - 12$ sur $\mathbb{R}$

Déterminer l'image de –3 par g :

....

....

$h : x \mapsto h(x) = 4x^2 - 9x - 1$ sur $\mathbb{R}$

Déterminer l'image de –3 par h :

....

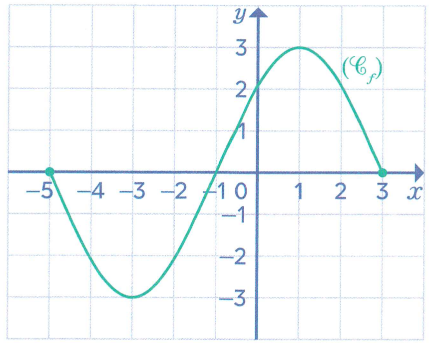
....

F05R03 F05R01 F05R02

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F06V01

On considère la fonction f connue par sa représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ sur D_f ci-dessous :



1 L'ensemble de définition de f est $D_f =$ ....

2 f est décroissante sur .... et sur ....
f est croissante sur ....

3 f est strictement négative sur ....

4 f est strictement positive sur ....

5 f admet un minimum sur D_f égal à ....
obtenu pour $x =$ ....

6 Pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \geqslant$ ....

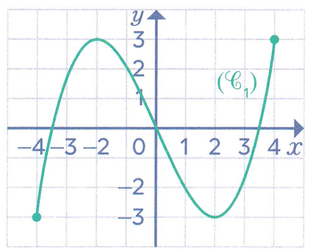
7 f admet un maximum sur D_f égal à ....
obtenu pour $x =$ ....

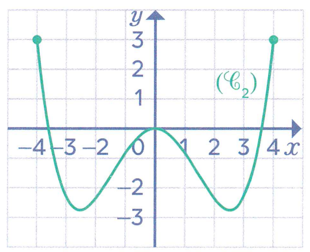
8 Pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \leqslant$ ....

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F06V02

I Voici $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$, les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2, respectivement.

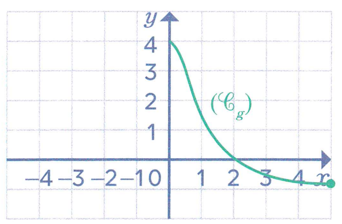


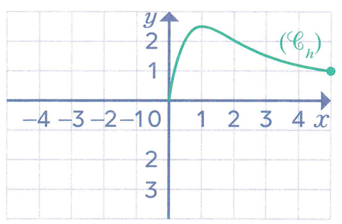


1 Préciser les ensembles de définition et les parités des fonctions f_1 et f_2. Justifier la réponse.

2 Dresser leurs tableaux de variations.

II Voici les représentations des fonctions g et h.





1 Sur $[-5\,;5]$, la fonction g est paire et la fonction h est impaire. Compléter leurs représentations graphiques.

2 Sachant que $g(5) = -\dfrac{15}{13}$ et $h(1) = \dfrac{5}{2}$, dresser les tableaux de variations des fonctions g et h.

Bloc 3

Difficulté : ●○○ — 30 min. — F06V03

I Soient f_1 et f_2 deux fonctions paires définies sur $[-6\,;6]$. Compléter leurs tableaux de variations.

x	-6		-3		-2		0
f_1	-3	↗	2	↘	-5	↗	3

x	-6		-3		-2		0
f_2	5	↘	-1	↗	5	↘	

II Soit g une fonction paire telle que g est croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et décroissante sur $]-3\,;0]$. On a $g(-3) = 4$ et $g(0) = -2$.

1 Donner son ensemble de définition.

2 Dresser son tableau de variations.

III h est une fonction impaire définie sur $]-5\,;5[$. De plus, h est croissante sur $[0\,;2[$ et décroissante sur $[2\,;5[$.
On donne $h(2) = 3$ et $h(5) = -2$.

1 Donner $h(0)$.

2 Dresser son tableau de variations.

3 Préciser, éventuellement, les extremums de h.

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 20 min. — F06V04

Soit f une fonction définie sur $]-a\,;a[$ avec $a \in \mathbb{R}$. On donne l'algorithme suivant :

```
x = 0
pas = a/4
paire = oui
    Tant que x < a  et  paire = oui
        Si f(x) ≠ f(−x)
            paire = non
            x = a
        Sinon
            x = x + pas
        Fin si
    Fin tant que
    Si paire = oui
        Afficher ("f peut être paire.")
    Sinon
        Afficher ("f n'est pas paire.")
    Fin si
```

1 Pourquoi l'algorithme ne permet-il pas d'être certain que la fonction est paire ?

2 Comment augmenter le niveau de certitude sur la parité de la fonction ?

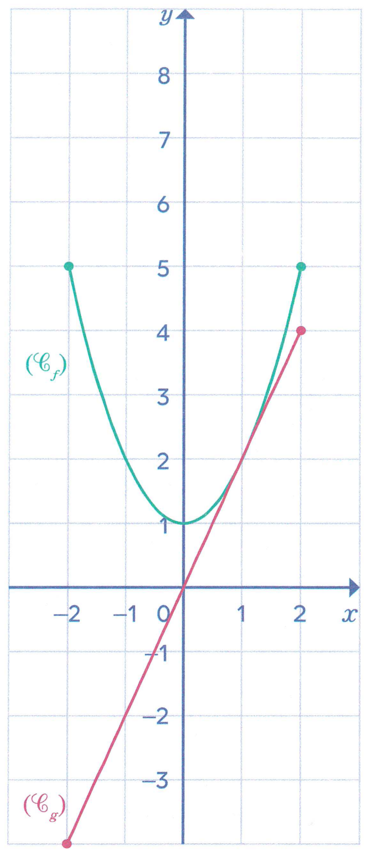
3 Proposer un algorithme permettant de vérifier si une fonction peut être impaire.

Bloc 5

Difficulté : ●●● — 45 min. — F06V05

PARTIE I

Soient les fonctions f et g définies sur $[-2\,;2]$ par leurs représentations graphiques.



1 Justifier les parités de f et de g.

2 Dresser les tableaux de variations de f et de g.

3 Dresser les tableaux de signes de f et de g.

PARTIE II

On s'intéresse à la fonction h définie pour tout réel $x \in [-2\,;2]$ par : $h(x) = f(x) + g(x)$.
Avec f et g définies ci-dessus.

1 Déterminer les images de tous les entiers compris entre -2 et 2, par la fonction h.

2 Après avoir placé les points de coordonnées $(x\,;h(x))$ dans le repère orthonormé, proposer une représentation graphique de h.

PARTIE III

On considère les fonctions u et v définies sur un même ensemble de définition symétrique par rapport à 0.

1 Soit la fonction $w = uv$. Montrer que :

a Si u et v sont de même parité, alors w est paire.

b Si u est paire et v est impaire, alors w est impaire.

2 Soit la fonction $s = u + v$.

a Montrer que si u et v sont de même parité alors s admet cette parité.

b Justifier que : si u et v n'ont pas la même parité, alors s n'est ni paire ni impaire.

2de

Étude qualitative de fonctions

Fonctions

06

Étude qualitative de fonctions — 06

→ Objectifs visés

Être capable de

- À partir de la représentation graphique, d'une fonction sur un intervalle :
  - déterminer sa parité ;
  - déterminer sa monotonie ;
  - établir son tableau de variations ;
  - déterminer ses extremums (minimum ou maximum).
- Connaître par cœur l'interprétation algébrique d'une fonction paire ou impaire.
- Faire le lien entre la représentation graphique et le tableau de variations d'une fonction.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre les variations d'une fonction et son signe.
- Confondre une fonction paire et une fonction impaire.
- Penser que réaliser un tableau de variations est une chose aisée. C'est une notion importante qui, pour être maîtrisée, nécessite d'être réalisée avec soin et rigueur.

Étude qualitative de fonctions

Extremums

F06R04

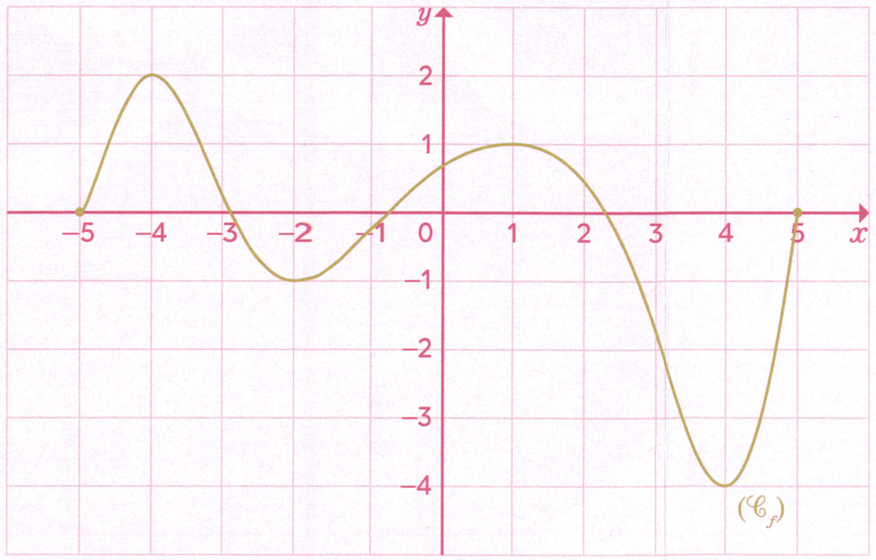
Soit $f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in D_f$, on a :

M **maximum** de f sur D_f $\Leftrightarrow$ $f(x) \leqslant M$ pour tout x de D_f. M est la plus grande image par f.

m **minimum** de f sur D_f $\Leftrightarrow$ $f(x) \geqslant m$ pour tout x de D_f. m est la plus petite image par f.

Les **extremums** de f sur D_f sont le **maximum** et le **minimum** de f sur D_f.

f est représentée par la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ sur $D_f = [-5\,;5]$.



Le maximum de f sur D_f est ....

Le minimum de f sur D_f est ....

Le maximum de f sur $[-3\,;2]$ est ....

Le minimum de f sur $[-3\,;2]$ est ....

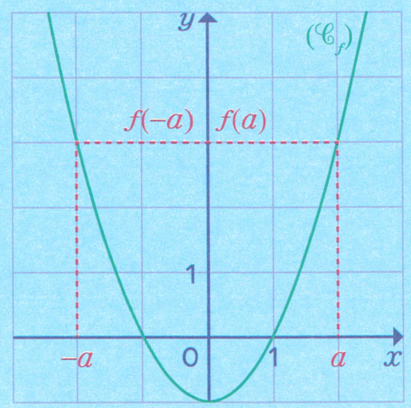
Parité

F06R01

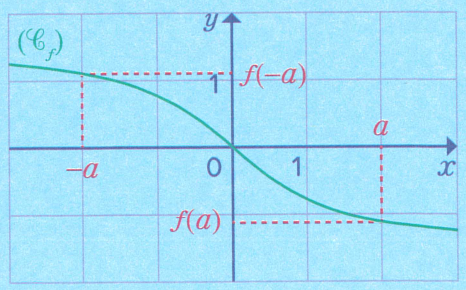
Soient $f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in D_f$ **centré en zéro** et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative.

Pour tout x de D_f on a :

f **paire** $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$



f **impaire** $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$



La courbe représentative d'une fonction paire est .... par rapport à l'axe des ordonnées.

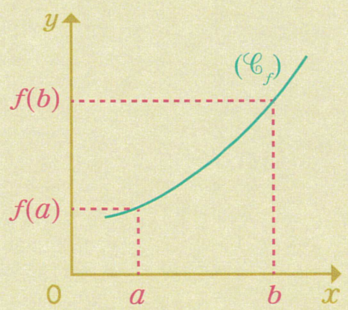
La courbe représentative d'une fonction .... est .... par rapport à l'origine du repère.

Variations

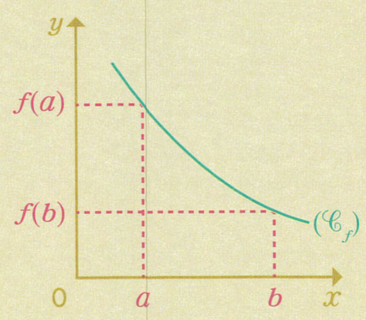
F06R02

Soient $f : x \mapsto f(x)$ définie sur D_f et I un intervalle de D_f.

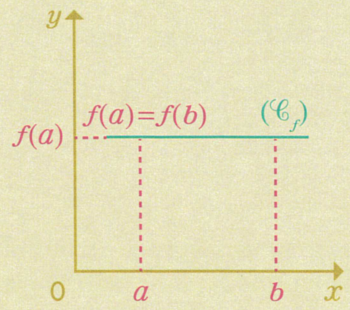
Quels que soient $a \in I$, $b \in I$ tels que $a < b$



f **croissante** sur I
si $f(a) \leqslant f(b)$



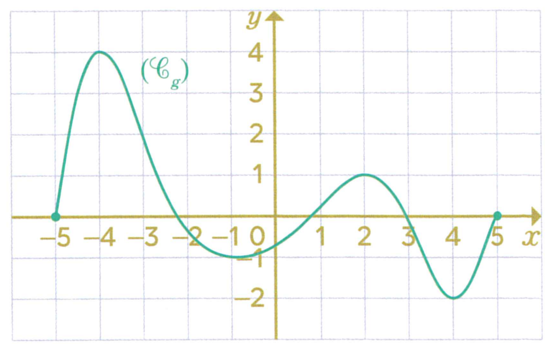
f **décroissante** sur I
si $f(a) \geqslant f(b)$



f **constante** sur I
si $f(a) = f(b)$

g est dite **monotone** sur I si et seulement si elle est **croissante** ou **décroissante** sur I.

Soit $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $I = [-5\,;5]$.



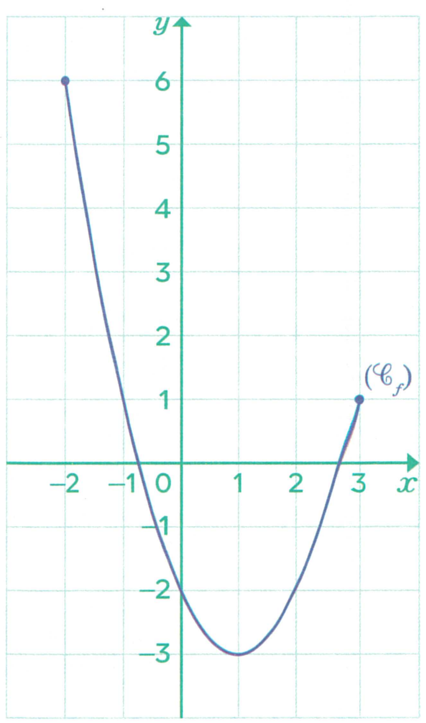
La fonction g est ....

sur $[-5\,;-4]$ et [.......... ; ....] et [.......... ; ....].

La fonction g est ....

sur .... et ....

Tableau de variations



Soit f définie sur $D_f = [-2\,;3]$.

Compléter :

x	....
Variations de f	

F06R03

Bloc 1

Difficulté : ●●○ — 15 min. — F07V01

1 Identifier les fonctions affines. Préciser alors le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

$f_1(x)=\dfrac{3x+7}{2}$ $\quad f_2(x)=\dfrac{3x+7}{x}$

$f_3(x)=3-2x$ $\quad f_4(x)=9$

$f_5(x)=\sqrt{2}x$ $\quad f_6(x)=\sqrt{2x}$

$f_7(x)=\pi x-\sqrt{5}$ $\quad f_8(x)=(7x-1)(-3x+2)$

2 Compléter les tableaux de signes des fonctions g_1 et g_2 définies par : $g_1(x)=-3x+2$ et $g_2(x)=5x+1$.

x	$-\infty$ .... $+\infty$
Signe de g_1	

x	$-\infty$ .... $+\infty$
Signe de g_2	

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 10 min. — F07V02

Associer les fonctions affines suivantes aux diverses situations proposées ci-dessous :

$f(x)=0{,}95x$

$g(x)=-7x+5$

$h(x)=-0{,}5x+5$

$i(x)=5x-7$

Prendre un nombre.
Le quintupler.
Soustraire 7 au résultat.

Une baisse de 5 %

```python
def calcul(nombre):
    resultat = -7 * nombre
    resultat = resultat + 5
    return resultat
```

Bloc 3

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F07V03

Une souche de bambou (Phyllostachys humilis) atteint une taille maximale d'environ 3,5 mètres à maturité.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la croissance d'une pousse sur les 4 premières années.

Âge (en années)	1	2	3	4
Taille (en m)	0,49	1,01	1,52	2,01

1 Expliquer pourquoi on peut modéliser cette évolution par une fonction affine, à déterminer parmi :

☐ $f(x)=x$ ☐ $f(x)=0{,}5x+1$
☐ $f(x)=x+0{,}5$ ☐ $f(x)=0{,}5x$

2 Indiquer la nature de la fonction f.

3 En utilisant ce modèle, quelle serait la taille du bambou à la 6ᵉ année ? À la 15ᵉ année ?

4 Avec ce modèle, au bout de combien d'années le bambou atteindra-t-il sa taille maximale ?

5 Que pensez-vous de ce modèle à long terme ?

6 Des observations sur plusieurs plantations révèlent que l'évolution de la taille de ce genre de bambou évolue nettement plus lentement à partir de la 6ᵉ année. Elle peut être modélisée par une fonction g définie par :

$$g(x)=0{,}1x+2{,}4 \text{ pour } x\in[6\,;11].$$

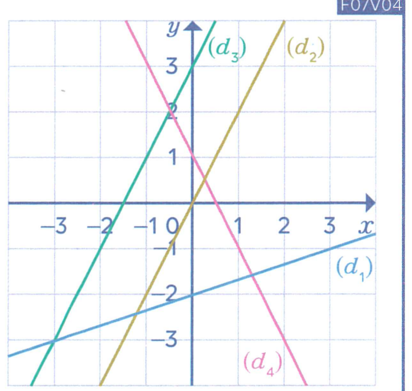
Au bout de combien d'années le bambou atteindra-t-il sa taille maximale ?

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 30 min. — F07V04

I **a** Pour chaque droite, déterminer par lecture graphique l'expression de la fonction affine qu'elle représente.

b Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions affines trouvées.



II Déterminer la fonction affine dont la représentation passe par $A(4\,;-6)$ et $B(6\,;-20)$.

III Soit la droite (AB) avec $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

1 Compléter le script suivant de sorte qu'il renvoie le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p de la droite (AB).

```python
def fctAffine(xA,yA,xB,yB):
    m = ......
    p = ......
    return m,p
```

2 Saisir le script sur votre calculatrice et vérifier les résultats obtenus en **II**.

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F07V05

PARTIE I

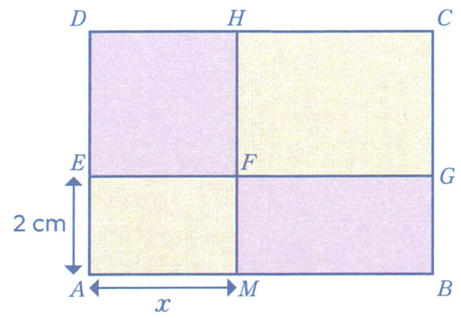
On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;10]$ par $f(x)=3x$ et $g(x)=-2x+20$.

1 Préciser la nature et les variations de chacune des fonctions f et g.

2 Déterminer la valeur de x telle que $f(x)=g(x)$.

PARTIE II

On souhaite créer un flyer rectangulaire $ABCD$ avec : $DC=10$ cm et $DA=5$ cm.



On s'intéresse aux deux zones $EFHD$ et $MBGF$.

1 Déterminer les valeurs possibles de x.

2 Comment semblent varier les aires de ces deux zones lorsque x augmente ?

3 Exprimer les aires des deux zones en fonction de x.

4 Où faut-il placer M pour que les aires soient égales ?

PARTIE III

Pour imprimer ces flyers, un imprimeur propose les options de tarification suivantes :

- de 1 à 100 flyers : 15 centimes par flyer,
- de 101 à 200 flyers : 10 €, plus 5 centimes par flyer,
- à partir de 201 flyers : 18 €, plus 1 centime par flyer.

1 Déterminer le prix pour réaliser 75, 150 et 300 flyers.

2 Compléter la fonction Python ci-dessous afin de connaître le prix à payer en saisissant le nombre n de flyers commandés :

```python
def tarif(n):
    if n <= 100:
        return ...
    elif ......... :
        return ......
    else :
        return ......
```

3 Écrire un script qui renvoie l'image d'un antécédent x par la fonction par morceaux suivante :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\leqslant 1\\ -2x+3 & \text{si } 1<x\leqslant 10\\ x-27 & \text{si } x>10\end{cases}$$

2ᵈᵉ

OCTOMAP

Fonctions

Fonctions affines

07

→ Objectifs visés

Être capable de

- À partir d'une expression algébrique d'une fonction affine :
  - identifier son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine ;
  - en déduire son sens de variation ;
  - établir son tableau de signes ;
  - tracer sa droite représentative.
- Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la fonction affine représentée.
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir :
  - de deux points ;
  - d'un point et de la pente de la droite ;
  - d'une représentation graphique d'une droite.
- Traiter un problème relevant d'une fonction affine.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Ne pas maîtriser le signe d'une fonction affine. La déduction doit être instantanée.
- Faire des erreurs de calcul lors de l'utilisation de l'expression $a=\dfrac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}$.

Fonctions affines

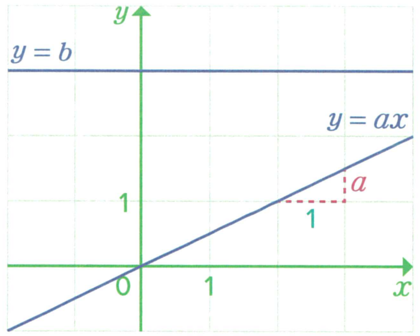
a et b sont des réels quelconques.

Cas particuliers

Soient $f : x \mapsto f(x) = ax + b$ avec $x \in \mathbb{R}$

Si $b = 0$, $f(x) = ax$. f est alors une **fonction linéaire** représentée par **une droite passant par l'origine** du repère.

Si $a = 0$, $f(x) = b$. f est alors une **fonction constante** représentée par **une droite horizontale**.

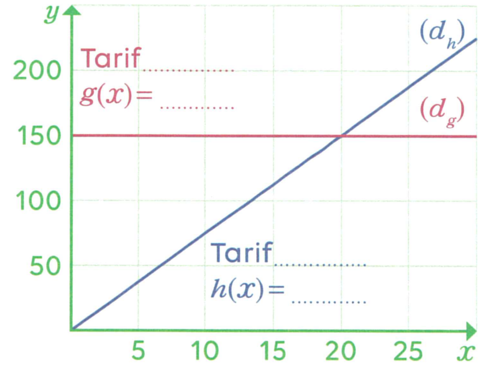


Un centre aquatique propose deux tarifs :
Tarif 1 : 7,50 € l'entrée.
Tarif 2 : un accès illimité pour de 150 €/an.

Soient g et h les fonctions modélisant les deux tarifs en fonction du nombre d'entrées x.

Compléter le graphique en associant chaque tarif aux droites (d_h) et (d_g).

À partir de combien d'entrées le tarif 2 est-il rentable ?



