Thème 20

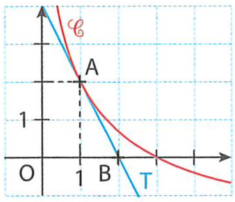
Dérivation

PROGRAMME DE PREMIÈRE

Des idées, des réflexes

Comment déterminer graphiquement un nombre dérivé ?

• **Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. Le nombre dérivé de f en a est la pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.**



Dans le cas représenté ci-contre, pour déterminer $f'(1)$:

– on détermine la pente m de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A(1 ; 2) :

T passe par A(1;2) et B(2;0) donc $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{2-1} = -2$;

– ainsi, $f'(1) = -2$.

Comment déterminer une équation d'une tangente à une courbe ?

• **Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.**

On reprend la situation de l'exemple ci-dessus.

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.

Or $f'(1) = -2$ (voir ci-dessus) et $f(1) = 2$.

Donc une équation de la tangente T est $y = -2(x-1)+2$, c'est-à-dire $\boldsymbol{y = -2x+4}$.

Comment calculer la dérivée d'un produit ?

• **Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit uv est aussi dérivable sur I et :**

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Pour déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+5)(x^2-3x+1) :$$

– on reconnaît la forme d'un produit $u \times v$ où u et v sont définies par :

$$u(x) = 2x+5 \text{ et } v(x) = x^2-3x+1 ;$$

– les fonctions u et v sont des polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 2x-3 ;$$

– donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2(x^2-3x+1)+(2x+5)(2x-3),$$

c'est-à-dire $g'(x) = 2x^2-6x+2+4x^2-6x+10x-15$, soit $\boldsymbol{g'(x) = 6x^2-2x-13}$.

Fiche 93 Dérivées des fonctions usuelles

Série 1

1 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$. Pour tout réel x, la fonction dérivée de la fonction f est telle que …**

- ☐ **a.** $f'(x)=0$
- ☐ **b.** $f'(x)=2x$
- ☐ **c.** $f'(x)=2$
- ☐ **d.** $f'(x)=x^2$

2 **g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-5$. Voici des affirmations sur la fonction dérivée g'. Tim : « $g'(x)=1$ ». Lola : « $g'(x)=-5x$ ». Ugo : « $g'(x)=0$ ». Jade : « $g'(x)=\frac{1}{5}$ ». L'affirmation vraie est celle de …**

- ☐ **a.** Ugo
- ☐ **b.** Tim
- ☐ **c.** Lola
- ☐ **d.** Jade

3 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Pour tout réel x, la fonction dérivée de la fonction f est telle que …**

- ☐ **a.** $f'(x)=x^2$
- ☐ **b.** $f'(x)=x^3$
- ☐ **c.** $f'(x)=3x$
- ☐ **d.** $f'(x)=3x^2$

4 **Une expression de la fonction dérivée de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x}$ est …**

- ☐ **a.** $g'(x)=\sqrt{x}$
- ☐ **b.** $g'(x)=2\sqrt{x}$
- ☐ **c.** $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
- ☐ **d.** $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5 **h' est la fonction dérivée de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$. Pour tout réel x de $]0;+\infty[$, il est exact d'écrire …**

- ☐ **a.** $h'(x)=-\frac{1}{x}$
- ☐ **b.** $h'(x)=-\frac{1}{x^2}$
- ☐ **c.** $h