F07R06

Définition

Identifier les fonctions affines parmi les expressions suivantes :

$f : x \mapsto f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax + b$

coefficient directeur de f — ordonnée à l'origine

- ☐ $f(x) = 5x - 8$
- ☐ $g(x) = -3{,}2x + 90$
- ☐ $h(x) = -3x^2 + 2$
- ☐ $i(x) = \dfrac{3}{2}x - 5$
- ☐ $j(x) = \dfrac{9}{x} - 7$
- ☐ $k(x) = 2{,}5 - 18x$

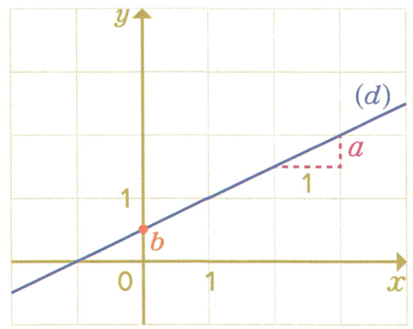
F07R01

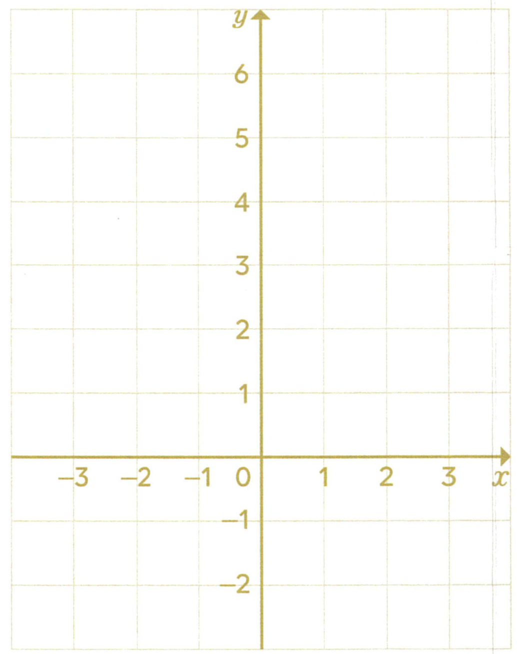
Représentation graphique

$f : x \mapsto f(x) = ax + b$ est représentée par une droite (d) d'équation :

$$y = ax + b$$

pente de (d) — ordonnée à l'origine de (d)





Soit $f : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ avec $x \in \mathbb{R}$

Tracer la droite représentative de f :

x	–2	1
$y = f(x)$	....	....

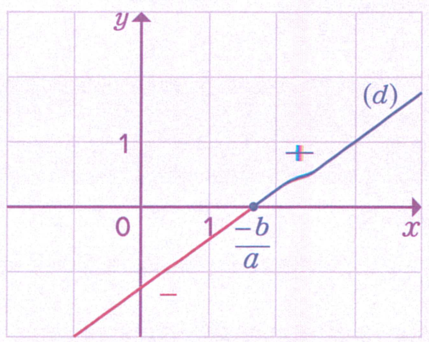
F07R02

Signes

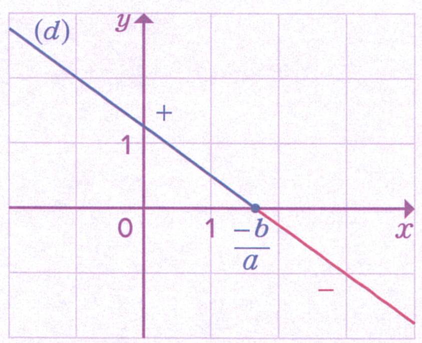
Signes de $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Si $a > 0$



Si $a < 0$



x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	....		....

Compléter les tableaux de signes

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	....		....

F07R05

Variations

$f(x) = ax + b$

- $a > 0$: f **est strictement croissante**
- $a = 0$: f **est constante**
- $a < 0$: f **est strictement décroissante**

Soient f, g, h et k quatre fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x - 1$; $g(x) = 0{,}5x + 0{,}5$; $h(x) = -1{,}5x + 1$; $k(x) = -3x - 4$

f et g sont .... sur $\mathbb{R}$ et h et k sont .... sur $\mathbb{R}$.

F07R04

Déterminer l'expression algébrique

Soit f une fonction affine définie par le tableau de valeurs suivant :

x	–2	6	8	12
$y = f(x)$	20	–4	–10	–22

a Choisir deux points de coordonnées x ; $f(x)$. Exemple $A(6\,;-4)$ et $B(8\,;-10)$.

b Calculer le coefficient directeur a.

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

c Déterminer l'ordonnée à l'origine b.

$$f(x_A) = ax_A + b$$

L'expression algébrique de f est : $f(x) =$ .... $x +$ ....

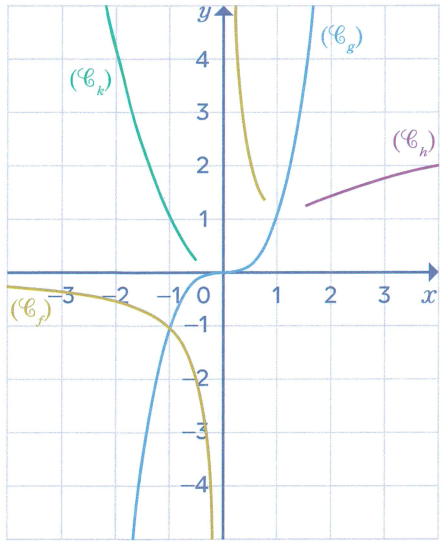
F07R03

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F08V01

1 On a représenté partiellement les fonctions :

- carré par la courbe ....
- racine carrée par la courbe ....
- cube par la courbe ....
- inverse par la courbe ....



2 Compléter ces représentations graphiques.

3 La fonction inverse est définie pour ....

4 La fonction paire est la fonction ....

5 Les fonctions impaires sont .... et ....

6 La fonction .... admet un extremum en ....

7 Tracer la droite (d) d'équation $y = x$.

8 Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 \geqslant x$.

....

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F08V02

Pour chacune des phrases suivantes, répondre : "Vrai" ou "Faux". Justifier les réponses en utilisant les propriétés des fonctions de référence.

1 5 est solution de l'équation $x^2 = 25$.

....

2 L'équation $x^2 = 25$ a pour ensemble de solutions : $S = \{5\}$. ....

3 La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

....

4 $\sqrt{10} - \sqrt{15}$ est négatif.

....

5 $\frac{1}{13} - \frac{1}{17}$ est négatif.

....

6 La fonction carré est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

....

7 Quel que soit le nombre réel x, $x^3 \geqslant x^2$.

....

8 $\sqrt{x} \leqslant 4$ équivaut à $x \leqslant 2$.

....

9 La fonction cube est impaire.

....

10 La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}$.

....

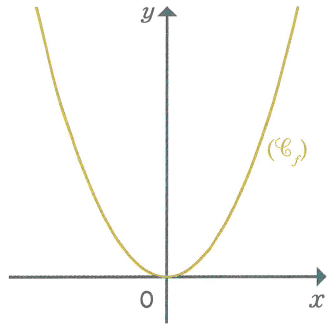
Bloc 3

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F08V03

En vous aidant des allures des représentations graphiques des fonctions ci-dessous, trouver les valeurs de x telles que :

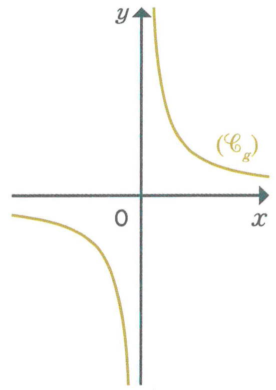
1 $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

- $f(x) = 11$
- $f(x) = -1$
- $f(x) \geqslant 12$



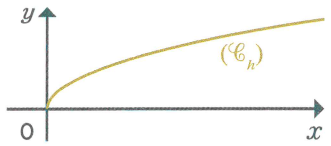
2 $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

- $g(x) = 2$
- $g(x) = -4$
- $g(x) \geqslant 2$



3 $h(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$

- $h(x) = 11$
- $h(x) = -2$
- $h(x) \geqslant 12$



Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 20 min. — F08V04

1 Préciser le rôle de chacune des quatre fonctions du script Python ci-dessous :

```python
from math import*
def c(x):
    return x**2
def a(x):
    return 3*x-2
def r(x):
    return sqrt(x)
def i(x):
    return 1/x
```

2 Après exécution de ce script, quel doit être le résultat de l'instruction : `>>> r(a(6))` ?

3 On souhaite connaître l'image de 3 par la fonction $g : x \mapsto (3x-2)^2$. Indiquer l'instruction à écrire dans la console d'exécution de ce script. Préciser le résultat obtenu.

4 Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{3x^2 - 2}$.
Indiquer l'instruction à écrire dans la console pour obtenir l'image de -1 par la fonction h. Préciser le résultat obtenu.

5 `>>> r(a(6))` est l'image de 6 par une fonction f. Indiquer son expression algébrique.

☐ $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ ☐ $f(x) = \sqrt{x}(3x-2)$

☐ $f(x) = \sqrt{3x-2}$ ☐ $f(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{2}$

Bloc 5

Difficulté : ●●● — 45 min. — F08V05

Rappel :
$f : x \mapsto mx + p$ est une fonction affine croissante si $m > 0$ et décroissante si $m < 0$.

PARTIE I

Pour tout réel x, on effectue le programme de calcul suivant :

- On augmente x de 2.
- On élève au carré le résultat.
- On multiplie le résultat par -2 et on augmente le tout de 3.

1 Chaque ligne de ce programme exprime une fonction. Préciser sa nature et ses variations.

2 Montrer que l'image de x par ce programme de calcul est $g(x) = -2x^2 - 8x - 5$.

3 Soient a et b dans un intervalle I tel que $a < b$, comparer $g(a)$ et $g(b)$ dans chacun des cas :

a $I =]-\infty\,;-2[$

b $I =]-2\,;+\infty[$

4 En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

5 En déduire la nature de l'extremum de la fonction g. Préciser sa valeur et la valeur de x pour laquelle il est obtenu.

PARTIE II

Soit la fonction f définie sur $]3\,;+\infty[$ par $h(x) = 2 + \frac{5}{x-3}$.

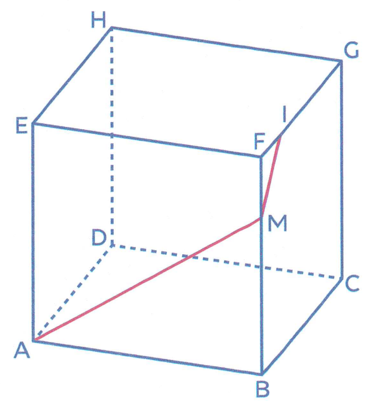
1 Proposer un programme de calcul en trois étapes qui permet d'obtenir l'image d'un réel x par la fonction h.

2 Soient a et b dans $]3\,;+\infty[$ tels que $a < b$.
Comparer $h(a)$ et $h(b)$.

3 En déduire les variations de h sur $]3\,;+\infty[$.

PARTIE III

On considère le cube ci-contre d'arête 4 cm.
$I \in [FG]$ tel que $FI = 1$ cm.
$M \in [BF]$ tel que $BM = x$.



1 Calculer :
$d(x) = AM^2 + MI^2$

2 Montrer que :
$2x^2 - 8x + 33 = 2(x-2)^2 + 25$.

3 Pour quelle position de M la distance parcourue de A à I en passant par M est-elle minimale ?

Fonctions de référence

Fonctions

2de — OCTOMAP — 08

Fonctions de référence 08

→ Objectifs visés

Être capable de

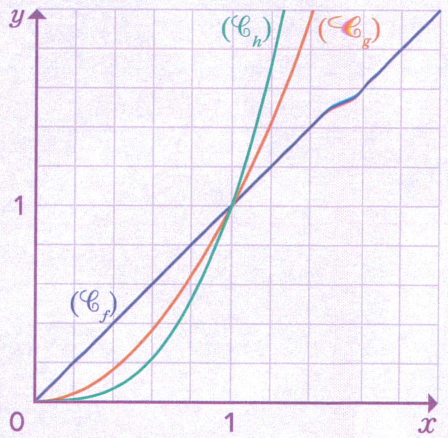
- ↗ Connaître et reconnaître les fonctions de référence : affine, carré, cube, inverse et racine carrée.
- ↗ Appliquer correctement les propriétés des fonctions de référence.
- ↗ Résoudre graphiquement des équations de type $x^2 = k$ et $x^3 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- ↗ Résoudre graphiquement des inéquations de type $x^2 > k$ et $x^3 > k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- ↗ Étudier la position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.
- ↗ Démontrer les variations des fonctions carré, inverse et racine carrée.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- ↗ La fonction carré n'est jamais négative.
- ↗ La fonction racine carrée n'est définie que pour des valeurs positives.
- ↗ La fonction inverse n'est pas définie pour 0.
- ↗ La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Fonctions de référence

Positions relatives



Soient des fonctions f, g et h définies par
$f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$ avec $x \in \mathbb{R}^+$

- Si $x \in \{0\,;1\}$
  $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ se coupent
  dans ce cas : $x = x^2 = x^3$
- Si $x \in]0\,;1[$
  $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$ qui est au-dessus de $(\mathscr{C}_h)$
  dans ce cas : $x > x^2 > x^3$
- Si $x \in]1\,;+\infty[$
  $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de $(\mathscr{C}_g)$ qui est en dessous de $(\mathscr{C}_h)$
  dans ce cas : $x < x^2 < x^3$

démonstration

F08R05

Fonction carré

$f : x \mapsto f(x) = x^2$ avec $D_f = \mathbb{R}$.

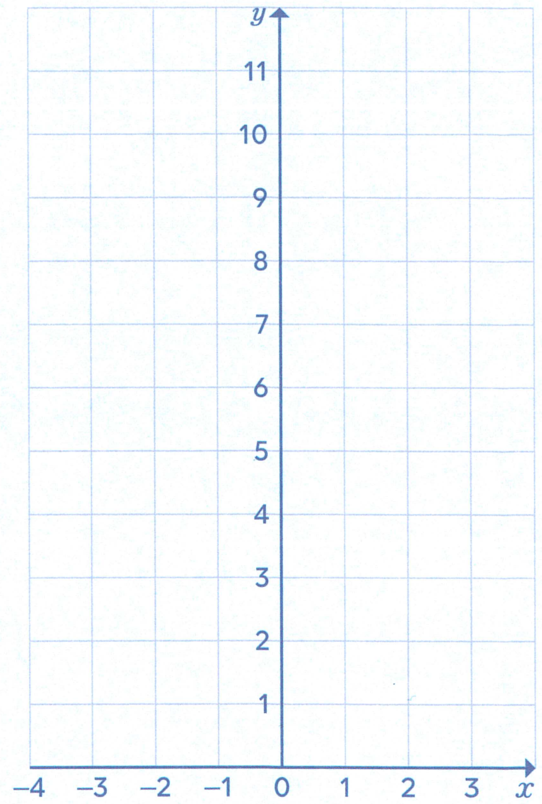
Compléter le tableau de valeurs de f puis tracer sa courbe représentative.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	9						

Compléter les tableaux de variations et de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signes de f			



La fonction **carré** est **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$ et **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction **carré** est **paire** sur $\mathbb{R}$.

démo

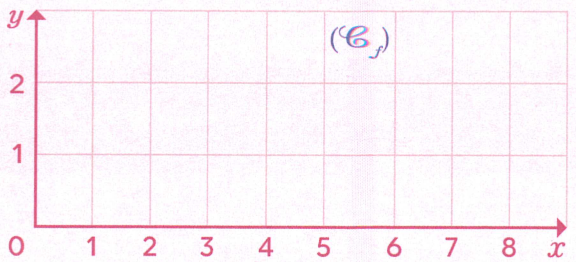
F08R01

Fonction racine carrée

$f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^+$.

Compléter le tableau et tracer la courbe :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0					



Compléter les tableaux :

x	0	$+\infty$
Variations de f		

x	0	$+\infty$
Signes de f		

La fonction **racine carrée** est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$.

démonstration

F08R04

Fonction inverse

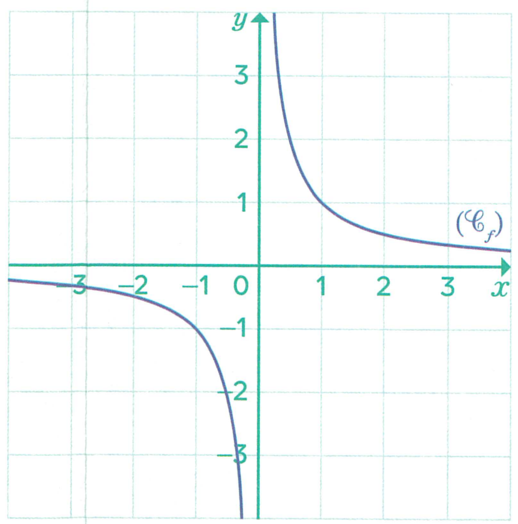
$f : x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $D_f = \mathbb{R}^*$.

Compléter les tableaux :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f		‖	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signes de f	....	‖	....

La **double barre** indique une **valeur interdite**.



La fonction **inverse** est **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$ et **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$.

démonstration

La fonction **inverse** est **impaire** sur $\mathbb{R}^*$.

F08R03

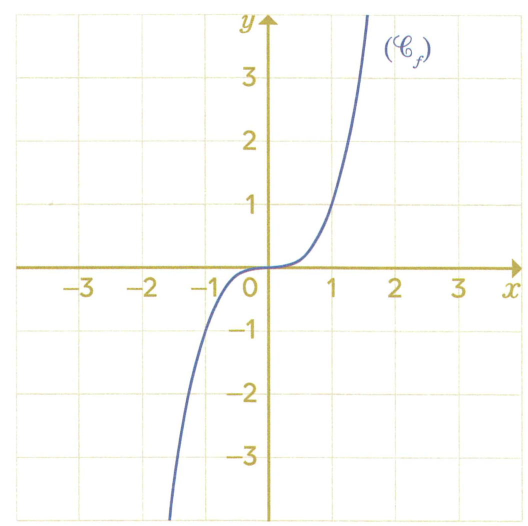
Fonction cube

$f : x \mapsto f(x) = x^3$ avec $D_f = \mathbb{R}$.

Compléter les tableaux de variations et de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signes de f			



La fonction **cube** est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction **cube** est **impaire** sur $\mathbb{R}$.

F08R02

Équations

Nombres et calculs

2de OCTOMAP

→ Objectifs visés

Être capable de

- ↗ Maîtriser la résolution des équations du 1er degré.
- ↗ Ramener des équations de degré supérieur à 1 à un produit de facteurs nul et appliquer la règle du produit nul.
- ↗ Modéliser une contrainte donnée par une équation.
- ↗ Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- ↗ L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions si $a > 0$.
- ↗ L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution si $a < 0$.
- ↗ L'équation $\sqrt{x} = a$ admet une unique solution positive si $a \geqslant 0$.
- ↗ Un dénominateur ne doit jamais être nul. Pour une équation avec des quotients, il ne faut pas oublier les valeurs interdites.
- ↗ Oublier de donner l'ensemble des solutions.

Bloc 1

Difficulté : ●●● — 30 min. — F09V01

Résoudre les équations suivantes :

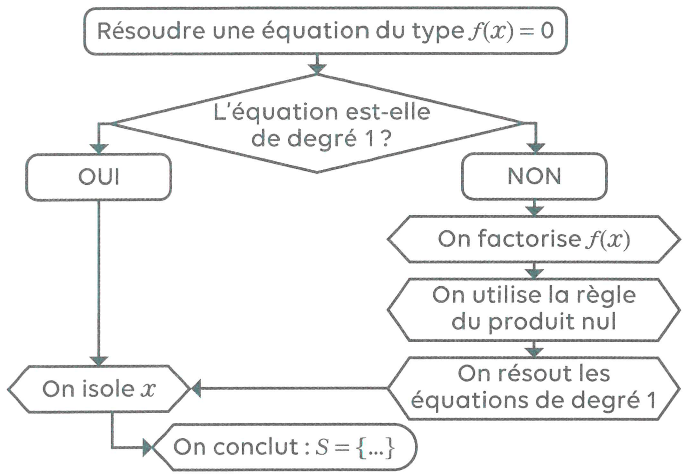
1. $2x-1=0$
2. $-2x-4=7$
3. $3x-5=5x+4$
4. $\dfrac{2x+1}{x-4}=0$
5. $(3x+5)(x-3)=0$
6. $(x+2)^2+2(x+2)=0$
7. $(x+3)^2-4=0$
8. $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$

Bloc 2

Difficulté : ●●● — 30 min. — F09V02

Résoudre les équations suivantes, (l'algorithme ci-dessous, peut aider à choisir la bonne démarche) :

1. $3x-5=5(x+2)$
2. $(x+1)(2x+3)-2(x+1)=0$
3. $\dfrac{x}{2}=3-x$
4. $(x+1)^2=(x-3)^2$
5. $-\dfrac{x}{4}=\dfrac{x}{5}+1$
6. $(2x+3)^2-(x+1)^2=0$
7. $7(3x-8)=(3x-8)(-2x+9)$



Bloc 3

Difficulté : ●●● — 60 min. — F09V03

I Résoudre les équations :

1. $-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{4x}{7}+\dfrac{5}{21}$
2. $\dfrac{5}{6}x+\dfrac{3}{7}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{14}$
3. $\sqrt{7}x+1-\sqrt{7}=0$

II Soit $f(x)=2x^3+3x^2-8x-12$

1. Vérifier que : $f(x)=(2x+3)(x^2-4)$
2. Résoudre $f(x)=0$
3. Résoudre l'équation $\dfrac{f(x)}{x-2}=0$

III Résoudre les équations suivantes en les factorisant à l'aide des identités remarquables :

1. $9x^2+6x+1=0$
2. $9x^2+6x+1=-2$
3. $9x^2+6x+1=36$
4. $9x^2+6x+1=(3x+1)(2x-8)$

IV Résoudre les équations :

$\dfrac{x^2-25}{x+5}=0$ $\qquad \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x-1}$ $\qquad \dfrac{(2x+1)^2}{(x-2)^2}=1$

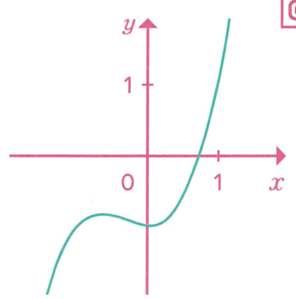
V Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le triangle dont les côtés ont pour mesures respectives $n-2$, n et $n+2$ soit rectangle.

Bloc 4

Difficulté : ●●● — 20 min. — F09V04

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3+x^2-1$.

Sa représentation graphique nous permet d'affirmer que $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;1]$.



On considère l'algorithme suivant :

$a=0,\quad b=1,\quad m=(a+b)/2$
Tant que $|m^3+m^2-1| \geqslant 10^{-3}$
 Si $m^3+m^2-1<0$
  $a=m,\quad m=(a+b)/2$
 Sinon
  $b=m,\quad m=(a+b)/2$
Afficher m

1. Compléter le script suivant traduisant l'algorithme.

```
1  def solutionEquation():
2      a,b=0,1
3      m=(a+b)/2
4      while abs(m**3+m**2-1).......:
5          if m**3+m**2-1<0:
6              a=....
7              m=(a+b)/2
8          else:
9              b=......
10             m=......
11     return round(m,3)
```

2. Expliquer la ligne 11.
3. Quelle valeur renvoie le script ?
4. Modifier ce script de sorte que la solution m soit donnée à 10^{-n} près, $n \in \mathbb{N}$.
5. Donner la solution α arrondie à 10^{-14}.

Bloc 5

Difficulté : ●●● — 45 min. — F09V05

PARTIE I

On considère $P(x)=-x^2+10x$.

1. Déterminer le réel c tel que $P(x)+c=-(x-5)^2$.
2. Résoudre $P(x)=25$ puis $P(x)=36$.
3. Montrer que l'équation $P(x)=16$ équivaut à l'équation $(x-2)(-x+8)=0$.
4. En déduire les solutions de l'équation $P(x)=16$.
5. Soit $f(x)=P(x)+5$.
   a. Montrer que $f(x)=30-(x-5)^2$.
   b. En déduire que résoudre $f(x)=14$ équivaut à résoudre $(9-x)(x-1)=0$.
6. En déduire l'ensemble des solutions de $f(x)=14$.

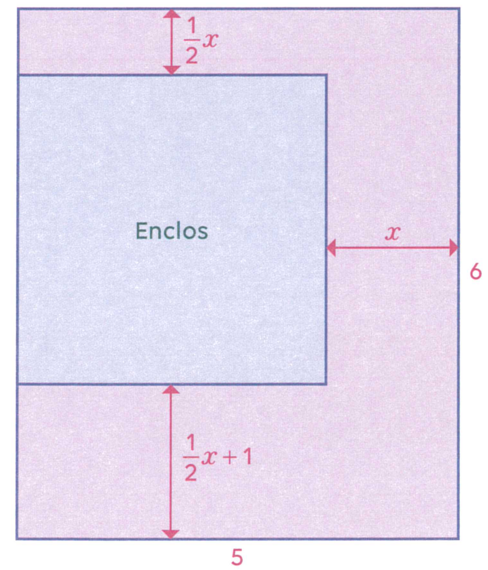
PARTIE II

Un produit est vendu 10 000 €. Le coût de production, en milliers d'euros, de x unités est donné par la fonction $C(x)=x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que le bénéfice obtenu par la production et la vente de x unités est donné par $P(x)$ (Partie I).
2. Déterminer le nombre d'unités à produire afin de réaliser un bénéfice de 16 milliers d'euros.

PARTIE III

On souhaite fabriquer un enclos rectangulaire dans un terrain de dimensions 5×6 unités, comme ci-dessous.



1. Déterminer l'ensemble des nombres x pour lesquels l'enclos est réalisable.
2. Justifier que l'aire de la partie du terrain restante est donnée par $f(x)$ définie dans la partie I question 5.
3. Déterminer x pour que l'aire de la partie du terrain hors enclos vaille 14 unités d'aire.

Équations particulières

Une équation peut avoir une **unique solution**, **plusieurs solutions**, une **infinité de solutions** ou **aucune** solution.

$k \in \mathbb{R}$

$x^2 = k$
- si $k < 0$: $x^2 = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- si $k \geqslant 0$: $x^2 = k$ admet deux solutions : $x = -\sqrt{k}$ et $x = \sqrt{k}$

$\frac{1}{x} = k$
- si $k = 0$: $\frac{1}{x} = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- si $k \neq 0$: $\frac{1}{x} = k$ admet une unique solution : $x = \frac{1}{k}$

$\sqrt{x} = k$
- si $k < 0$: $\sqrt{x} = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- si $k \geqslant 0$: $\sqrt{x} = k$ admet une unique solution $x = k^2$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x^2 + 4 = 0$

$\frac{1}{x} = -3$

$\sqrt{x} = 9$

$x^2 = 8$

$\sqrt{x} = -25$

F09R05

Équation du premier degré

Résolution d'une équation du **premier degré** à **une inconnue**

$$\underbrace{ax+b}_{1^{er}\text{ membre}} \underset{\text{égalité}}{=} \underbrace{cx+d}_{2^{nd}\text{ membre}}$$

inconnue

(a, b, c et d sont des réels, $a \neq c$)

On recherche **l'ensemble des valeurs de x** qui vérifient l'égalité.

L'ensemble de solutions est noté S.

Soit l'équation $5x - 17 = 12x - 3$.

Vérifier si 10 est solution de l'équation.

Vérifier si -2 est solution de l'équation.

F09R01

Équations

Équation quotient nul $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ **et** $B(x) \neq 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{2x+1}{x+3} = 0$

L'équation est définie pour : $x + 3 \neq 0$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Ici, le réel **-3** est appelé **« valeur interdite »**

Pour $x \neq -3$:

$\frac{2x+1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$

F09R04

Équation produit nul $A(x) \times B(x) = 0$

$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ **ou** $B(x) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-3)(4-5x) = 0$

$S = \{........ ; ....\}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $36x^2 + 1 = 2$

$S = \{........ ; ....\}$

F09R03

Règles de calcul

a, b, c et d sont des réels avec $d \neq 0$.

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

$a = b \Leftrightarrow a - c = b........$

$a = b \Leftrightarrow a \times d = b........$

$a = b \Leftrightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{........}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$x + 4 = 16$

$x + 4 - 4 = 16 - 4$

$x = 12$

$x - 8 = 24$

$3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{........}$

$x = ...$

$\frac{x}{-2} = 7$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$13x - 15 = 6x + 20$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\frac{3x}{7} = \frac{x+2}{5}$

F09R02

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F10V01

I Soit $f(x)=ax+b$.
Compléter les tableaux de signes suivants.

$a>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

$a<0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

II f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+3)(-x+2)$.

1 Compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x+3$	
$-x+2$	
$f(x)$	

2 Résoudre $f(x)>0$. $S=$ ....

III Indiquer l'ensemble de solutions S des inéquations :

a $x+5\geqslant 0$ $\qquad S=$ ....

b $(x+5)^2\geqslant 0$ $\qquad S=$ ....

c $\dfrac{1}{(x+5)^2}\geqslant 0$ $\qquad S=$ ....

d $-x+\sqrt{5}\geqslant 0$ $\qquad S=$ ....

Bloc 2

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F10V02

I Indiquer les signes des expressions suivantes :

1 x^2+2 $\qquad$ **3** $(x-3)^2+9$

2 $-\sqrt{x}$

II Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $(8x+1)(-2x+5)\leqslant 0$ $\qquad$ **4** $\dfrac{-x}{(-x-5)(x-1)}\leqslant 0$

2 $\dfrac{1}{(8x+1)(-2x+5)}\leqslant 0$ $\qquad$ **5** $(x+3)^2(x-1)<0$

3 $-x(x+1)\leqslant 0$

III Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $x-\dfrac{1-3x}{2}<2$ $\qquad$ **3** $x-\dfrac{5}{x}\leqslant 0$

2 $\dfrac{1}{x+1}\leqslant -x+1$ $\qquad$ **4** $\dfrac{1}{x+2}\geqslant x+2$

IV Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $(1-2t)^2>(t+7)(1-2t)$ $\qquad$ **3** $(t+5)^2>9$

2 $(t+5)^2>(t+7)^2$ $\qquad$ **4** $(t+5)^2<2$

Bloc 3

Difficulté : ●●● — 45 min. — F10V03

I Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$x^2>x$ $\qquad$ $x^3>x$ $\qquad$ $x>\dfrac{1}{x}$

II On considère $f(x)=4x^3-4x^2-15x+18$.

1 Montrer que $f(x)=(x+2)(2x-3)^2$.

2 Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

3 En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

4 Soit $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
En déduire les solutions de l'inéquation $g(x)\leqslant 0$.

III On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :
$x(2x-7)>x(x+1)$

1 Expliquer pourquoi Paul fait une erreur en notant :
$x(2x-7)>x(x+1)\Leftrightarrow(2x-7)>(x+1)$

2 Résoudre l'inéquation.

IV Soit l'inéquation $x+5\geqslant 3\sqrt{x+3}$

1 Justifier que pour $x\in[-3\,;+\infty[$ l'inéquation équivaut à $(x+5)^2\geqslant 9(x+3)$.

2 Développer chacune des expressions :
$g(x)=(x+5)^2-9(x+3)$ et $h(x)=(x+2)(x-1)$

3 Résoudre l'inéquation.

Bloc 4

Difficulté : ●○○ — 30 min. — F10V04

On veut déterminer l'ensemble de solutions de l'inéquation : $ax+b>0$, avec $a\neq 0$ et $b\in\mathbb{R}$.

1 Compléter l'algorithme en langage naturel suivant pour répondre à la question.

```
c = −b/a
Si ........
    rep = "S = ]−∞ ; c["
Sinon
    rep = "S = ]........ ; ........["
Fin Si
Afficher rep
```

2 Écrire une fonction Python qu'on nomme `inequation(a,b)` et qui traduit l'algorithme ci-dessus.

3 Donner les ensembles de solutions des inéquations suivantes :

a $2x+3>0$

b $-3x+5>0$

c $4x-3>0$

d $-5x-6>0$

4 En utilisant un tableau de signes, résoudre alors :

a $(2x+3)(-3x+5)>0$

b $(4x-3)(-5x-6)>0$

Bloc 5

Difficulté : ●●● — 90 min. — F10V05

PARTIE I Signe de fonctions

1 Soit $f(x)=x^3-30x^2+300x-1000$

a Montrer que : $f(x)=(x-10)(x-10)^2$

b Déterminer le signe de $f(x)$.

2 Soit $g(x)=-x^2+30x-216$.

a Montrer que $g(x)=(x-12)(-x+18)$.

b En déduire le signe de $g(x)$.

3 Étudier le signe de $h(x)=-\dfrac{3(x-13)}{x+1}$.

PARTIE II Coût, chiffre d'affaires et bénéfice

Une entreprise produit et commercialise chaque mois x milliers d'appareils, $x\in[0\,;20]$.

On note :

$C(x)$: le coût total mensuel de production en milliers d'euros avec $C(x)=x^3-30x^2+300x$.

$R(x)$: le chiffre d'affaires mensuel, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x milliers d'appareils. Chaque appareil est vendu 84 €.

1 Déterminer les quantités à produire afin que le coût de production ne dépasse pas le million d'euros.

2 Exprimer le chiffre d'affaires réalisé pour la vente de x milliers d'appareils.

3 Calculer le bénéfice réalisé pour la production et la vente de 3 milliers d'appareils.
On admet que toute la production est vendue.

4 Montrer que le bénéfice mensuel $B(x)$ exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'appareils est défini par :
$B(x)=x(-x^2+30x-216)$, $x\in[0\,;20]$.

5 Tracer le tableau de signes de la fonction B à l'aide des résultats de la partie I, question 2.

6 Déterminer les quantités à produire afin que l'entreprise soit rentable.

PARTIE III Rentabilité

Avant le lancement d'un nouveau modèle, l'entreprise décide de lancer une offre promotionnelle où le prix de vente unitaire $p(x)$ dépend du nombre x de produits vendus (en milliers d'unités) : $p(x)=84-\dfrac{42x}{x+1}$.

1 Montrer que $p(x)\leqslant 45$ équivaut à $h(x)\leqslant 0$
avec h la fonction étudiée dans la partie I.

2 Expliquer dans le contexte de l'exercice ce que représentent les solutions de la question ci-dessus.

3 Déterminer le chiffre d'affaires si l'entreprise arrivait à écouler les 13 milliers d'appareils restant en stock.

2de

Nombres et calculs

Inéquations

10

→ Objectifs visés

Être capable de

- Maîtriser le signe de $ax+b$ pour $a\neq 0$.
- Dresser un tableau de signes et en déduire l'ensemble des solutions d'une inéquation.
- Transformer une inéquation en produit de facteurs dont on peut déterminer le signe. En déduire, ensuite, à l'aide du tableau de signes, l'ensemble des solutions.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Un dénominateur ne doit jamais être nul. Pour une inéquation avec des quotients, il ne faut pas oublier les valeurs interdites.
- Lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif, on inverse l'ordre (exemple : $-2x>6\Leftrightarrow x<-3$).
- Un carré est toujours positif.
- Deux nombres positifs sont toujours rangés dans le même ordre que leurs carrés.
- Deux nombres négatifs sont toujours rangés dans l'ordre inverse de celui de leurs carrés.

Inéquations

Inéquation quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$

F10R04

1 On cherche les **valeurs interdites** c-à-d. les solutions de $B(x)=0$

2 On étudie le **signe** de $A(x)$, $B(x)$, $\dfrac{A(x)}{B(x)}$

Résoudre $\dfrac{2x+5}{x-1} \leqslant 0$ **Valeur interdite :** $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$2x+5$		....	0	....		....	
$x-1$		....		....	0	....	
$\frac{2x+5}{x-1}$		....	0	....	‖	....	

$2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

$S=$ ....

La **double barre** indique une **valeur interdite**.

Résoudre $\dfrac{x}{(2x-1)^2} \geqslant 0$ **Valeur interdite :** $(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow$ ....

x	$-\infty$		....		....		$+\infty$
x							
$(2x-1)^2$							
$\frac{x}{(2x-1)^2}$							

$S=$ ....

Inéquation du premier degré

F10R01

Résolution d'une inéquation du **premier degré** à **une inconnue**

$$\underbrace{ax+b}_{1^{er}\text{ membre}} < \underbrace{cx+d}_{2^{nd}\text{ membre}}$$

inconnue

inégalité $<$, $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$

(a, b, c et d sont des réels, $a \neq c$)

On recherche **l'ensemble des valeurs de x** qui vérifient l'inégalité.

Règles de calcul

F10R02

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}^*$.

$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$

$a<b \Leftrightarrow a-c<b-c$

$a<b \Leftrightarrow \begin{cases} am<bm & \text{si } m>0 \\ am>bm & \text{si } m<0 \end{cases}$

$a<b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m} & \text{si } m>0 \\ \dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m} & \text{si } m<0 \end{cases}$

Résoudre :

$x+8<-9$

$x+8-8<-9$ ....

$x<$ ....

$x-4>11$

$3x<15$

$\dfrac{3x}{3}$ .... $\dfrac{15}{3}$

$x<$ ....

$-6x>42$

$\dfrac{x}{-2} \leqslant 7$

Résoudre : $13x-15>6x+20$

$S=$ ....

Résoudre : $4x+72 \leqslant 9x-38$

$S=$ ....

Inéquation produit $A(x)\times B(x)<0$

F10R03

On étudie le **signe** de $A(x)$, $B(x)$, $A(x)\times B(x)$

Résoudre $(x+3)(x-\sqrt{2})>0$

$x+3=0 \Leftrightarrow$ .... $x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow$ ....

x	$-\infty$				$+\infty$
$(x+3)$					
$(x-\sqrt{2})$					
$(x+3)(x-\sqrt{2})$					

$S=$ ....

Résoudre $(6x+1)(-2x+3) \leqslant 0$

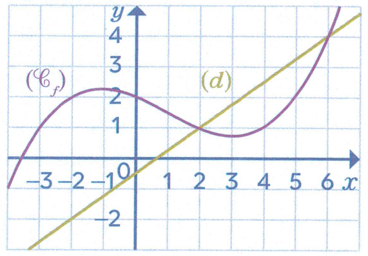
$6x+1=0 \Leftrightarrow$ .... $-2x+3=0 \Leftrightarrow$ ....

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$6x+1$			0				
$-2x+3$					0		
$(6x+1)(-2x+3)$			0		0		

$S=$ ....

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F11V01



Ci-contre, $(\mathscr{C}_f)$ et (d) sont les représentations graphiques, respectivement, des fonctions f et g définies sur $[-4\,;7]$.

Résoudre graphiquement les équations et les inéquations suivantes :

1 $f(x)=2$. On obtient $S=$ ....
Ce sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_f)$ ....
....

2 $f(x)\leqslant 4$. On obtient $S=$ ....
Ce sont ....
....

3 $f(x)=g(x)$. On obtient $S=$ ....
Ce sont les abscisses des points ....
....

4 $f(x)>g(x)$. On obtient $S=$ ....

5 $f(x)=-2$. On obtient $S=$ ....

6 $f(x)=1$. On obtient $S=$ ....

7 $f(x)>1$. On obtient $S=$ ....

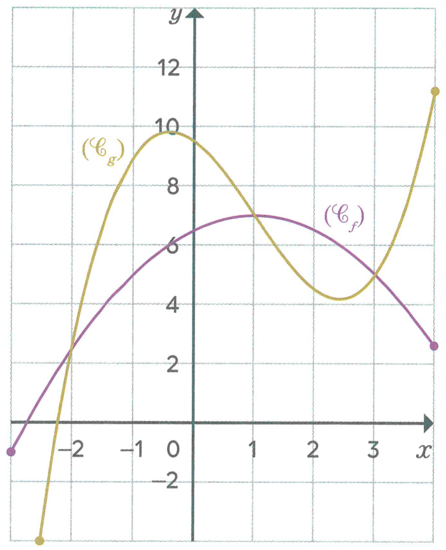
Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F11V02

Ci-dessous sont données les représentations graphiques $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, respectivement, des fonctions f et g définies sur $[-3\,;4]$.

1 Résoudre graphiquement :

- $f(x)=g(x)$
- $f(x)\leqslant g(x)$
- $g(x)<f(x)$
- $f(x)=8$



2 Soit la fonction h définie par $h(x)=f(x)-g(x)$.
Compléter le tableau de signes de la fonction h.

x	-3	-2	...	...	...
Signe de $h(x)$					

Bloc 3

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F11V03

I f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=10x-48$ et $g(x)=x^2-23$.

Résoudre algébriquement :

- $f(x)=0$
- $f(x)=-7$
- $f(x)<26$
- $g(x)=0$
- $g(x)=-7$
- $g(x)<26$
- $f(x)=g(x)$
- $f(x)\leqslant g(x)$

II h et k sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x)=2(x-3)$ et $k(x)=x^2-6x+9$.

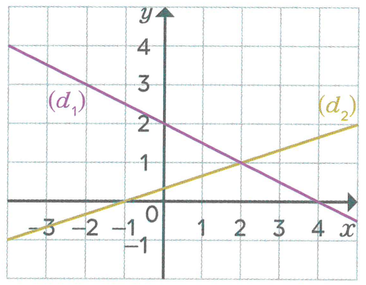
Résoudre algébriquement :

- $k(x)=0$
- $h(x)-k(x)\leqslant 0$
- $h(x)\times k(x)\leqslant 0$
- $\dfrac{h(x)}{k(x)}\leqslant 0$

III (d_1) et (d_2) sont les représentations graphiques des fonctions affines f_1 et f_2 définies sur $[-4\,;5]$.

1 À l'aide du graphique, déterminer le signe de la fonction g définie sur $[-4\,;5]$ par :
$g(x)=f_1(x)\times f_2(x)$.

2 Déterminer les expressions algébriques des fonctions f_1 et f_2.



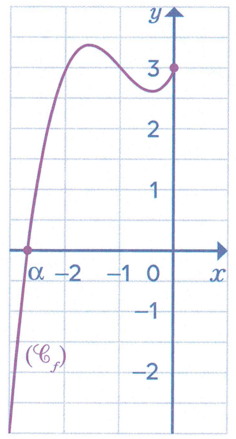
Bloc 4

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F11V04

La fonction f définie sur $[-3\,;0]$ par :
$f(x)=x^3+3x^2+2x+3$
est représentée ci-contre par $(\mathscr{C}_f)$.

On observe que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $[-3\,;-2]$.

La fonction Python ci-dessous permet d'obtenir une approximation de la valeur de α à 10^{-3} près.




```
1   def racine(a,b):
2       m=(a+b)/2
3       while abs(m**3+3*m**2+2*m+3)>=10**-3:
4           if m**3+3*m**2+2*m+3<0:
5               a = m
6               m=(a+b)/2
7           else:
8               b = m
9               m = (a+b)/2
10      return round(m, 3)
```

1 Expliquer la ligne 3 et la ligne 10.

2 Recopier et exécuter le script ci-dessus. Que renvoie l'instruction : `>>> racine(-3,-2)` ?

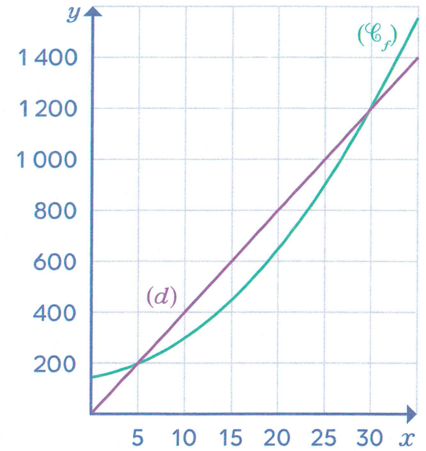
3 Proposer les modifications nécessaires afin de contrôler la précision de l'approximation.

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F11V05

PARTIE I

$(\mathscr{C}_f)$ et (d) sont respectivement les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $[0\,;35]$.



1 Résoudre graphiquement :
$f(x)=g(x)$ puis $f(x)>g(x)$

2 On considère la fonction h avec $h(x)=g(x)-f(x)$.

a Donner l'ensemble de définition de h.

b Dresser le tableau de signes de h.

PARTIE II

La fonction f est définie par $f(x)=x^2+5x+150$.

1 Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine g représentée par (d).

2 Montrer que $h(x)=(-x+5)(x-30)$.

3 En utilisant un tableau de signes, résoudre $h(x)>0$

PARTIE III

Une entreprise a une capacité de production maximale mensuelle de 350 unités.
On suppose que toute la production est vendue chaque mois.
Le coût de production, en milliers d'euros, pour x dizaines de produits est $C(x)=x^2+5x+150$.
La recette, en milliers d'euros, obtenue par la vente de x dizaines de produits est donnée par la fonction $R(x)=40x$.

1 Calculer $C(0)$. Interpréter ce résultat.

2 Calculer le bénéfice réalisé pour la production et la vente de 10 unités ($x=1$), puis de 60 unités.

3 Bénéfice positif (plage de rentabilité)

a Montrer que le bénéfice réalisé est donné par la fonction B telle que $B(x)=-x^2+35x-150$.

b En utilisant la partie II, déterminer la plage de production qui permet un bénéfice positif.

4 Bénéfice maximal (rentabilité maximale)

a Montrer que pour tout $x\in[0\,;35]$:

$$B(x)=-\left(x-\frac{35}{2}\right)^2+\frac{625}{4}$$

b En déduire le nombre d'unités à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

c Déterminer ce bénéfice en euros.

2de

Fonctions équations et inéquations

11

Fonctions

→ Objectifs visés

Être capable de

- Faire le lien entre solutions d'une équation du type $f(x)=g(x)$ et abscisses des points d'intersection des représentations graphiques $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.
- Résoudre graphiquement une inéquation.
- Interpréter graphiquement les solutions d'une inéquation.
- Mettre en œuvre un algorithme de dichotomie pour trouver une valeur approchée d'une solution dans un intervalle donné.
- Résoudre algébriquement des équations ou des inéquations.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre points d'intersection de deux courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ qui sont donnés par leurs coordonnées (abscisse ; ordonnée) et solutions d'une équation $f(x)=g(x)$ qui sont les abscisses de ces points d'intersection.
- Confondre relation d'ordre et position relative. Ainsi, l'inéquation $f(x)>g(x)$ se traduit par $(\mathscr{C}_f)$ strictement au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

Méthode algébrique : $f(x)=g(x)$ ou $f(x)<g(x)$

Soient f, g et h des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=4x+7$; $g(x)=9x+10$ et $h(x)=81x^2+4x+3$

Résoudre algébriquement $f(x)<g(x)$.

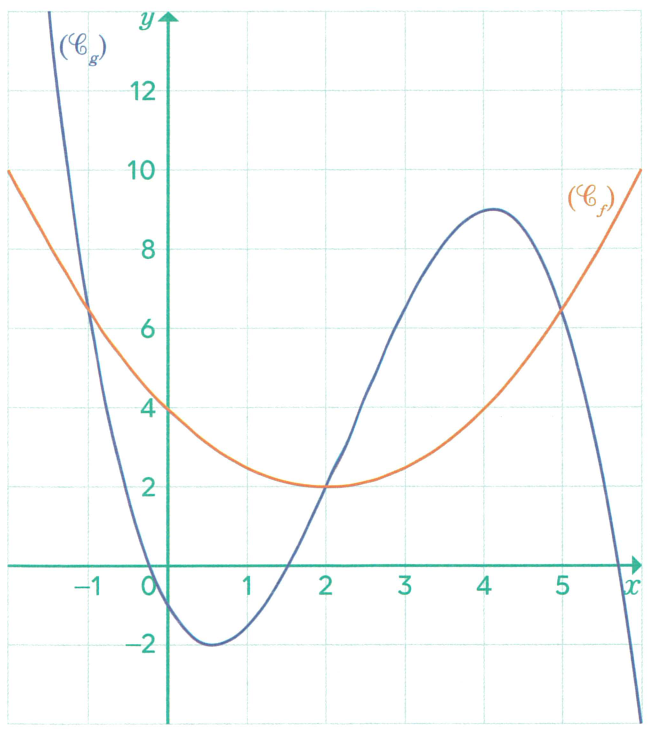
Résoudre algébriquement $h(x)=f(x)$.

Méthode graphique : $f(x)=g(x)$ ou $f(x)<g(x)$

$f(x)=g(x)$: on cherche les **abscisses des points d'intersection de** $(\mathscr{C}_f)$ **et** $(\mathscr{C}_g)$.

$f(x)<g(x)$: on cherche les **abscisses des points de** $(\mathscr{C}_f)$ **situés en dessous de** $(\mathscr{C}_g)$.

Soient les fonctions f et g définies sur $[-2\,;6]$. et $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives.



Résoudre graphiquement :

$f(x)=g(x)$

$S=$ ....

$f(x)<g(x)$

$S=$ ....

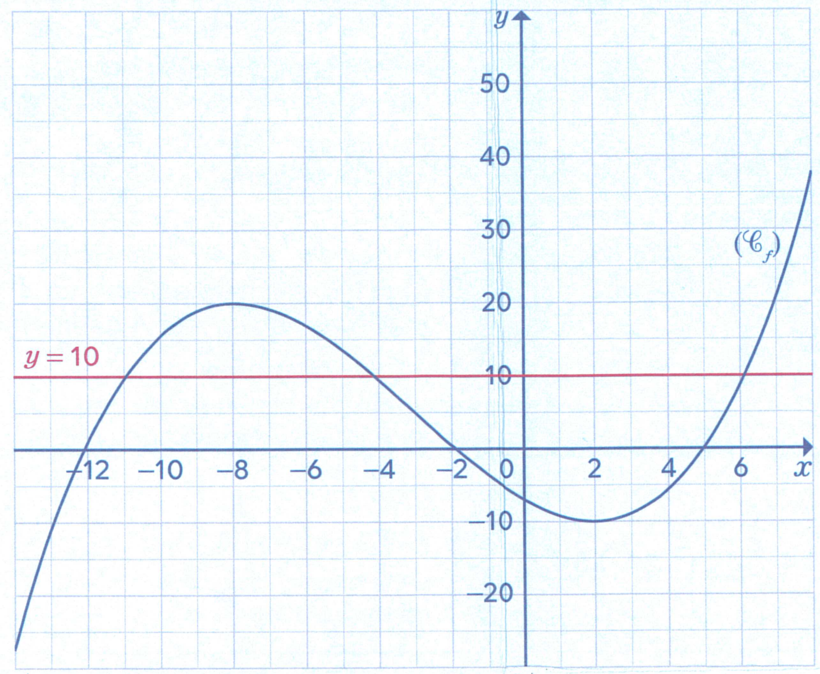
Fonctions
Équations
Inéquations

Résolution graphique de $f(x)=k$

$f: x \mapsto f(x)$ avec $x \in \mathscr{D}_f$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

On cherche les **abscisses des points d'intersection de** $(\mathscr{C}_f)$ **avec la droite d'équation** $y=k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Soit f une fonction définie sur $[-14\,;8]$. Résoudre graphiquement :



$f(x)=10$

$S=$ ....

$f(x)=50$

$S=$ ....

$f(x)=0$

$S=$ ....

Résolution graphique de $f(x)<k$

$f: x \mapsto f(x)$ avec $x \in \mathscr{D}_f$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique.

On cherche les **abscisses des points de** $(\mathscr{C}_f)$ **situés en dessous de la droite d'équation** $y=k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

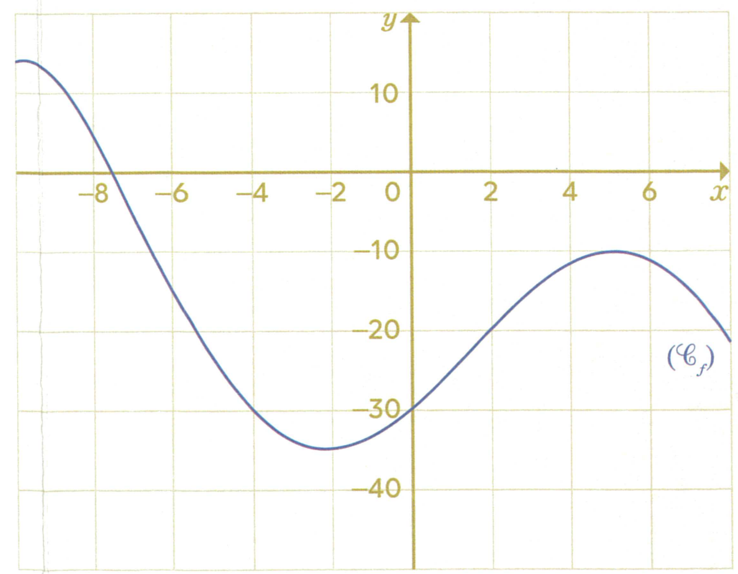
Résoudre graphiquement sur $[-10\,;8]$:

$f(x)\leqslant -15$

$S=$ ....

$f(x)<-40$

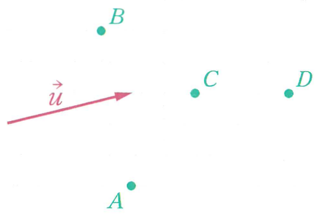
$S=$ ....



Bloc 1

Difficulté : ● 15 min. F12V01

On considère le graphique ci-dessous.
Le quadrillage est constitué de carrés de côté 1.



1 Construire le point E, image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2 a Construire un vecteur $\vec{v}$ de direction (CD), de sens de D vers C et de norme 6.

b Exprimer $\vec{v}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$\vec{v} = $ ....

3 a Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

b Le quadrilatère $ABCF$ est un ....

4 a Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\ \overrightarrow{AC}$.

b C est .... de ....

5 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = $ ....

Bloc 2

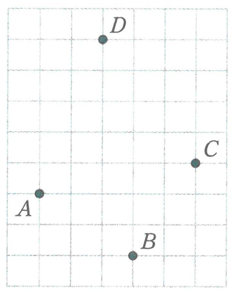
Difficulté : ●○○ 15 min. F12V02

I Tracer les vecteurs :

1 $\vec{u}$ d'origine A, tel que :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

2 $\vec{v}$ d'origine A, tel que :
$\vec{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

3 Justifier que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.



....

....

II Le graphique ci-dessous représente les points A, B, C, D et E d'une droite (Δ).
Déterminer k pour chacune des égalités.

1 $\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{AE}$

....

2 $\overrightarrow{EC} = k\ \overrightarrow{CD}$

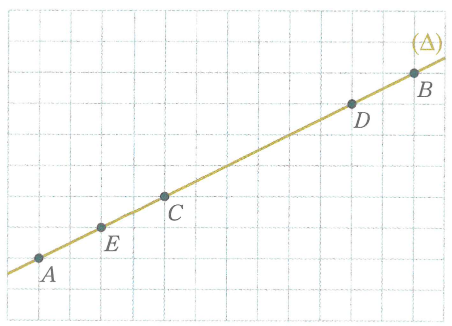
....

3 $\overrightarrow{DC} = k\ \overrightarrow{DB}$

....

4 $\overrightarrow{BD} = k\ \overrightarrow{AC}$

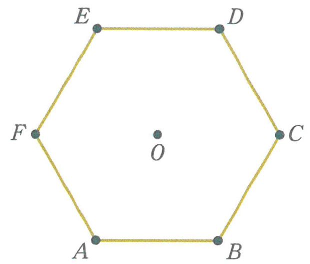
....



Bloc 3

Difficulté : ●○○ 30 min. F12V03

I Soit $ABCDEF$ l'hexagone régulier de centre O.



1 En utilisant la relation de Chasles et les lettres de l'hexagone, compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = $ .... $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO} + $ .... $= \overrightarrow{C\ldots}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{OE} = $ ....

$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{D\ldots} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{FO}$

2 En n'utilisant que les lettres de l'hexagone, déterminer les sommes suivantes.

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC} = $ .... $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DC} = $ ....

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = $ .... $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = $ ....

II Soient les points L, M, N et P tels que $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{PN}$.

1 Déterminer la nature du quadrilatère $NMLP$.

2 R est un point et S l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{PR}$. Donner la nature de $PRSN$.

3 En déduire que $LMSR$ est un parallélogramme.

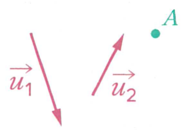
Bloc 4

Difficulté : ● 20 min. F12V04

I a Compléter le programme ci-dessous qui permet de construire le vecteur $\vec{w}$, somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, à partir d'un point A.

- Construire le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Construire le point C tel que $\vec{v} = $ ....
- Utiliser la relation de .... pour en déduire que $\vec{w} = $ ....

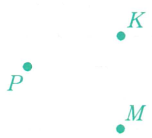
b En utilisant le programme, construire le représentant de $\vec{s} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ d'origine A.



II a Compléter le programme de construction de :
$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

- Construire le point D afin que $ABDC$ soit un ....
- $\vec{w} = $ ....

b Construire $\vec{s} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PK}$ d'origine P en utilisant ce programme.



Bloc 5

Difficulté : ●● 45 min. F12V05

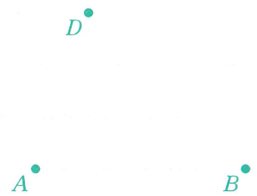
PARTIE I

1 Soient L et P deux points du plan et K le milieu de $[LP]$. Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MP} = 2\ \overrightarrow{MK}$.

2 Soient M et S deux points du plan, justifier que M' est le symétrique de M par rapport à S si et seulement si S est le milieu de $[MM']$.

PARTIE II

Soient A, B et D trois points non alignés, comme indiqué dans la figure ci-dessous :



1 On considère le point C, image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a Donner la nature du quadrilatère $ABCD$.

b Donner le vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AD}$.

c En déduire que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

2 Montrer que :

a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\ \overrightarrow{AB}$

b $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = 2\ \overrightarrow{AD}$

3 Montrer que pour tout point M du plan :
$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}$

PARTIE III

On considère la figure de la partie II.

1 Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

2 Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$.

3 Déterminer la nature du quadrilatère $DBCF$.

4 Montrer que $BECD$ est un parallélogramme.

5 Soit G le symétrique de A par rapport à C.
Montrer que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EG}$

OCTOMAP 2de

Géométrie

Notion de vecteurs

12

→ Objectifs visés

Être capable de

- Savoir qu'un vecteur est caractérisé par :
  - une direction ;
  - un sens ;
  - une longueur.
- Maîtriser la relation de Chasles.
- Effectuer des opérations sur les vecteurs.
- Utiliser une égalité de vecteurs pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre direction et sens, pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$:
  - la direction : la même que la droite (AB) ;
  - le sens : du point A vers le point B.
- Ne pas faire un schéma à main levée d'une égalité de vecteurs avant d'en déduire la nature du quadrilatère associé.
- Oublier que le centre de symétrie est le milieu du segment formé par le point et son image.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors le parallélogramme est $ABDC$ et non $ABCD$.

Notion de vecteurs

Multiplication par un réel

F12R05

Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan et k un réel.

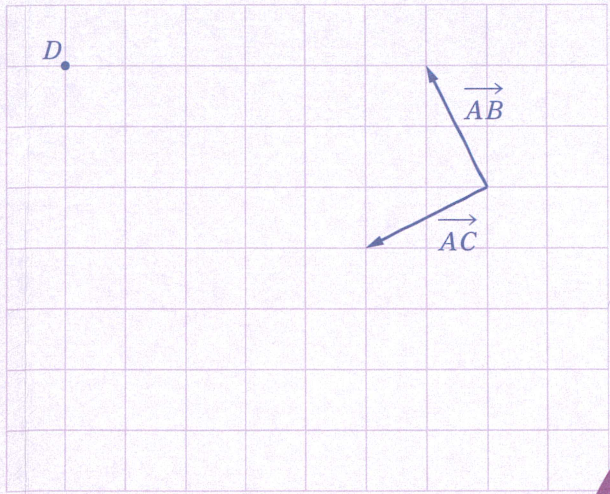
Si $k = 0$ $\quad k\vec{u} = \vec{0}$

Si $k \neq 0$ $\quad k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
- Si $k > 0$ même sens $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$
- Si $k < 0$ sens opposés $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$

$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$



Construire les points M et N tels que :

$\overrightarrow{DK} = -3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Vocabulaire

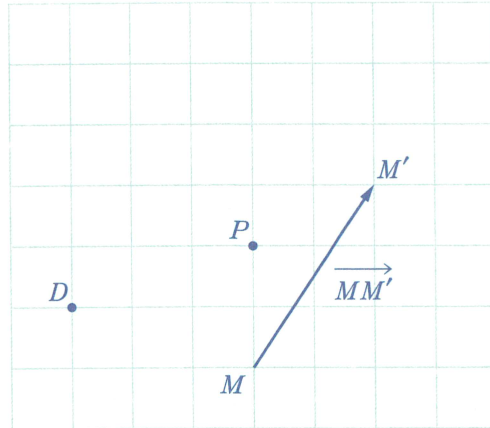
F12R01

Le **vecteur** $\overrightarrow{MM'}$ caractérise la translation qui transforme un point M en un point M' avec $(M \neq M')$.

$\overrightarrow{MM'}$:
- une **direction** (celle de la **droite** (MM'))
- un **sens** (de M vers M')
- une **norme**, notée $\|\overrightarrow{MM'}\|$ (longueur MM')

origine du vecteur $\overrightarrow{MM'}$

extrémité du vecteur $\overrightarrow{MM'}$



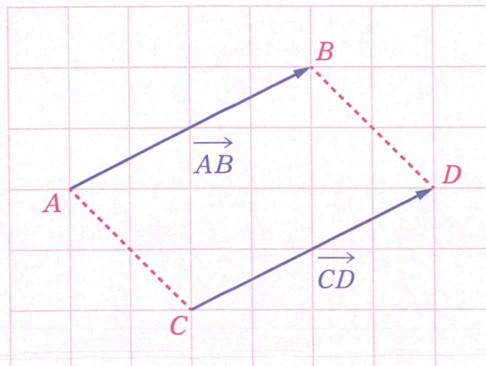
Sur la figure ci-dessus, construire les images des points D et P par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Égalité de vecteurs

F12R02

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: les vecteurs ont
- la **même direction**
- le **même sens**
- la **même norme**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



$KLMN$ et $KNEF$ sont des parallélogrammes.

Justifier que $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{FE}$:

$KLMN$ est un parallélogramme ⇔ ....

$KNEF$ est un parallélogramme ⇔ ....

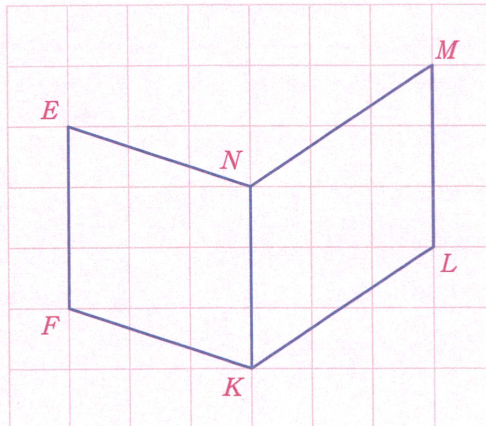
Donc ....

Justifier que $\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{EM}$

....

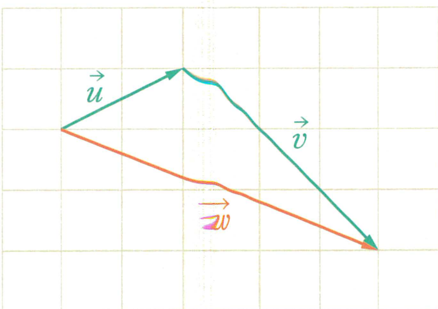
....

....



Somme de vecteurs

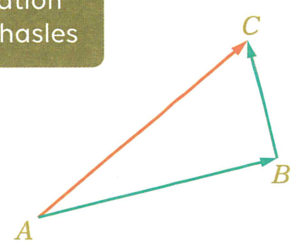
La somme de **deux vecteurs** est l'enchaînement de **deux translations** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.



Soient A, B et C trois points quelconques du plan. On a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles



Simplifier :

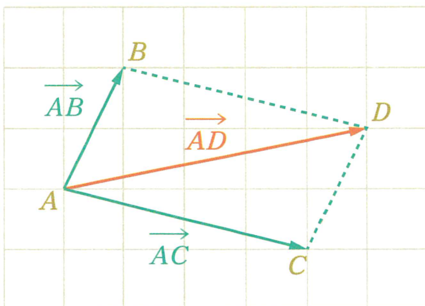
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} =$ .... $\quad \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM} =$ ....

$\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} =$ .... + ... = ...

Règle du parallélogramme

Soient A, B et C trois points distincts non alignés.

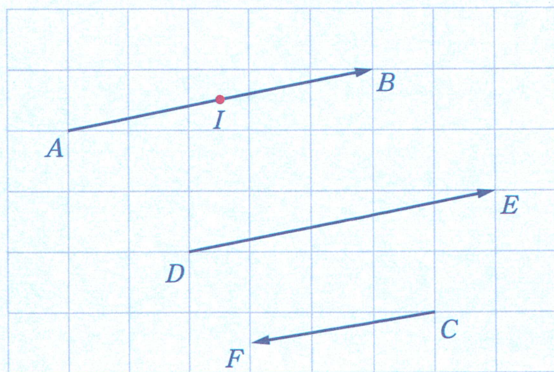
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si .... est un parallélogramme.



F12R04

Vecteurs particuliers

F12R03



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont **opposés**.

Ils sont de
- **même direction**
- **sens opposés**
- **même norme** $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$

$\Big\}\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{IA}$ **opposé à** $\overrightarrow{IB}$ ⇔ I est le **milieu** de $[AB]$ ⇔ $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DE}$ ont la même direction : ils sont **colinéaires**.

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F13V01

Le plan étant muni d'une origine O et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Soient $A(2;3)$ et $B(-3;-2)$.

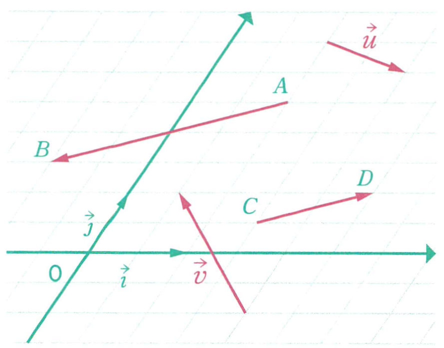
- le couple de coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ est ....
- $\overrightarrow{AB} =$ .... $\vec{\imath}$ .... $\vec{\jmath}$
- I est le milieu de $[AB]$, I (............ ; ....)

2 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

- $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$, le couple de coordonnées de $\vec{s}$ est ....
- $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$, le couple de coordonnées de $\vec{d}$ est ....
- $\vec{p} = -2\,\vec{u}$, le couple de coordonnées de $\vec{p}$ est ....

3 À partir de la figure ci-dessous :

- Lire les coordonnées des quatre vecteurs.
- Dessiner les vecteurs $\overrightarrow{BE} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AF} = -2\,\vec{u}$.



Bloc 3

Difficulté : ●●● — 45 min. — F13V03

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$.

1 Déterminer x tel que $2\,\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

2 Existe-t-il des réels x et k pour que $\vec{s} = k\,\vec{u} + \vec{v}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$? Justifier la réponse.

II Soient $A(-2;-1)$, $B(2;4)$ et $C(4;-2)$.

1 Déterminer les coordonnées du point K telles que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2 Déterminer les coordonnées de Ω, milieu de $[BC]$.

3 En déduire que Ω est le milieu de $[AK]$.

4 Faire une figure.

III Soient $ABCD$ un parallélogramme, I milieu de $[DC]$ et K milieu de $[AB]$.

$A(3;-2)$, $B(9;6)$ et $C(3;11)$.

1 Donner les coordonnées des points D, I et K.

2 On considère les points M et P tels que :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\quad \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Montrer que $KPIM$ est un parallélogramme.

3 Montrer que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PB}$.

Bloc 5

Difficulté : ▮▬▮ — 60 min. — F13V05

PARTIE I

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soient les points $A(3;-1)$, $B(1;3)$, $C(5;5)$ et $D(7;1)$.

1 Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

2 Montrer que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu Ω.

3 En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

4 Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a Déterminer les coordonnées de M, l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

b Déterminer les coordonnées de P, le symétrique de M par rapport à B.

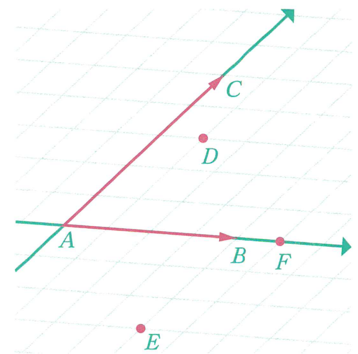
5 Soit R le point du plan tel que $\overrightarrow{KR} = 2\,\overrightarrow{KL}$. Déterminer les coordonnées de R.

6 Montrer que $PMKR$ est un parallélogramme.

7 Faire une figure.

PARTIE II

Le plan étant muni du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.



1 Déterminer les réels α et β tel que :

a $\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

b $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

c $\overrightarrow{AF} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

2 En déduire, dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$.

3 Déterminer la nature du quadrilatère $AEFD$.

PARTIE III

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et $AB = 1$.

Les points K et L sont tels que $\overrightarrow{BK} = 2\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{KL} = 2\,\overrightarrow{AC}$.

1 Justifier la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2 Déterminer les coordonnées des points K et L dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

3 Déterminer les coordonnées des points K et L dans le repère $(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.

4 Faire une figure.

Bloc 2

Difficulté : ●●○ — 35 min. — F13V02

Le plan (P) étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$.

1 Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$.

2 $M \in (P)$, N est l'image de M par translation de vecteur $\vec{u}$ et K est l'image de M par translation de vecteur $\vec{v}$.
Démontrer que MNK est un triangle rectangle.

3 Faire une figure.

II Soient les points $A(-2;-3)$, $B(3;1)$ et $I(1;-1)$.

1 Déterminer les coordonnées de C, symétrique de A par rapport à I.

2 Déterminer les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

3 Justifier que $\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BI}$.

4 En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

5 Faire une figure.

III Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1 Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

2 Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 20 min. — F13V04

Rappel :
Un triangle est rectangle si et seulement s'il est inscriptible dans un demi-cercle dont le diamètre est le plus grand côté.

On considère un triangle ABC dont le plus grand côté est le segment $[AB]$ et le script Python suivant :

```
1   from math import sqrt
2
3   #[AB] est le côté le plus long du triangle ABC
4   def test(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
5       xI = (xA+xB)/2
6       yI = (yA+yB)/2
7       r1 = sqrt((xA-xI)**2+(yA-yI)**2)
8       r2 = sqrt((xC-xI)**2+(yC-yI)**2)
9       if r1 == r2:
10          return "Le triangle est rectangle"
11      else :
12          return "Le triangle n'est pas rectangle"
```

1 Expliquer les lignes 5 et 6.

2 Recopier le script dans un éditeur Python.

a Que renvoie l'instruction >>> test (2, 3, 4, -5, 1, 2) ?

b Que renvoie l'instruction >>> test (2, 3, 4, -5, 4, 3) ?

3 Justifier par le calcul les résultats obtenus à la question précédente.

Vecteurs et coordonnées

13

Géométrie

2de

→ Objectifs visés

Être capable de

- ↗ Savoir utiliser les formules de calcul des coordonnées d'un vecteur connu par :
  - les coordonnées de ses extrémités ;
  - une égalité vectorielle.
- ↗ Maîtriser la détermination des coordonnées d'un point donné dans une égalité vectorielle.
- ↗ Maîtriser les formules de calcul des coordonnées d'un milieu.
- ↗ Maîtriser le calcul de la norme d'un vecteur.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- ↗ Confondre abscisse et ordonnée d'un vecteur.
- ↗ Ne pas comprendre et apprendre par cœur les formules.
- ↗ Ne pas conforter ses résultats par la réalisation d'un schéma.
- ↗ Erreurs basiques de calcul notamment lorsque les coordonnées sont négatives.

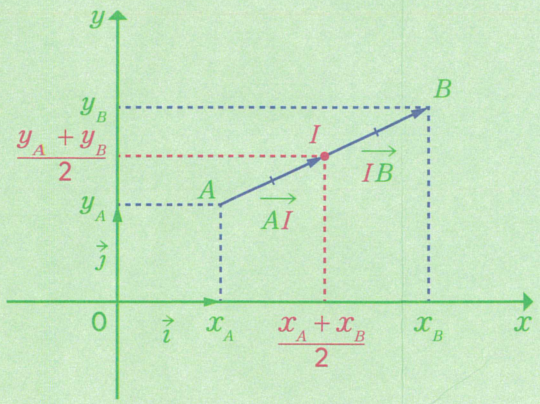
Vecteurs et coordonnées

Milieu d'un segment

Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$.

$I\,(x_I\,;y_I)$ est le **milieu de** $[AB]$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$



Soient A (1 ; –2) et B (5 ; 4) deux points du plan.

Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AB]$:

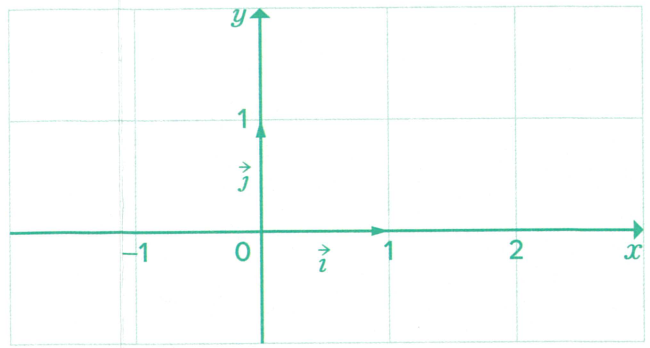
F13R06

Repère orthonormé

Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux **vecteurs non nuls, orthogonaux** du plan tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

$(\vec{i}, \vec{j})$: **base orthonormée** du plan

$(O\,;\vec{i}, \vec{j})$: **repère orthonormé** du plan



F13R01

Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont **proportionnelles**.

$\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont **colinéaires**.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées de $-2\vec{u}$:

F13R05

Somme de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

alors $\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$:

F13R04

Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Soit $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Soient les points $A(-2\,;4)$ et $B(3\,;1)$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et sa norme $\|\vec{AB}\|$:

F13R03

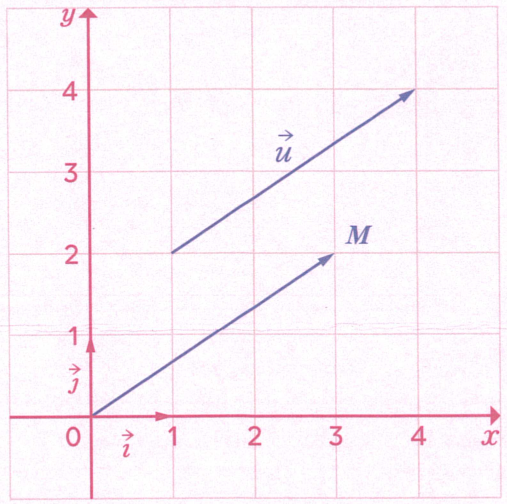
Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles de l'unique point $M(x\,;y)$ tel que :

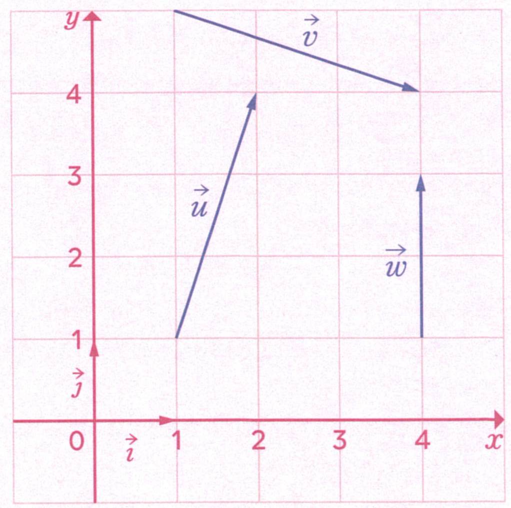
$$\vec{OM} = \vec{u}$$

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u}\,(x\,;y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

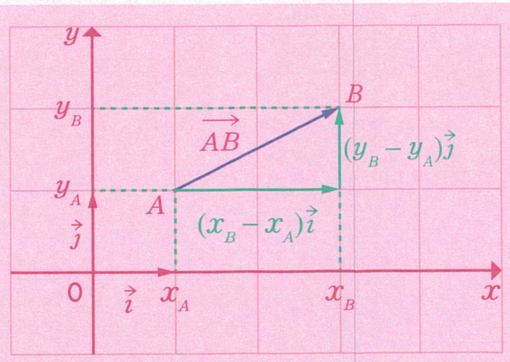


Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Soient les points $A\,(x_a\,;y_a)$ et $B\,(x_b\,;y_b)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



On considère les points suivants dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$:
M (2 ; 1), N (4 ; 3), R (3 ; 4) et S (–1 ; 3).

Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{RS}$.

F13R02

Bloc 1
Difficulté : ● | 30 min. | F14V01

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

I Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même direction, de sens opposés et la norme de $\vec{u}$ est le tiers de celle de $\vec{v}$. $\vec{v}$ = ... $\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....

II Étude de la colinéarité de deux vecteurs

1 $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$. Existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$?

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : ☐ Vrai ☐ Faux

2 $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\-14\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\10\end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : ☐ Vrai ☐ Faux

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? ☐ Oui ☐ Non

III Soient $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(-8;5)$, $D(-4;3)$ et $E(2;0)$. Dans chacun des cas, compléter par : alignés, non alignés, parallèles ou non parallèles.

1 Les points A, B et C sont ....
2 Les points C, D et E sont ....
3 Les droites (AB) et (CD) sont ....
4 Les droites (AC) et (BE) sont ....

Bloc 2
Difficulté : ●● | 45 min. | F14V02

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

I Soient $Q(1;2)$, $R(3;5)$, $S(4;3)$ et $T(x;-6)$

1 Donner un vecteur directeur de la droite (QR).
2 Déterminer une équation cartésienne de (QR).
3 Déterminer x de sorte que (QR) et (ST) soient parallèles.

II Soient les points $A(-4;2)$, $B(2;4)$ et $C(5;-2)$.

1 Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AB]$.
2 Déterminer les coordonnées des points M et P sachant que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3 Étudier l'alignement des points I, M et P.

III Soient A, B et C trois points non alignés.

1 Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan et donner les coordonnées de A, B et C.
2 Déterminer les coordonnées de K, L et M tels que :
- $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- M est le symétrique de B par rapport à C.
- $\overrightarrow{AL} = 2\,\overrightarrow{CB}$

3 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{ML}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.
4 Étudier l'alignement des points K, L et M.

Bloc 3
Difficulté : ●● | 35 min. | F14V03

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

I Dans chacun des cas, déterminer m de sorte que les deux vecteurs soient colinéaires.

1 $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-1\\m\end{pmatrix}$

2 $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}m+2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

3 $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}m+1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}2\\m+1\end{pmatrix}$

II $A(2;-1)$, $B(-2;1)$, $C(1;4)$, $D(x_D\,;y_D)$ et $E(3;y_E)$.

1 Déterminer $(x_D\,;y_D)$ sachant que $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{BC}$.
2 En considérant $D(8;5)$, déterminer y_E sachant que B, E et D sont alignés.
3 **a** Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BD} = k\,\overrightarrow{BE}$.
b Que peut-on en déduire ?

III Soient $L(1;-1)$, $M(x;-3)$, $N(-2;1)$ et $R(-1;0)$

1 Déterminer x sachant que $M \in (NL)$.
2 En déduire que L est le milieu de $[NM]$.
3 Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par M et parallèle à (RN).
4 Déterminer les coordonnées de P pour que $NRMP$ soit un parallélogramme.

Bloc 4
Difficulté : ● | 20 min. | F14V04

1 Compléter les fonctions ci-dessous afin de tester l'alignement de trois points ou la colinéarité de deux vecteurs.

```
def testAlignement(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
    d=(xB-xA)*(......)-(......)*(xC-xA)
    if d==0:
        return "Les points ..............."
    else:
        return "Les points ..............."


def testVecCol(xu,yu,xv,yv):
    d=xu*... - ...*xv
    if d!=0:
        return "Vecteurs ................."
    else:
        return "Vecteurs ................."
```

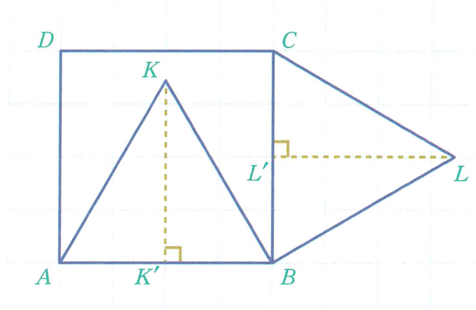
2 Que devraient renvoyer les instructions suivantes ?
- `>>> testAlignement(9, 5, -4, -2, 35, 19)`
- `>>> testAlignement(9, 5, -4, -2, 7, 4)`
- `>>> testVecCol(14, -7, -6, 3).`

3 En utilisant ce script, vérifier si les points :
- $A(-1;-3)$, $B(1;3)$ et $C(3;9)$ sont alignés.
- $D(-1;10)$, $C(3;9)$ et $E(7;8)$ sont alignés.

4 En déduire les coordonnées du point commun aux droites (AB) et (DE).

Bloc 5
Difficulté : | 60 min. | F14V05

On considère $ABCD$ un carré de côté $a = 4$ cm.
ABK et BLC des triangles équilatéraux directs.
K' est le milieu de $[AB]$. L' est le milieu de $[BC]$.
Objectif : Montrer que D, K et L sont alignés.



PARTIE I Préambule

Montrer que $K'K = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, soit $K'K = 2\sqrt{3}$ cm.

PARTIE II Méthode 1

1 En utilisant la relation de Chasles, compléter :
$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{D\ldots\ldots} + \overrightarrow{A\ldots\ldots} + \overrightarrow{K'K}$
2 Montrer que $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}\overrightarrow{AD}$.
3 Exprimer $\overrightarrow{DL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4 En déduire que $\overrightarrow{DL} = (2+\sqrt{3})\,\overrightarrow{DK}$.
5 Conclure.

PARTIE III Méthode 2

On se place dans le repère $(A\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Justifier que ce repère est orthonormé.

1 Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
2 **a** Déterminer les coordonnées de K.
b En déduire que $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}-4\end{pmatrix}$.
3 **a** Montrer que L a pour coordonnées $(2\sqrt{3}+4\,;2)$.
b En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DL}$.
4 Montrer que les points D, K et L sont alignés.
5 Parmi les méthodes utilisées en **Partie I** et en **partie II**, laquelle vous paraît la plus efficace ?

PARTIE IV Équation cartésienne

L'équation cartésienne de la droite (DK) est de la forme $ax + by + c = 0$. (a, b et c étant des réels).

1 Indiquer les valeurs de a et de b :
☐ $a = 2$ et $b = 2\sqrt{3}+4$
☐ $a = 2\sqrt{3}-4$ et $b = -2$
☐ $a = 2\sqrt{3}-4$ et $b = 2$

2 Déterminer c et en déduire une équation cartésienne de la droite (DK).
3 En déduire que le point $L \in (DK)$.

Vecteurs et colinéarité

Géométrie

14

2de

→ Objectifs visés

Être capable de

- Savoir démontrer la colinéarité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec deux méthodes :
  - l'existence d'un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$;
  - à l'aide du calcul du déterminant.
- Utiliser la formule du déterminant pour :
  - montrer la colinéarité de deux vecteurs ;
  - déterminer une coordonnée inconnue de deux vecteurs colinéaires.
- Utiliser la colinéarité pour étudier :
  - l'alignement de points ;
  - le parallélisme de droites.
- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre colinéarité et parallélisme. Des vecteurs colinéaires ont des directions parallèles.
- Ne pas choisir la méthode la plus rapide pour démontrer la colinéarité de deux vecteurs.
- Comparer deux vecteurs sans vérifier leur colinéarité.
- Ne pas conforter ses résultats par la réalisation d'un schéma.

Vecteurs et colinéarité

Le plan $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Points alignés

F14R06

A, B et C sont **alignés** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** (avec A, B et C distincts).

Revient à montrer que $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ ou $\overrightarrow{AB}=k\ \overrightarrow{AC}$, $k\in R$

Soient les points K, L et M tels que $\overrightarrow{KL}=-2\ \overrightarrow{KM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont .... car ....

Les points K, L et M sont ....

Les points $C(3;2)$, $D(-7;0)$ et $E\left(0;\frac{3}{2}\right)$ sont-ils alignés ?

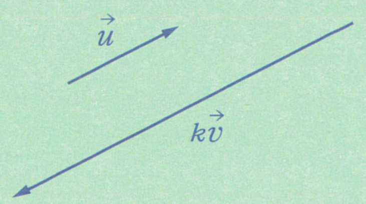
Vecteurs colinéaires

F14R01

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ **colinéaires** $\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}$; $k\in\mathbb{R}$

$(\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0})$

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.



Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

$\vec{u}\begin{pmatrix}200\\-75\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-1{,}5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? $\vec{u}\begin{pmatrix}200\\-75\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}25\\-10\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Droites parallèles

F14R05

Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

$(AB)\ //\ (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **colinéaires**

Revient à montrer que $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=0$ ou $\overrightarrow{AB}=k\ \overrightarrow{CD}$, $k\in R$

Soient $A(-3;2)$, $B(2;3)$, $C(3;2)$ et $D(-7;0)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\quad$ **det** $(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$

déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si leur **déterminant** est **nul**.

démonstration

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\\alpha\end{pmatrix}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

1 Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et conclure.

2 Déterminer α pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

F14R02

Équation cartésienne d'une droite

L'ensemble des **points** $M(x;y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ est une droite de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

a et b ne sont pas nuls en même temps.

Soit (d) d'équation $3x+4y-5=0$. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).

Soient (d) une droite du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) et $A(1;3)\in(d)$.

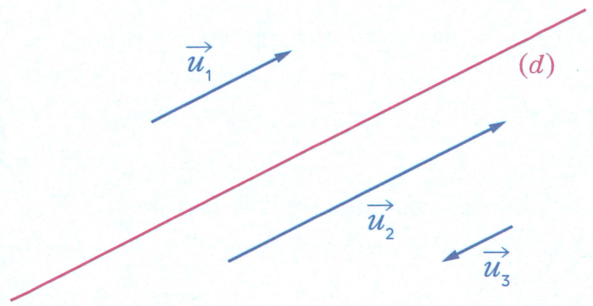
Déterminer l'équation cartésienne de (d).

F14R04

Vecteur directeur

On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) du plan tout vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$ de **même direction** que la droite (d).

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d) et $k\in\mathbb{R}^*$, $\vec{v}=k\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d).



Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d).

À l'aide de deux méthodes de calcul, montrer que $\vec{v}\begin{pmatrix}-0{,}6\\1\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de (d).

F14R03

Bloc 1

Difficulté : ● 20 min.

F15V01

I Soit la droite (d) d'équation cartésienne $3x+2y-5=0$. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1 Le point $A\left(\frac{2}{3};1\right)$ est situé sur la droite (d). ....

En effet : ....

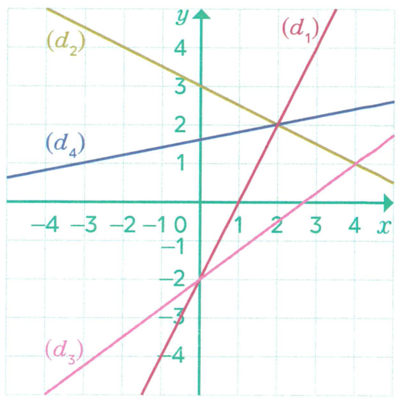
2 Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. ....

En effet : ....

3 Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$. ....

En effet : ....

II On a représenté ci-dessous quatre droites. Donner l'équation réduite de chacune d'elles :



$(d_1) : y =$

$(d_2) : y =$

$(d_3) : y =$

$(d_4) : y =$

Bloc 2

Difficulté : ●● 45 min.

F15V02

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I Chercher une équation cartésienne de la droite (d) :

1 passant par $A(-2;-1)$ et $B(3;-5)$.

2 passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

II Déterminer l'équation réduite de la droite (d) si :

1 $A(1;2)$ et $B(3;-1)$, $A\in(d)$, $B\in(d)$.

2 $A(-2;3)$, $A\in(d)$, de coefficient directeur $m=\frac{3}{2}$.

3 $A(2;-3)$, $A\in(d)$ et (d) est parallèle à la droite d'équation $y=3x-5$.

III Déterminer :

1 Une équation cartésienne de la droite dont l'équation réduite est $y=\frac{5}{3}x-1$.

2 L'équation réduite de la droite dont une équation cartésienne est $3x+4y-8=0$.

IV Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le parallélisme des droites (d_1) et (d_2).

1 $(d_1) : 2x-3y=3$ et $(d_2) : -4x+6y=3$

2 $(d_1) : y=\frac{7}{5}x+3$ et $(d_2) : \frac{7}{15}x-\frac{1}{3}y+1=0$

3 $(d_1) : 3x-2y-1=0$ et $(d_2) : 6x+4y-2=0$

Bloc 3

Difficulté : ▮━▮ 45 min.

F15V03

I Soit (d) la droite d'équation $2x-3y-6=0$

1 **a** Montrer que (d) ne passe pas par $A(1;2)$.

b Déterminer une équation de la droite (d') passant par A et parallèle à (d).

2 **a** Justifier que la droite (Δ) d'équation $3x+2y+k=0$ n'est pas parallèle à (d).

b Déterminer k, pour que $B(6;2)$ soit commun à (d) et à (Δ).

II On considère la famille de droites (d_m) d'équation : $(m+1)x+(m-2)y=6m$

1 Déterminer m de sorte que (d_m) soit parallèle à l'axe des ordonnées, puis donner son équation.

2 Déterminer m de sorte que (d_m) soit parallèle à l'axe des abscisses, puis donner son équation.

3 Vérifier que toutes les droites (d_m) passent par un même point P. Donner ses coordonnées.

III Soit la famille de droites (d_m) d'équation : $(m^2-2)x+(m-2)y-m=0$

1 **a** Montrer qu'il existe deux paramètres m tels que (d_m) passe par le point $A(1;1)$.

b Déterminer une équation cartésienne de chacune de ces droites.

2 **a** Développer $(m-2)(m+3)$.

b Montrer qu'il existe deux droites qui passent par le point $B(1;2)$.

Bloc 4

Difficulté : ● 20 min.

F15V04

On considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
Une équation cartésienne de la droite (AB) est :
$(y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-(y_B-y_A)x_A+(x_B-x_A)y_A=0$

1 Donner une équation de (AB) si $A(1;-1)$ et $B(-1;2)$.

En Python, la fonction `str()`, convertit une quantité numérique en chaîne de caractères (*string*). Exemple :

```
a = 5
print ("Le double de a est" + str(2*a) + ".")
```

Le résultat de l'exécution est : Le double de a est 10.

2 En utilisant les informations ci-dessous, compléter le script suivant de sorte qu'il renvoie une équation cartésienne d'une droite (AB) définie par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

```
def eqCartesienne(xA,yA,xB,yB) :
    a = ........
    b = ........
    c = ......................
    phrase ="Une équation cartésienne de (AB) est"
    equation = str(a)+"x + "+str(b)+"y+"+str(c)+" = 0"
    reponse = phrase + equation
    return reponse
```

3 Que renvoient les instructions ?
`>>> eqCartesienne(-2, -4, 2, 1) ?`
`>>> eqCartesienne(2, -4, 2, 1) ?`

4 Quelles sont les limites de ce programme ?

Bloc 5

Difficulté : ●●● 45 min.

F15V05

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

PARTIE I Démonstration

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (d) et $A(5;7)$ un point de (d).

1 Montrer qu'une équation cartésienne de (d) est $3x-2y-1=0$.

2 En déduire que tout point $P(5+2k;7+3k)$ du plan est situé sur (d).

Généralisation : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite (d) et $A(x_A;y_A)$ un point de (d) à coordonnées entières. Dans le cas où, a et b sont des entiers premiers entre eux, l'ensemble des coordonnées entières des points de (d) est : $\{(x_A+ak;y_A+bk)\mid k\in\mathbb{Z}\}$

PARTIE II Application

1 Soit $(d) : 2x+3y-1=0$

a Justifier que $A(-1;1)\in(d)$.

b En déduire l'ensemble des coordonnées entières des points de (d).

2 Trouver l'ensemble des couples d'entiers vérifiant l'équation de la droite suivante :
$(\Delta) : 3x-2y-1=0$

PARTIE III Encore une application

Julie, une *wedding planner*, négocie auprès d'un fournisseur un ensemble comportant deux tables et neuf chaises au prix de 485 €.

On pose x : le prix d'une table
y : le prix d'une chaise.

1 Traduire la situation à l'aide d'une équation.

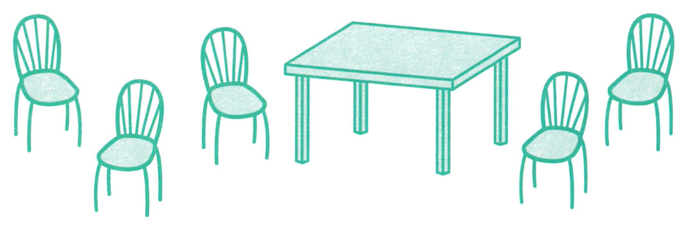
2 Quel serait le prix d'une table si elle optait pour des chaises à 45 € l'unité ? Commenter le résultat.

3 Pour obtenir des calculs plus simples, Julie souhaite négocier les prix d'achat et avoir les valeurs de x et y entières.

En utilisant la méthode vue dans les parties I et II, donner l'ensemble des couples d'entiers vérifiant l'équation.

4 Pour son image de marque, Julie souhaite proposer des produits fabriqués en France à ses clients : le prix d'achat d'une chaise est supérieur à 20 € et celui de la table est supérieur à 50 €.

Donner l'ensemble des couples de prix pouvant satisfaire ces nouvelles contraintes.



2de OCTOMAP

Géométrie

Équations de droites

15

→ Objectifs visés

Être capable de

↗ Savoir qu'une droite peut être définie par :
- une équation cartésienne ;
- une équation réduite ;
- la représentation graphique d'une fonction affine.

↗ Déterminer l'équation d'une droite connaissant :
- sa représentation graphique ;
- deux points de la droite ;
- un point et un vecteur directeur de la droite.

↗ Maîtriser les liens entre :
- équation cartésienne et équation réduite ;
- équation cartésienne et vecteur directeur ;
- vecteur directeur et coefficient directeur.

Points de vigilance et erreurs à éviter

↗ Oublier le signe (–) en utilisant le lien entre l'équation cartésienne d'une droite et son vecteur directeur.

↗ Affirmer qu'un point appartient à une droite sans vérifier que ses coordonnées vérifient l'équation de celle-ci.

↗ Ne pas conforter ses résultats par la réalisation d'un schéma.

Droites parallèles, Alignement de points

F15R04

Soient (d_1) et (d_2) deux droites non verticales du plan admettant les équations réduites $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$

$$(d_1) \mathbin{//} (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Soit $(d_7) : y = 5x - 0{,}57$.

Déterminer l'équation réduite de la droite (d_8) parallèle à (d_7) et passant par le point $A(27\,;-34)$.

Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux.

A, B et C sont **alignés** $\Leftrightarrow$ (AB) et (AC) ont la **même pente**.

Les points $A(2\,;3)$, $B(8\,;1)$ et $C(14\,;-1)$ sont-ils alignés ? Justifier.

Équation cartésienne

F15R01

(d) est une droite du plan. Il existe trois réels a, b et c avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ tels que pour tout point $M(x\,;y) \in (d)$:

$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ **équation cartésienne** de la droite (d)

En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

démonstration

Tracer les droites et compléter par verticale, oblique ou horizontale.

$(d_1) : -7x + 4y + 6 = 0$ $(d_2) : 2y - 5 = 0$ $(d_3) : 2{,}5x + 7{,}5 = 0$

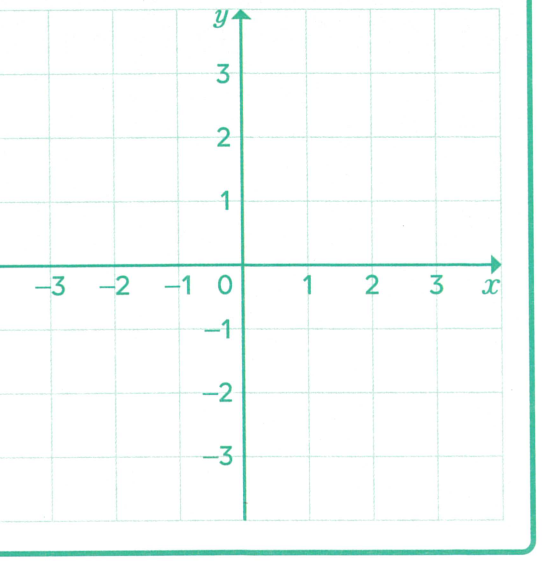
(d_1) :

x	0	2
y		

(d_1) est ....

(d_2) : (d_2) est ....

(d_3) : (d_3) est ....



Équations de droites

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

Déterminer l'équation réduite d'une droite

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.

La droite (AB) a pour pente $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

F15R03

$C(1\,;25)$ et $D(-3\,;13)$ sont deux points de (d_5).

Déterminer l'équation réduite de (d_5).

$m = ?$

$p = ?$

Équation réduite de (d_5) : ....

$N(8{,}5\,;-36)$ est un point de la droite (d_6) de pente $-4{,}8$.

Équation réduite de (d_6) : ....

Équation réduite

Cas particulier où $b \neq 0$ (droites non verticales)

L'équation cartésienne d'une droite (d) est $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

Si $b \neq 0$, l'équation réduite de (d) est : $y = mx + p$

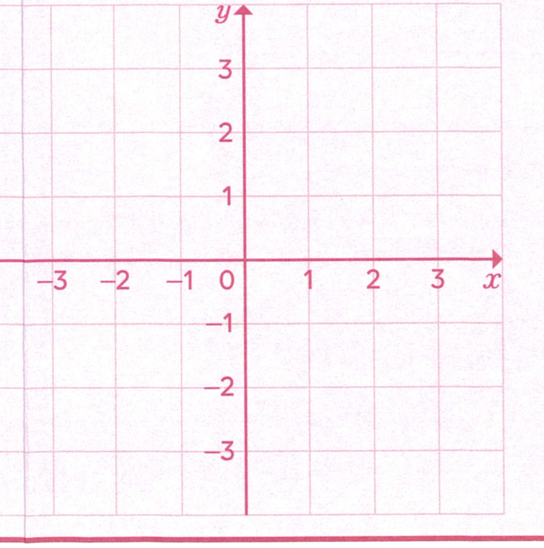
Coefficient directeur : $m = \dfrac{-a}{b}$ Ordonnée à l'origine : $p = \dfrac{-c}{b}$

$(d_4) : 4x + 2y - 5 = 0$

Équation réduite de (d_4) :

$y =$ ....

Tracer (d_4) en faisant apparaître son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.



F15R02

Système d'équations

Géométrie

16

OCTOMAP 2de

→ Objectifs visés

Être capable de

- Savoir utiliser les différentes méthodes pour résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues réelles.
- Interpréter graphiquement les solutions éventuelles d'un système d'équations.
- S'approprier la formule de calcul d'un déterminant pour vérifier l'unicité de la solution avant de résoudre le système.
- Savoir modéliser correctement des contraintes qui mènent vers la résolution d'un système.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre les inconnues mises en jeu.
- Ne pas connaître par cœur la formule de calcul d'un déterminant qui permet de gagner du temps.
- Oublier de vérifier les résultats lors d'une résolution par lecture graphique.
- Ne pas prendre le temps nécessaire pour choisir la méthode adaptée au système.
- Ne pas appliquer correctement la règle des signes, notamment lorsqu'on multiplie les membres d'une équation par un nombre négatif.

Bloc 1

Difficulté : ● — 20 min. — F16V01

I Soit le système $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

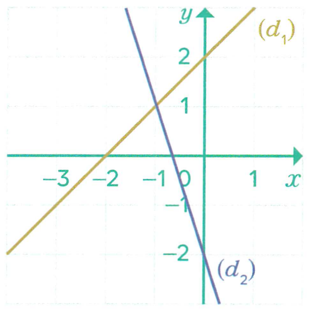
1 Le déterminant est : ....

2 Le couple $(2;1)$ est-il une solution ? ....

3 Donner une interprétation graphique : ....

....

II Les représentations des droites (d_1) et (d_2) sont données ci-contre.



1 Donner une équation de

(d_1) : .... (d_2) : ....

2 Donner un système de deux équations à deux inconnues qui admet $(-1;1)$ comme solution.

III Dans chacun des cas, calculer le déterminant du système et dire s'il admet une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions.

$(E_1) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+5y=2 \end{cases}$ ....

$(E_2) : \begin{cases} -3x+2y=1 \\ 6x-4y=-2 \end{cases}$ ....

$(E_3) : \begin{cases} 5x-2y=2 \\ -10x+4y=4 \end{cases}$ ....

Bloc 2

Difficulté : ●● — 90 min. — F16V02

I Après avoir vérifié que chaque système admet une solution unique, le résoudre :

1 par substitution

$(E_1) : \begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ $(E_2) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$

2 par combinaisons linéaires

$(E_3) : \begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$ $(E_4) : \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 5x+2y=3 \end{cases}$

II Justifier que les systèmes d'équations suivants admettent soit une infinité de solutions, soit aucune solution. Préciser l'ensemble des solutions.

$(E_5) : \begin{cases} x-2y=9 \\ 5x-10y=45 \end{cases}$ $(E_6) : \begin{cases} 3x-4y=6 \\ -3x+4y=6 \end{cases}$

III Résoudre les systèmes suivants avec la méthode la plus adaptée (substitution, combinaison ou réécriture).

$(E_7) : \begin{cases} 3x-3y=-1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ $(E_8) : \begin{cases} 4x+y=2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

$(E_9) : \begin{cases} 4x-3y=5 \\ 12x-9y=-15 \end{cases}$ $(E_{10}) : \begin{cases} 6x+4y=-8 \\ -9x-6y=12 \end{cases}$

Bloc 3

Difficulté : ▮▬▮ — 60 min. — F16V03

I On considère le système $(E) : \begin{cases} -2x^2+y^2=-3 \\ 3x^2-4y^2=2 \end{cases}$

1 On pose $X=x^2$ et $Y=y^2$.
Exprimer le système (E) en fonction de X et Y puis résoudre ce nouveau système noté (E').

2 En déduire les solutions de (E).

II Soit le système $(E) : \begin{cases} mx+2y=1 \\ 2x+my=1 \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$

1 Déterminer m tel que le système (E) n'admet pas de solution unique.

2 Pour quelle valeur de m, le système (E) admet :
- zéro solution
- une infinité de solutions. Dans ce cas, préciser l'ensemble des solutions.

III $(\mathscr{C}_f)$ est la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+2$.
On sait que $A(1;3)$ et $B(-2;1)$ sont situés sur $(\mathscr{C}_f)$.
Déterminer a et b.

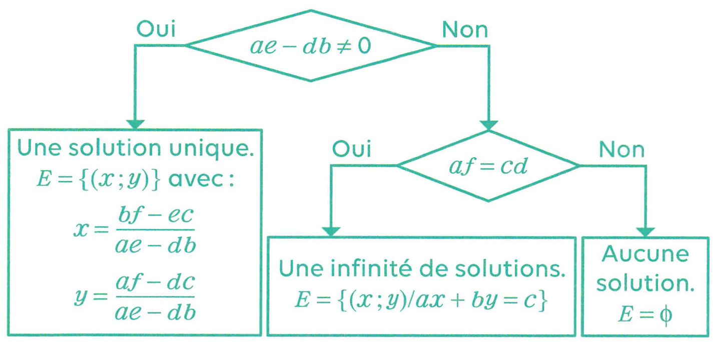
IV Résoudre les systèmes suivants en choisissant un changement de variables approprié.

$(E_1) : \begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y-1}=-2 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y-1}=5 \end{cases}$ $(E_2) : \begin{cases} 3\sqrt{x}-5y^2=-2 \\ 2\sqrt{x}+3y^2=5 \end{cases}$

Bloc 4

Difficulté : ● — 30 min. — F16V04

L'algorithme suivant permet de résoudre le système d'équations $(E) : \begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$



1 Compléter le script Python ci-dessous de façon à traduire l'algorithme précédent.

```
def systeme(a,b,c,d,e,f):
    det=a*e-b*d
    if det!=0:
        rep=".................................."
    else :
        if ......==......:
            rep="E={(x, y)|"+str(a)+"x+"+str(b)+"y="+str(c)+"}"
        else:
            rep="............................."
    return rep
```

2 Que renvoie ce script pour chacun des systèmes ?

$(E_1) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6x+9y=2 \end{cases}$ $(E_2) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 6x+9y=3 \end{cases}$ $(E_3) : \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+9y=2 \end{cases}$

Bloc 5

Difficulté : ●●● — 45 min. — F16V05

PARTIE I

Résoudre le système $(E) : \begin{cases} 50x+20y=7 \\ 100x+20y=9 \end{cases}$.

PARTIE II

On dispose de deux lots de carrelage dont les carreaux sont de forme carrée.
Lot A : de dimension « a » en centimètres.
Lot B : de dimension « b » en centimètres.

Avec 100 carreaux du lot A et 20 du lot B, on peut recouvrir, sans découpe, la surface d'un rectangle de 9 m².

Avec 50 carreaux du lot A et 20 du lot B, on recouvre, sans découpe, un rectangle de 7 m².

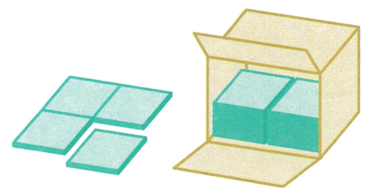
1 Traduire cette situation par un système d'équations.

2 À l'aide de la partie I, donner les solutions du système obtenu.

3 En déduire les dimensions de chacun des carreaux des lots de carrelage.

On sait que 5 carreaux du lot A avec 2 du lot B nous reviennent à 7 € et que 10 du lot A avec 2 du lot B nous reviennent à 9 €.

4 En utilisant les résultats de la partie I, déterminer le prix de chaque carreau.



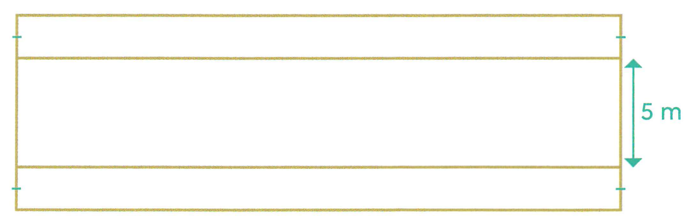
PARTIE III

On souhaite carreler, sans découpe, un salon de longueur L et de largeur l. On sait que si l'on diminue la longueur de 5 m et que l'on augmente la largeur de 3 m, la superficie ne change pas. D'autre part, si l'on augmente la longueur de 1 m et si l'on diminue la largeur de 1 m, la superficie diminue de 12 m².

1 Montrer que L et l vérifient le système :
$\begin{cases} L-l=11 \\ 3L-5l=15 \end{cases}$

2 Déterminer les dimensions du salon.

Pour des raisons esthétiques, on fait le choix de mettre sur 5 m centrés sur la largeur, les carreaux du second lot, comme indiqué ci-dessous :



3 Justifier qu'il nous faut 400 carreaux, sans découpe, du second lot pour réaliser notre projet.

4 Déterminer le nombre de carreaux, sans découpe, du premier lot nécessaires à notre projet.

5 Calculer la somme nécessaire pour l'achat du carrelage.

Système d'équations

Résolution graphique

Lire, lorsqu'il existe, le couple de coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection des deux droites associées à chacune des équations du système donné.

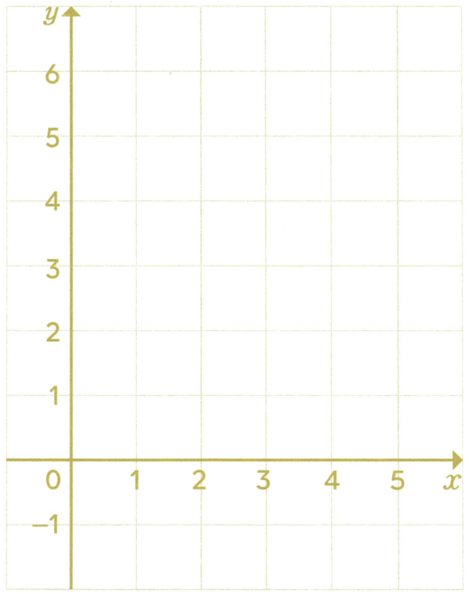
Résoudre graphiquement le système d'équations (E) : $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$

Tracer (d_1) d'équation : $2x + y = 5$

x	0	1
y	....	....

Tracer (d_2) d'équation : $-x + 3y = 1$

x	−1	5
y	....	....



D'après le graphique, la solution du système est :

....

Vérification :

Définitions

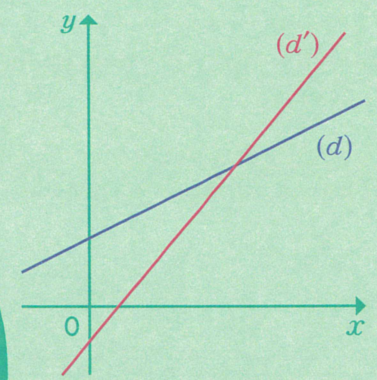
Résolution d'un système (E) de deux équations linéaires à deux inconnues réelles, représentant deux équations cartésiennes de droites (d) et (d').

$$(E) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On recherche **l'ensemble des valeurs** de tous les **couples de réels** $(x\,;y)$ qui **vérifient simultanément les deux équations** du système.

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

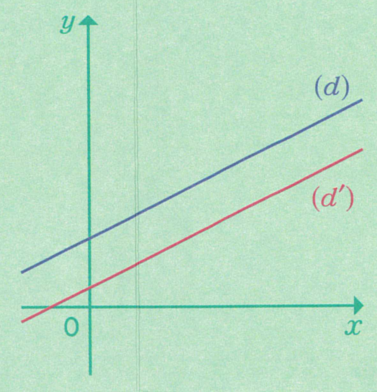
(E) a une unique solution



(d) et (d') sont sécantes.

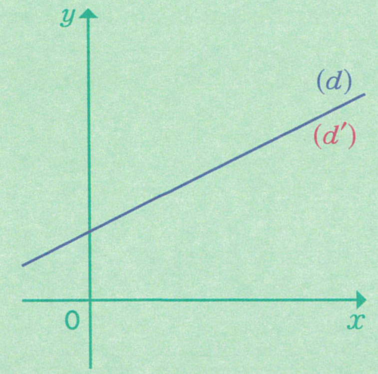
Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$

(E) n'a aucune solution



(d) et (d') sont ....

(E) a une infinité de solutions



(d) et (d') sont ....

Sans le résoudre, vérifier que le système $\begin{cases} -x + 3\ y = 1 \\ 3x + 2\ y = 8 \end{cases}$ admet une solution.

Méthode par substitution

→ On cherche à **isoler une inconnue dans** une équation pour **la substituer dans l'autre équation**

Résoudre le système d'équations (E) : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{...............} \\ 4x - 3\ y = -17 \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{...............} \\ 4x - 3 \times (\text{.....................}) = -17 \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = \text{...............} \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \text{...............} \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 + 3 \times \text{...............} \\ x = \text{...............} \end{cases}$

$(E) : \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{...............} \\ x = -2 \end{cases}$

La solution du système est ....

Méthode par combinaisons linéaires

→ On cherche à obtenir le **même coefficient** pour x (ou pour y) dans le but d'annuler les termes en x (ou en y) pour en déduire la valeur de y (ou de x).

Résoudre le système d'équations (E) : $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 5y = -7 \end{cases}$

La solution du système est ....

F16R04 F16R01 F16R03 F16R02

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F17V01

I RESSASSER est un verbe palindrome, qui se lit dans les deux sens. On place toutes les lettres du verbe dans une urne. On considère l'expérience suivante : « tirer au hasard une lettre ».

1 Compléter le tableau ci-dessous :

Issues	A	E	R	S
Probabilité				

2 Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

....

II On dispose d'un paquet de 14 cartes de couleurs blanche (B), rouge (R) ou noire (N). L'expérience consiste à tirer au hasard une carte du paquet.
Avec 200 tirages, on a obtenu les fréquences des couleurs ci-dessous :

couleur	B	R	N
fréquence	0,505	0,283	0,212

1 Pourquoi le tableau de valeurs peut-il être considéré comme une loi de probabilité ?

....

....

2 La loi de probabilité est obtenue grâce à :
☐ un modèle équiprobable.
☐ une étude statistique.

3 Quel est le nombre de cartes rouges ?

Bloc 2

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F17V02

On lance un dé équilibré à 8 faces.

1 Indiquer l'univers de l'expérience aléatoire.

2 La loi de probabilité est obtenue grâce à :
☐ un modèle équiprobable.
☐ une étude statistique.

3 La probabilité d'un événement élémentaire vaut :
☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{8}{6}$ ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{6}{8}$

4 Obtenir le nombre 6 est un :
☐ événement certain.
☐ événement élémentaire.
☐ événement impossible.

5 Obtenir un nombre inférieur ou égal à 8 est un :
☐ événement certain.
☐ événement élémentaire.
☐ événement impossible.

On considère les événements :
E : « obtenir un nombre premier »
R : « obtenir un nombre pair »

6 Indiquer les éléments des ensembles correspondant aux événements E, R, $E \cup R$ et $E \cap R$.
En déduire la probabilité de chaque événement.

7 Les événements E et R sont-ils incompatibles ?

Bloc 3

Difficulté : ●●○ — 30 min. — F17V03

I Un sondage auprès de 300 clients d'un site de vidéo en ligne à la demande a donné les préférences entre films et séries, en fonction de la catégorie d'âge.
- 90 clients ont moins de 30 ans.
- 39 clients ont moins de 30 ans et préfèrent les films aux séries.
- 51 % des clients préfèrent les films.

On note les événements :
A : « avoir moins de 30 ans » et F : « préférer les films »

1 a Que représentent les événements $\overline{A}$ et $\overline{F}$?
b Construire le tableau à double entrée.

2 Calculer $p(A)$, $p(F)$ et $p(A \cap F)$. En déduire $p(A \cup F)$.

3 Calculer de deux façons différentes $p(\overline{F})$.

II On dispose d'un dé truqué à six faces, tel que :
- La probabilité d'obtenir la face 1 est $p(1) = \alpha$.
- La probabilité d'obtenir chacune des faces 2, 3, 4 et 5 est égale au double de celle d'obtenir la face 1.
- La probabilité d'obtenir la face 6 est cinq fois plus grande que celle d'obtenir la face 1.

1 Déterminer α.

2 Compléter la loi de probabilité associée à l'expérience aléatoire : « lancer une fois le dé ».

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilité	....	....	....	....	....	....

Bloc 4

Difficulté : ●●○ — 20 min. — F17V04

En 2021-2022, environ 2 % des bacheliers en filière scientifique ont suivi une préparation aux grandes écoles.
On choisit au hasard un élève de cette promotion.
On se demande si « l'élève est inscrit en prépa ».

1 Compléter le script Python ci-dessous afin de simuler cette situation.

```
from random import*

def prepa():
    test = random()
    if test ......... :
        rep = "L'élève est inscrit en prépa."
    else :
        rep = ...
    return rep
```

2 En s'inspirant du script ci-dessus, écrire une fonction Python "gagnant()" qui simule chacune des situations suivantes et renvoie "gagnant" ou "perdant".

a On lance un dé équilibré à six faces.
Le lancer est gagnant si le nombre obtenu est un multiple de 3.

b On lance un dé équilibré à 6 faces, trois fois de suite.
Au bout des trois lancers, on gagne si la somme des trois lancers est supérieure ou égale à quinze.

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 45 min. — F17V05

PARTIE I

Un laboratoire teste un vaccin pour lutter contre une maladie sur un échantillon de 900 personnes.
Les deux tiers des personnes ont été vaccinées.
On sait qu'au total 240 personnes sont malades dans cette population et, parmi elles, 90 sont vaccinées.
On interroge au hasard une personne de cette population. On note les événements suivants :
- V : « la personne est vaccinée »
- M : « la personne est malade »

1 À partir des données ci-dessus, compléter le tableau suivant :

	Malades	Non malades	Total
Vaccinés			
Non vaccinés			
Total			

2 Déterminer $p(V)$ et $p(M)$.

3 Définir par une phrase chacun des événements suivants et calculer sa probabilité : $V \cap M$ et $V \cup M$.

4 Que représente l'événement $\overline{V \cap M}$?
Calculer $p(\overline{V \cap M})$.

PARTIE II

On s'intéresse dans cette partie à l'efficacité du vaccin à partir de l'analyse des données de la partie I.
On donne :
p_1 : la probabilité qu'une personne soit malade parmi toute la population ;
p_2 : la probabilité qu'une personne soit malade parmi le groupe des vaccinés.
Un vaccin est considéré efficace si l'indicateur $E_V > 1$ avec $E_V = \frac{p_1}{p_2}$.

1 Donner les valeurs de p_1 et p_2.

2 Déterminer E_V et conclure.

PARTIE III (échantillonnage)

Le laboratoire qui fabrique ce vaccin assure que le vaccin est efficace à plus de 85 %.
On a choisi au hasard 625 personnes vaccinées, le vaccin s'est avéré efficace pour 520 d'entre elles.
On donne $I_{95} = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

1 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à cet échantillon.

2 Que peut-on conclure quant à l'affirmation du laboratoire ? Argumenter.

2de

OCTO MAP

Statistiques et Probabilités

Probabilités

17

→ Objectifs visés

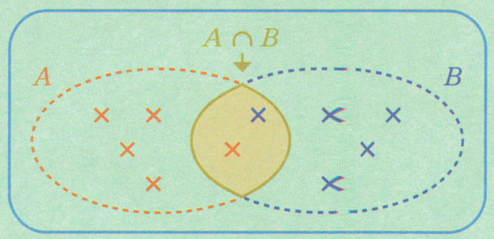
Être capable de
- ↗ Savoir utiliser le vocabulaire employé en probabilités.
- ↗ Savoir utiliser la formule : $p(A \cup B) = p(A) + (B) - p(A \cap B)$.
- ↗ Calculer des probabilités à partir :
  - d'une loi de probabilité ;
  - d'un arbre de dénombrement ;
  - d'un tableau à double entrée.
- ↗ Faire le lien entre la conjonction de coordination « ou » et la somme de probabilités dans un arbre de dénombrement ou dans une loi de probabilité.
- ↗ Savoir interpréter correctement une probabilité.

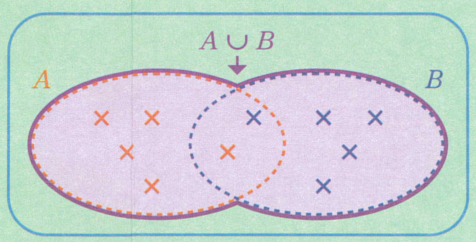
Points de vigilance et erreurs à éviter
- ↗ Ne pas prendre le temps nécessaire pour comprendre la question et pour identifier le calcul à effectuer.
- ↗ Obtenir une probabilité négative ou supérieure à 1.
- ↗ Confondre « et » et « ou ».
- ↗ Ne pas confronter ses résultats à la réalité de la situation.
- ↗ Ne pas penser à calculer l'événement contraire dans certaines situations.

Probabilités

Union et intersection d'événements

Soient A et B deux événements.





Intersection $A \cap B$: A **ET** B se réalisent.
Issues communes à A **ET** B

Union $A \cup B$: A **OU** B se réalisent.
Issues de A **OU** B

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

On lance un dé équilibré à 6 faces. Soient les événements A « obtenir un nombre pair » et B « obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 ».

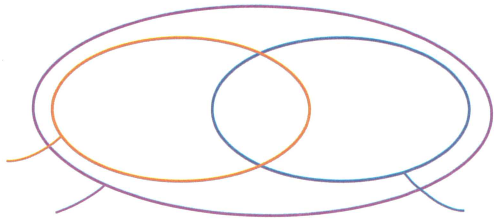
Compléter :

$A = \{$.......... ; .... ; ....$\}$ $B = \{$.......... ; .... ; ....$\}$

$A \cap B = \{$..........$\}$

$A \cup B = \{$.......... ; .... ; .... ; .... ; ....$\}$

$p(A \cup B) =$ ....

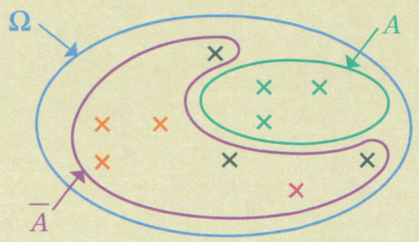


Vocabulaire

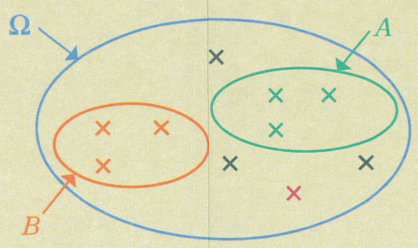
Expérience aléatoire
- On connaît tous les résultats possibles.
- **On ne peut pas prévoir le résultat** qui sera réalisé au hasard.

Ω : l'univers, ensemble de toutes les issues possibles.

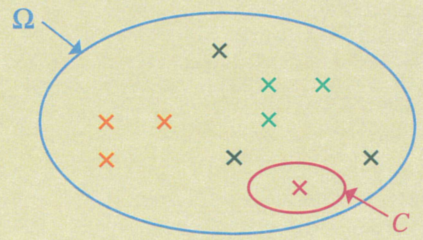
Jeter une pièce de monnaie : $\Omega = \{$Pile ; Face$\}$
Lancer un dé équilibré : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$



$\overline{A}$: événement contraire de l'évènement A ($\overline{A}$ et A sont incompatibles)



A et B : événements **incompatibles**



C : événement **élémentaire**

Ω est l'événement certain.
Un **événement impossible** ne contient **aucune issue** (un ensemble vide $\varnothing$).

On lance un dé équilibré à 6 faces. On note le chiffre obtenu à chaque lancer.

Il y a 6 issues possibles : $\Omega = \{$..............................$\}$

Soient les évènements A, B et C :

A : « obtenir un multiple de 4 » $A = \{$....................$\}$ A est un événement ....

B : « obtenir 8 » $B =$ .... B est un événement ....

C : « obtenir un nombre impair » $C = \{$....................$\}$

A et C sont deux événements ....

$\overline{C}$ est l'événement .... de C. $\overline{C} = \{$....................$\}$

Dénombrement

Dans un groupe de 30 personnes, 70 % utilisent *Instagram* et 20 % utilisent *Discord*.
Parmi celles qui utilisent *Instagram*, 18 n'utilisent pas *Discord*.
On note I : « la personne utilise *Instagram* » et D : « la personne utilise *Discord* »

Compléter :

	I	$\overline{I}$	Total
D	....	....	....
$\overline{D}$	....	....	....
Total	21	....	30

Tableau à double entrée

Une roue, formée de trois secteurs identiques, porte les nombres 1, 2 et 3.
On tourne la roue deux fois et on additionne les résultats obtenus.

1er tour : 1 2 ....

2nd tour : 1 2 .... 1 ....

Issues : 2 3 ....

Arbre

$\Omega = \{$.......... ; .... ; .... ; .... ; ....$\}$

Issues x_i	2	3	4	5	6
Probabilités p_i	$\frac{1}{9}$	....	....	....	....

$p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) =$ ....

Loi de probabilité

Issues possibles → x_i	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
Probabilités de réalisation → p_i	p_1	p_2	…	p_{n-1}	p_n

$0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

On lance un dé équilibré à 6 faces. Compléter :

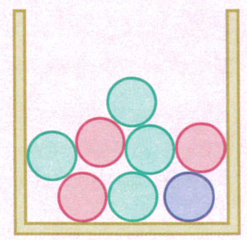
On a une situation d'**équiprobabilité** lorsque les probabilités de chacune des issues sont identiques.

Issues x_i	1	2	3	4	5	6
Probabilités p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	....	....	....	....

On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 4 boules vertes et 1 boule bleue.
On note x_i, l'événement « obtenir la couleur i ». Compléter :

x_i	Rouge	Verte	Bleue
p_i	....	....	....

$$p_i = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$$



Bloc 1

Difficulté : ● 20 min. F18V01

1 L'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % est :

☐ $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ☐ $\left[p-\frac{2}{\sqrt{n}};p+\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$

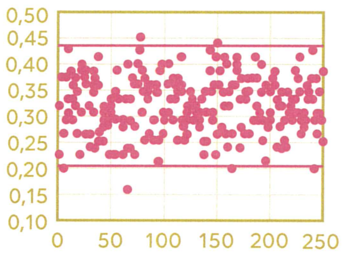
2 L'amplitude de I vaut :

☐ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ☐ $\frac{2}{\sqrt{n}}$ ☐ $2p$ ☐ $2\left(p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

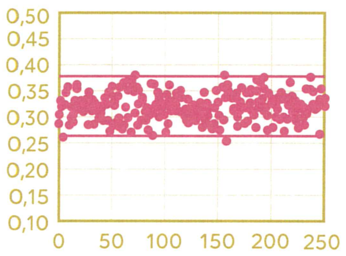
3 L'intervalle de fluctuation I peut servir à :

☐ Estimer une probabilité ☐ Prendre une décision

On donne les représentations graphiques, issues d'un script Python, des fréquences de 250 échantillons de taille $n=75$ (ou $n=300$) et d'une probabilité théorique p.



250 échantillons ; $n =$ ....



250 échantillons ; $n =$ ....

1 Compléter la légende du graphique.

2 À l'aide du graphique, estimer la probabilité $p =$ ....

3 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour chaque situation sachant que $p = 0,32$.

Situation 1 : Situation 2 :

Bloc 2

Difficulté : ● 30 min. F18V02

I On lance 150 fois un dé équilibré à 6 faces. La face six apparaît 37 fois.

1 Sur les 150 lancers, déterminer la fréquence observée d'apparition de la face six.

2 Sachant que la probabilité d'apparition de la face six est de $\frac{1}{6}$, peut-on affirmer que le dé a été truqué en faveur de la face six ?

3 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à cet échantillon.

4 Conclure quant à l'équilibre du dé.

II À la sortie d'une chaîne autonome de remplissage de pots de confiture, un pot est censé contenir entre 499 grammes et 501 grammes de confiture avec une probabilité de 0,92.

Lors d'un contrôle qualité, on a prélevé 200 pots au hasard. Parmi eux, 30 pots ne respectaient pas le pesage.

1 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à cet échantillon.

2 Calculer la fréquence des pots respectant le pesage.

3 Le contrôleur affirme que la chaîne a besoin d'être révisée. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Bloc 3

Difficulté : ● 20 min. F18V03

Si, pour un événement, la probabilité p est inconnue mais, en procédant à un sondage, on obtient une fréquence f de cet événement, on parle d'intervalle de confiance au seuil de 95 % :

$$I=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

I Un candidat à une élection réalise un sondage. Il en ressort que sur 998 personnes représentatives des votants, 514 personnes voteraient pour lui.

1 Déterminer la proportion des personnes favorables au candidat dans cet échantillon, le résultat sera donné sous la forme d'un pourcentage à 10^{-1} près.

2 Le candidat est élu s'il dépasse 50 % des votes. Déterminer l'intervalle de confiance associé à cet échantillon. Que peut-on conclure ?

II Pour le premier tour de l'élection présidentielle de 2002, l'institut BVA publie le 19 avril 2002 le sondage suivant, réalisé auprès de 1 000 personnes :

J. Chirac	L. Jospin	J.-M. Le Pen
20 %	16 %	14 %

Au soir du 21 avril 2002, les résultats affichés sont respectivement 19,88 %, 16,18 % et 16,88 %

1 Déterminer l'intervalle de confiance de chacun des candidats.

2 Y-a-t-il eu une erreur des sondeurs ? Justifier.

Bloc 4

Difficulté : ●● 20 min. F18V04

On raconte que le Duc de Toscane avait repéré que fréquemment, dans un lancer de 3 dés équilibrés, la somme égale à 10 apparaît plus souvent que la somme égale à 9. Pourtant, il y a autant de façons différentes d'obtenir ces deux sommes.

1 Trouver les six façons différentes d'obtenir 10 et les six façons différentes d'obtenir 9 avec trois dés équilibrés.

2 On écrit une fonction Python qui permet, dans un échantillon de n lancers, de compter le nombre de sommes égales à 9 et le nombre de sommes égales à 10.

```
1  from random import *
2
3  def nombreNeufDix(n):
4      NbrDeNeuf = 0
5      NbrDeDix = 0
6      for k in range(n):
7          somme = randint(1,6)+randint(1,6)+randint(1,6)
8          if somme == ... :
9              NbrDeNeuf = NbrDeNeuf + 1
10         if somme == ... :
11             NbrDeDix = NbrDeDix + 1
12     return ...
```

a Expliquer la ligne 7.

b Compléter le script suivant de façon à répondre à nos besoins.

3 Implémenter et exécuter ce script. Que constate-t-on ? Peut-on justifier ?

Bloc 5

Difficulté : ●● 30 min. F18V05

Une enseigne commerciale affirme dans une publicité que 75 % de ses produits sont d'origine bio.

PARTIE I

On crée une fonction Python qui simule dans un échantillon, de taille $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de produits qui sont d'origine bio.

```
1  from random import *
2
3  def echantillon(n):
4      nombre = 0
5      for i in range(n):
6          if random()<=0.75:
7              nombre = nombre + 1
8      return nombre
```

1 Expliquer les lignes 4, 5 et 6.

2 En quoi cette fonction répond-elle à notre souhait ?

PARTIE II

Maintenant, notre objectif est de connaître, sur k échantillons de taille n, le pourcentage d'échantillons dont la fréquence des produits d'origine bio, appartient à l'intervalle $\left[0,75-\frac{1}{\sqrt{n}};\ 0,75+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Pour cela, on crée une fonction Python `pourcentageFavorable()` qui utilise la fonction `echantillon()` du script ci-dessus :

```
12 def pourcentageFavorable(k, n):
13     favorable = 0
14     for i in range(k):
15         nbr = echantillon(n)
16         if nbr/n>=0.75-1/sqrt(n)
           and nbr/n<=0.75+1/sqrt(n):
17             favorable = favorable + 1
18     return ...
```

1 **a** Expliquer la ligne 16

b Que représente la variable "favorable" ?

2 Compléter la ligne 18 de sorte à connaître le pourcentage d'échantillons de taille n parmi les k échantillons qui répondent à notre objectif.

PARTIE III

Un contrôleur a prélevé 180 produits au hasard, parmi eux, 58 produits ne sont pas d'origine bio.

1 Calculer le pourcentage de produits d'origine bio dans cet échantillon.

2 **a** Quelle est la taille de l'échantillon prélevé ?

b D'après l'annonce publicitaire, quelle est la probabilité théorique qu'un produit soit bio dans cette enseigne commerciale ?

c Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, associé à cet échantillon.

3 Peut-on affirmer que la publicité n'est pas mensongère ?

2de

Échantillonnage

Statistiques et Probabilités

18

→ Objectifs visés

Être capable de

- Savoir utiliser le vocabulaire.
- Calculer une fréquence observée.
- Comprendre et utiliser la loi des grands nombres.
- S'approprier la détermination d'un intervalle de :
  - fluctuation (exigé par le programme) ;
  - confiance (important pour la suite des études).
- Savoir interpréter correctement les résultats obtenus, en prenant la bonne décision.
- Construire une simulation d'une situation donnée.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre une fréquence observée et une probabilité théorique.
- Confondre la taille d'un échantillon avec le nombre d'échantillons testés.
- Ne pas prendre le temps nécessaire pour comprendre la question et identifier le calcul à effectuer.
- Obtenir un intervalle de confiance avec des bornes négatives ou supérieures à 1.

Intervalle de fluctuation et prise de décision

F18R03

On répète n fois, $n \geqslant 25$, dans les mêmes conditions et de façon indépendante, une expérience aléatoire dont la probabilité du succès $p \in [0{,}2\,;0{,}8]$ est connue.

Dans au moins 95 % des cas, la fréquence f du succès appartient à l'intervalle
$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

I : **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.**

Léo écrit le script Python ci-dessous :

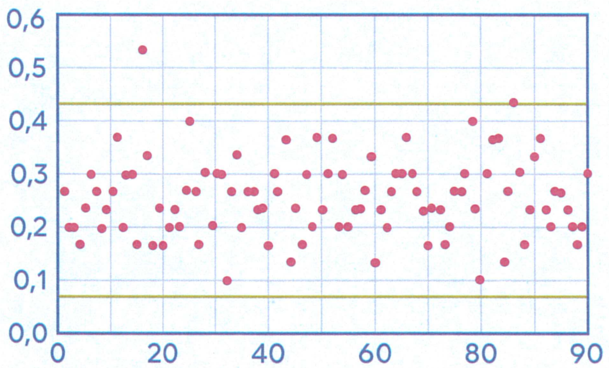
```python
from random import random
from math import sqrt
import matplotlib.pyplot as plt

def succes(proba):
    p=random()
    if p<=proba :
        return 1
    else :
        return 0

def intFluc(NbEch,NbRep, proba):
    abscisses = []
    ordonnees = []
    borneSup = proba + 1/sqrt(NbRep)
    borneInf = proba - 1/sqrt(NbRep)
    for i in range(1,  NbEch+1):
        abscisses.append(i)
        s=0
        for j in range (1, NbRep+1):
            s = s + succes(proba)
            freq = s/NbRep
        ordonnees.append(freq)
    plt.axhline(y = borneSup, color = 'red')
    plt.axhline(y = borneInf, color = 'red')
    plt.plot(abscisses, ordonnees, 'b.')

    plt.grid()
    plt.axis([0, NbEch, 0, 0.5])
    plt.show()

print(intFluc(100, 300, 0.25))
```

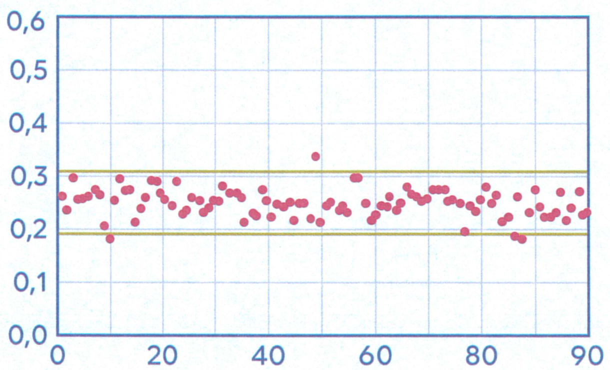
1 Que représentent les variables `borneInf` et `borneSup` ?

2 Léo exécute le programme deux fois avec les paramètres `intFluc(100, 30, 0.25)` et `intFluc(100, 300, 0.25)`.
Il obtient les deux graphiques ci-contre :

3 Pour chaque échantillon, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

4 Que peut-on répondre à Léo au sujet de sa malchance éventuelle ?





Échantillonnage

Probabilités et fréquences

F18R01

Soit une **expérience aléatoire** $\begin{cases} \text{probabilité de succès } p \\ \text{probabilité d'échec } 1-p \end{cases}$

On **répète l'expérience n fois** ($n \in \mathbb{N}^*$), de manière indépendante.

On obtient un **échantillon aléatoire de taille n**.

On observe k **succès**.

Les résultats ne sont pas influencés par les tirages précédents.

La **fréquence observée** de succès est : $f = \dfrac{k}{n}$.

Lors d'une soirée de jeu de société, Léo et ses trois amis tirent à la courte paille pour savoir qui commence. Ils disposent de 3 pailles de même taille et d'une quatrième plus courte. Tour à tour, chacun tire une paille parmi les quatre. Léo est le premier à commencer.

On considère l'événement « succès » : tirer la courte paille.

Léo a .... chances sur .... de réaliser l'événement « succès ».

$p = \dfrac{\cdots}{\cdots} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$ %.

Pendant la soirée, Léo comptabilise le nombre de succès et obtient le tableau suivant :

Joueur	Léo	Emma	Paul	Sofia
Succès observés	6	9	8	7

Le nombre de parties jouées est ....

La taille de l'échantillon est $n =$ ....

La fréquence observée pour Léo d'obtenir la courte paille est $f = \dfrac{\cdots}{\cdots} = \ldots\ldots$ %

Comparer f et p et expliquer pourquoi Léo a l'impression d'être malchanceux.

....

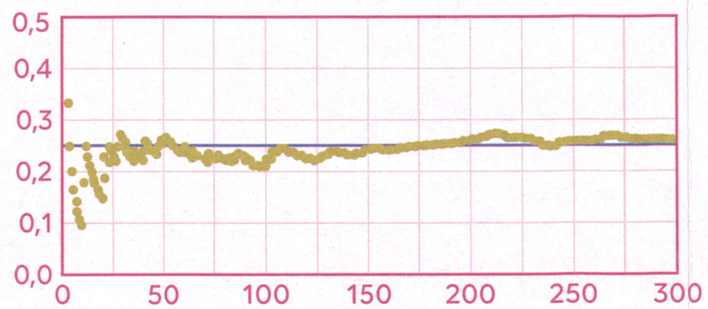
Loi des grands nombres

F18R02

Lorsque la taille n ($n \geqslant 25$) d'un échantillon est suffisamment grande, la fréquence observée f d'un événement est très proche de la probabilité p de réalisation de cet événement (sauf exception).

Si n est grand, alors $f \approx p$.

Léo simule 300 parties. Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la fréquence de « succès ».



1 Que constate-t-on ?

2 Si on réalisait une autre simulation de 500 parties. Qu'obtiendrait-on comme graphique ? Expliquer.

2de

OCTOMAP

19

Indicateurs Statistiques

Statistiques et Probabilités

→ Objectifs visés

Être capable de

- S'approprier le vocabulaire utilisé en statistiques.
- Déterminer les paramètres de position :
  - une moyenne ;
  - une médiane, 1er quartile et 3e quartile.
- Déterminer les paramètres de dispersion :
  - l'écart type ;
  - l'écart interquartile.
- Savoir utiliser correctement une calculatrice en mode *statistiques*.
- Savoir comparer correctement deux séries statistiques comparables.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Oublier les effectifs lors du calcul d'une moyenne pondérée.
- Confondre l'interprétation de la moyenne et de la médiane.
- Ne pas respecter les unités dans les calculs.
- Ne pas prendre le temps nécessaire pour comprendre la question et identifier le calcul à effectuer.

Bloc 1

Difficulté : ●○○ — 20 min. — F19V01

I Voici les âges des 13 étudiants qui suivaient la formation en 1re année à l'IFSI (promotion 2022).

17-18-18-18-18-18-19-19-19-20-21-36-47

1 Pour cette série statistique :
- la population étudiée est : ……………………
- le caractère : ……………………
- la nature du caractère : ……………………

2 Déterminer l'âge médian et les quartiles.

$Q_1 =$ ………… Me = ………… $Q_3 =$ …………

3 Que représente Q_3 ?

……………………

4 Calculer l'âge moyen des étudiants.

……………………

II En France, l'âge moyen des étudiants de première année est de 20,7 ans.

1 Que peut-on dire de la promotion étudiée ?

……………………

2 L'étudiant de 47 ans quitte la formation. Quel est le nouvel âge moyen de la promotion ? Quel commentaire peut-on faire ?

……………………

Bloc 2

Difficulté : ●●● — 30 min. — F19V02

Voici les salaires (en milliers d'euros) des employés d'une entreprise fabriquant des biscuits :

Salaire	1	1,2	1,4	1,6	1,9	2,4	3	4,5
n_i	2	5	14	17	9	3	2	1
E.C.C.								

1 Combien de salariés compte cette entreprise ?

2 Compléter le tableau par l'effectif cumulé croissant (E.C.C.).

3 Quelle est la proportion de salariés gagnant moins de 2 000 € ?

4 Déterminer le salaire médian.

5 En France (en 2021), le salaire net médian était de 1 789 €. Quel commentaire peut-on faire ?

6 Calculer le salaire moyen m.

7 Le salaire net moyen d'un français est de 2 400 €. Quel commentaire peut-on faire ?

8 Déterminer l'écart-type σ.

9 Déterminer l'intervalle $[m-2\sigma\,;m+2\sigma]$.

10 Quelle est la proportion de salariés ayant un salaire dans cet intervalle ?

11 Les résultats de l'année sont bons et les perspectives plutôt positives. L'ensemble des salaires sera augmenté de 3 %. Quel sera le nouveau salaire moyen ?

Bloc 3

Difficulté : ●●● — 20 min. — F19V03

Dans deux chaînes automatiques de remplissage de pots de miel de masse théorique de 500 g, on a prélevé au hasard 32 pots de chaque bout de chaîne et on a vérifié la masse nette de ces derniers.

Pour la chaîne A

500 ; 495 ; 501 ; 502 ; 500 ; 500 ; 498 ; 501 ; 499 ; 503 ; 501
500 ; 499 ; 499 ; 500 ; 500 ; 498 ; 501 ; 501 ; 499 ; 505
500 ; 501 ; 502 ; 500 ; 498 ; 496 ; 501 ; 500 ; 502 ; 503 ; 499

1 Dresser, dans un tableau, la série statistique associée à ce relevé.

2 À l'aide du mode *statistiques* de la calculatrice, déterminer l'étendue, la moyenne $\bar{x}_A$, l'écart type σ_A, la médiane Me_A et l'écart interquartile $(Q_3 - Q_1)_A$.

Pour la chaîne B

On a obtenu les paramètres suivants :

$$\bar{x}_B = 501\text{ g} \quad \sigma_B = 2{,}2\text{ g}$$

$$x_{\min B} = 500\text{ g et } x_{\max B} = 504\text{ g}$$

$$Q_{1B} = 501\text{ g} \quad Me_B = 502\text{ g et } Q_{3B} = 503\text{ g}$$

3 Comparer la fiabilité de ces deux chaînes de production.

4 Le test de contrôle stipule qu'au moins 95 % de l'échantillon prélevé doit avoir une masse nette dans l'intervalle $[\bar{x}_B - 2\sigma_B\,;\bar{x}_B + 2\sigma_B]$. On sait que la chaîne B respecte cette condition. Qu'en est-il de la chaîne de production A ?

Bloc 4

Difficulté : ●○○ — 15 min. — F19V04

Paul a travaillé sur la série statistique suivante, dont deux informations ont été perdues :

x_i	5		12	17	23
n_i	3	4		2	5

Heureusement, il dispose encore de la copie d'écran de sa calculatrice.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
QUARTILE MÉTHODE [TI-83CE]
        Stats 1 var
 x̄=13.47368421
 Σx=256
 Σx²=4274
 Sx=6.768952168
 σx=6.588414241
 n=19
 minX=5
↓Q₁[TI-83CE]=8
```

1 Retrouver les deux informations manquantes de sa série statistique.

2 Retrouver par le calcul la moyenne et l'écart type.

Bloc 5

Difficulté : ●●○ — 60 min. — F19V05

PARTIE I

Les résultats du devoir de statistiques d'une classe de seconde, composée de 18 filles et de 15 garçons, ont été résumés dans le tableau ci-dessous :

Note	Min	Q_1	Me	Q_3	Max	Moy	σ
Filles	8	12	15	18	20	14	2,1
Garçons	6	13	15	16	20	14,5	3,5

1 Comparer les deux groupes d'élèves.

2 Jules est le seul élève de la classe qui a obtenu 15. Combien d'élèves ont moins bien réussi que lui ?

3 Marie-Jeanne est la seule fille à avoir obtenu 18. Combien de filles ont mieux réussi qu'elle ?

4 Calculer la moyenne de la classe pour ce devoir.

PARTIE II

Henri a écrit ses notes en mathématiques du deuxième trimestre dans le tableau suivant :

Nature	*IE*	*DS*	*TP*	*IE*	*IE*	*IE*
Note	10	13	15	15	05	18
Coef	1	3	1	2	1	2

1 Calculer la moyenne actuelle de Henri.

2 Encouragé par la note du dernier devoir et sachant qu'il reste un dernier *DS* à coefficient 3, déterminer la note minimale à obtenir afin d'avoir au moins une moyenne de 14 en mathématiques pour ce trimestre.

PARTIE III

Pour pouvoir anticiper les ventes lors de prochains spectacles, le directeur de la salle a recensé les âges des spectateurs lors de la représentation précédente.

Ces résultats sont consignés dans le tableau ci-contre :

Âges	n_i	f_i %
[0 ; 10[	28	
[10 ; 20[	35	
[20 ; 30[	5	
[30 ; 40[	23	
[40 ; 50[	9	
[50 ; 60[	3	
[60 ; 70[	15	
Total		

1 Indiquer la population, le caractère et la nature du caractère de la série statistique à étudier.

2 Compléter la colonne des effectifs et celle des fréquences en pourcentage (exprimées à 10^{-2} près).

3 Déterminer la proportion de spectateurs d'au moins 30 ans.

4 Déterminer la moyenne des âges des spectateurs.

5 En ne tenant compte que de l'âge moyen, peut-on affirmer pour quel public était destiné le spectacle ?

6 Quels paramètres statistiques permettent de compléter l'analyse de la répartition des âges des spectateurs ?

7 Pour quel public le spectacle semble-t-il être proposé ?

Indicateurs Statistiques

Indicateurs de dispersion

F19R02

L'étendue d'une série statistique est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur de x :

$$x_{\max} - x_{\min}$$

Étendue

L'écart interquartile est la différence ($Q_3 - Q_1$).

$$x_1\ x_2 \ldots\ \underbrace{Q_1 \ldots \text{Me} \ldots Q_3}_{Q_3 - Q_1} \ldots\ x_{N-1}\ x_N$$

Au moins 50 % des valeurs de la série sont comprises entre Q_3 et Q_1.

Écart interquartile

L'écart-type d'une série statistique est le **nombre positif** noté σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{p} n_i = N$$

L'écart-type indique la **dispersion autour de la moyenne**.

Écart-type σ

On considère la situation évoquée dans la partie sur la moyenne pondérée.

Nombre d'écrans x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de foyers n_i (en milliers)	3	4	7	10	11	15
Effectif cumulé croissant (en milliers)	....	....	....			....

1 Déterminer l'écart type σ.

2 Compléter le tableau puis déterminer Q_3 et Q_1 et en déduire $Q_3 - Q_1$.

Indicateurs de position

F19R01

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \ldots\ldots + n_p x_p}{N} ;$$

N : Effectif total

avec $\sum_{i=1}^{p} n_i = N$

Valeurs	x_1	x_2	....	....	x_p
Effectifs	n_1	n_2	....	....	n_p

Moyenne pondérée $\bar{x}$

Résultats d'un sondage relatif au nombre d'écrans permettant de regarder des vidéos, effectué en 2019 auprès d'un échantillon représentatif de 48 000 foyers français :

Nombre d'écrans x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de foyers n_i en milliers	3	4	7	10	11	15

Déterminer $\bar{x}$, le nombre moyen d'écrans par foyer :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 0 + 4 \times 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \quad \text{soit} \quad \bar{x} = \ldots\ldots$$

Si tous les .... étaient identiques, ils auraient tous .... écrans.

Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Si on **multiplie** toutes les valeurs de la série **par** a $\quad \overline{ax} = a \times \bar{x}$

Si on **augmente** toutes les valeurs de la série **de** b $\quad \overline{x+b} = \bar{x} + b$

Linéarité de la moyenne

La **médiane Me** partage la population en **deux groupes de même effectif.**

$$\underbrace{x_1\ x_2 \ldots}_{\text{Au moins 50 \% de l'effectif total } N}\ x_{\text{Me}}\ \underbrace{\ldots x_{N-1}\ x_N}_{\text{Au moins 50 \% de l'effectif total } N}$$

Me

Valeurs rangées par ordre croissant

x prend une **valeur ≤ Me** pour **au moins 50 % de la population.**

Médiane Me

Calcul de Me :
- N **impair** : **Me** = valeur centrale de x
- N **pair** : **Me** = moyenne des deux valeurs centrales

Deux groupes de 5 et 6 élèves ont obtenu les notes suivantes (valeurs rangées par ordre croissant) :

Groupe A : 6 9 12 15 18

Me = 12

Groupe B : 4 8 9 12 13 15

Me entre 9 et 12

Effectif total N_A = ...

N_A est impair. Le demi effectif est ....

La médiane est la valeur centrale de la série Me = ...

Effectif total N_B = ...

N_B est pair. La médiane est la moyenne des valeurs centrales de la série.

$$\text{Me} = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

Quartiles

Les **quartiles Q** partagent la population en **4 groupes de même effectif.**

$x_1\ x_2$ ... Me ... $x_{N-1}\ x_N$ ← Valeurs rangées par ordre croissant

Q_1 : au moins 25 % de l'effectif total N

Q_3 : au moins 75 % de l'effectif total N

Quartiles Q_1, Q_3

Q_1 est le premier quartile : **au moins 25 %** de la population a au plus **Q_1** pour valeur de caractère.

Q_3 est le troisième quartile : **au moins 75 %** de la population a au plus **Q_3** pour valeur de caractère.

Pendant 15 jours, Marie-Jeanne a relevé les températures en degré Celsius au lever du jour. La série statistique classée par ordre croissant est la suivante : –11 –10 –9 –7 –6 –3 –3 0 0 0 1 2 2 3 4.

Effectif total N = ...

25 % de l'effectif : $N \times \frac{1}{4}$ = ... Au moins 25 % des températures relevées ont été inférieures ou égales à ....

75 % de l'effectif : $N \times \frac{3}{4}$ = ... Au moins 75 % des températures relevées ont été inférieures ou égales à ....

Bloc 1

Difficulté : ●○○ 20 min.

F20V01

Autour de Pythagore

1 ULM est un triangle rectangle en U, avec $UM = 5$ $LM = 13$.

D'après ……………………………………

UL^2 ……………………………………

Donc $UL =$ ……………………………………

2 HEC est un triangle tel que $HE = 7$, $HC = 12$ et $EC = \sqrt{95}$.

Le plus grand côté est ……………………………………

Comme ……………………………………

et ……………………………………

D'après ……………………………………

Le triangle HEC ……………………………………

3 IAE est un triangle tel que $IA = 6$, $AE = 10$ et $IE = 12$.

Comme ……………………………………

et ……………………………………

D'après ……………………………………

Le triangle IAE ……………………………………

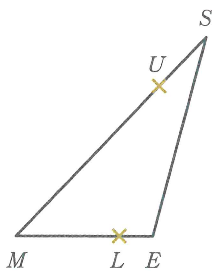
Bloc 2

Difficulté : ●○○ 30 min.

F20V02

I Autour de Thalès

1 En utilisant la configuration ci-contre, déterminer si les droites (UL) et (SE) sont parallèles dans chacun des cas suivants :



a cas 1 : $ML = 3$, $LE = 1$ et $MU = 6$, $MS = 8$

b cas 2 : $ML = 4$, $ME = 6$ et $MU = 6$, $MS = 10$

2 Soient deux droites (PL) et (MC) concourantes en O, avec $(PM) \mathbin{//} (LC)$.

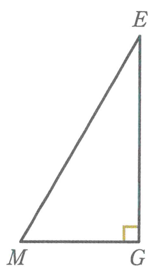
a Faire un schéma de la situation.

b Calculer PL sachant que $OP = 5$ cm, $PM = \dfrac{10}{3}$ cm et $LC = 10$ cm.

c En déduire la nature du triangle LCP.

II Autour de la trigonométrie

Soit GEM un triangle rectangle en G, avec $MG = 4$ cm et $EM = 8$ cm.



1 a Calculer $\cos(\widehat{EMG})$.

b En déduire $\sin(\widehat{EMG})$.

2 a Montrer que $\widehat{MEG} = 30°$

b En déduire $\cos(\widehat{MEG})$ et $\sin(\widehat{MEG})$.

Bloc 3

Difficulté : ●●○ 35 min.

F20V03

I RTS est un triangle rectangle en R. $RS = 5$ cm et $RT = 12$ cm.

1 Calculer la longueur ST.

2 En déduire r, le rayon du cercle circonscrit au triangle RTS.

3 H est le projeté orthogonal de R sur (ST)

a Calculer l'aire de RST.

b En déduire la longueur RH.

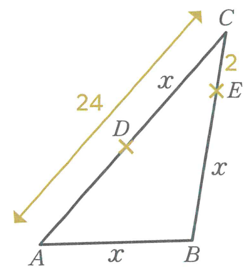
4 Déterminer l'angle $\widehat{RST}$ au degré près.

II On considère la configuration ci-dessous.

$CD = EB = AB = x$

$CA = 24$

$CE = 2$



1 En utilisant le théorème de Thalès, montrer que : $(DE) \mathbin{//} (AB) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$.

2 Montrer que : $x^2 + 2x - 48 = (x-6)(x+8)$.

3 En déduire x sachant que $(DE) \mathbin{//} (AB)$.

4 Calculer la longueur DE.

5 Une telle configuration peut-elle exister ?

Bloc 4

Difficulté : ●○○ 20 min.

F20V04

L'algorithme suivant permet de dire si le triangle est rectangle, sachant qu'on connaît ses trois longueurs.

- a étant la plus grande longueur, on calcule a^2.
- b et c étant les autres longueurs, on calcule $b^2 + c^2$.
- Si $a^2 = b^2 + c^2$, on conclut, d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle est rectangle. On précisera le sommet principal. Sinon, on conclut, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, que le triangle n'est pas rectangle.

1 Cet algorithme est traduit par le script Python suivant :

```
def triangle(a,b,c):
    if a>b and a>c:
        if a**2==b**2+c**2:
            print("D'après ..................")
            print("le triangle ..............")
            print("d'hypothénuse de longueur",a)
        else:
            print("D'après ..................")
            print("le triangle ..............")
    else:
        print("Pour faire ce test, le premier paramètre")
        print("doit être la plus grande longueur.")
```

a Recopier et compléter ce script.

b Qu'obtient-on pour les instructions suivantes ?
`>>>triangle(3,4,5)`, `>>>triangle(5,3,4)` et `>>>triangle(5,2,4)`

2 Quelles maladresses ont été commises dans ce script ?

3 Proposer une fonction Python qui les corrige.

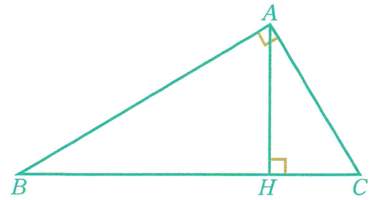
Bloc 5

Difficulté : ●●● 60 min.

F20V05

PARTIE I

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).



1 Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$.
Utiliser la propriété sur la somme des angles d'un triangle.

2 En utilisant $\sin(\widehat{BAH})$ et $\sin(\widehat{BCA})$, montrer que : $AB^2 = BH \times BC$.

3 En utilisant $\cos(\widehat{BAH})$ et $\cos(\widehat{BCA})$, montrer que : $AB \times AC = AH \times BC$.

4 En utilisant $\tan(\widehat{BAH})$ et $\tan(\widehat{HCA})$, montrer que : $AH^2 = HC \times HB$.

PARTIE II

Soit CEA un triangle rectangle en C avec $EA = 25$ cm. H est le projeté orthogonal de C sur (EA) tel que $EH = 1$ cm.

1 Calculer la hauteur CH.

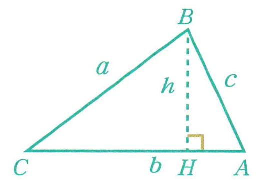
2 Déterminer la longueur CE.

3 En déduire la longueur CA.

4 Montrer que l'aire de CEA est égale à $25\sqrt{6}$ cm².

PARTIE III

I On considère la configuration ci-contre avec les notations conventionnelles.



1 Exprimer CH en fonction de CA et HA.

2 En déduire que $CH^2 = b^2 + AH^2 - 2b \times AH$.

3 En rajoutant aux deux membres de l'égalité ci-dessus BH^2, montrer que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$

Cette égalité est appelée « théorème d'Al Kashi ». De façon analogue, on peut établir que :

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$

II On utilise la configuration ci-dessus :

1 Dans le triangle HBA, rectangle en H, montrer que $h = c \times \sin(\hat{A})$

2 Montrer que l'aire de ABC est égale à : $\dfrac{1}{2}bc \times \sin(\hat{A})$

III Soit ABC un triangle avec $AB = 5$, $AC = 10$ et $\hat{A} = 60°$.

1 Déterminer la longueur BC.

2 Calculer l'aire de ABC.

3 Déterminer l'angle $\widehat{ABC}$.

4 Calculer la longueur CH, H étant le projeté orthogonal de B sur (CA).

OCTOMAP 2de

Géométrie

Géométrie plane

20

→ Objectifs visés

Être capable de

- Savoir appliquer les propriétés de Pythagore :
  - le théorème (pour calculer une longueur) ;
  - la réciproque (pour montrer une perpendicularité) ;
  - la contraposée (pour assurer qu'il n'y a pas de perpendicularité).
- Savoir appliquer les propriétés de Thalès :
  - le théorème (pour calculer une longueur) ;
  - la réciproque (pour montrer un parallélisme) ;
  - la contraposée (pour assurer qu'il n'y a pas de parallélisme).
- Faire le lien entre le projeté orthogonal et le pied d'une hauteur dans un triangle.
- Savoir utiliser des relations trigonométriques.
- Démontrer la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.
- Démontrer que le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.

Points de vigilance et erreurs à éviter

- Confondre sinus et cosinus d'un angle.
- Ne pas comprendre comment mettre en œuvre les formules de Pythagore et de Thalès.

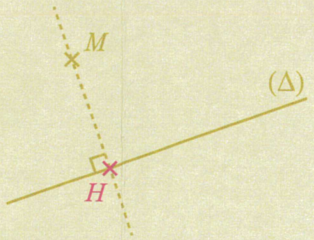
Géométrie plane

Projeté orthogonal

F20R04

Le **projeté orthogonal** de M sur la droite (Δ) est le point H tel que :

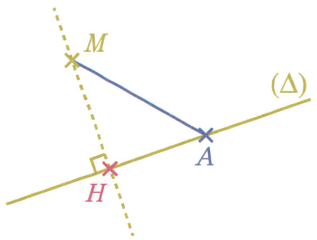
$$\begin{cases} H \in (\Delta) \\ (MH) \perp (\Delta) \end{cases}$$



démonstration

Le projeté orthogonal du point M sur une droite (Δ) est le **point de la droite (Δ) le plus proche** de M.

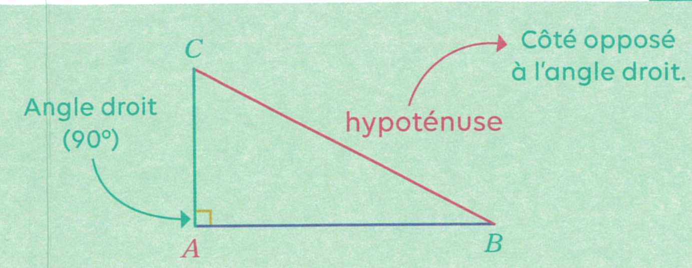
En utilisant la figure ci-contre et sachant que $AM = 6$ cm et $HA = 2$ cm.
Calculer la distance entre le point M et la droite (Δ).



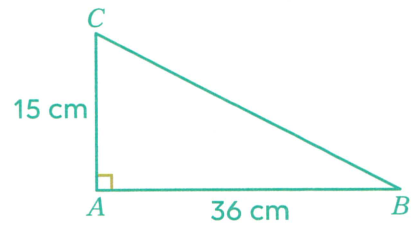
Propriété de Pythagore

F20R01

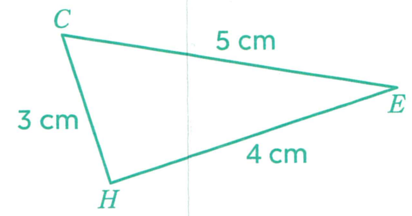
D'après la propriété de **Pythagore**,
ABC est un triangle **rectangle en A**
si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



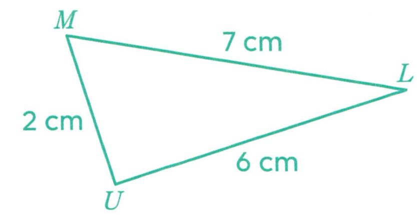
1 $BC = ?$



2 HEC est-il rectangle ?



3 ULM est-il rectangle ?



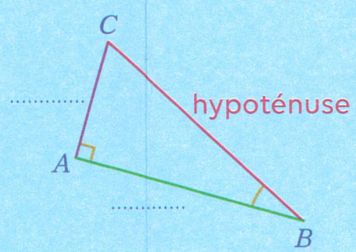
Trigonométrie

Soit ABC un triangle rectangle en A

Cos $\widehat{ABC} = \dfrac{\text{Adj}}{\text{Hyp}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Sin $\widehat{ABC} = \dfrac{\text{Opp}}{\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} =$

Tan $\widehat{ABC} = \dfrac{\sin\widehat{ABC}}{\cos\widehat{ABC}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

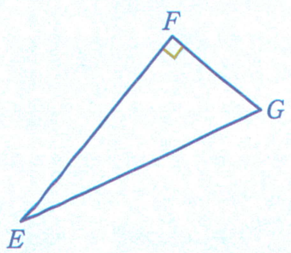


a EFG est un triangle rectangle en F

cos $\widehat{FEG} = \dfrac{FE}{EG}$

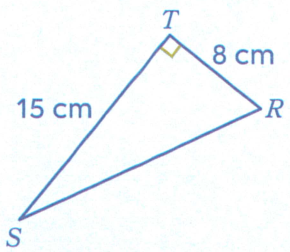
sin $\widehat{FEG} = \dots\dots$

tan $\widehat{FEG} = \dots\dots$



b RST est un triangle rectangle en T.

$\widehat{RST} = ?$



$0° < \alpha < 90°$

Dans un triangle rectangle, pour tout **angle aigu** de mesure α, on a :

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

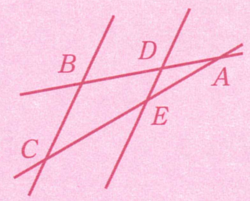
démonstration

F20R03

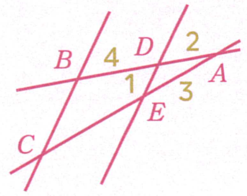
Propriété de Thalès

F20R02

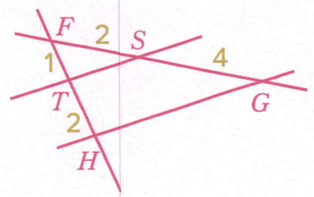
Les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A.
D'après la propriété de **Thalès**,
$(BC) // (DE)$ si et seulement si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$



1 $BC = ?$
Sachant que $(BC) // (DE)$.



2 (TS) et (HG) sont-elles parallèles ?



3 (MN) et (KL) sont-elles parallèles ?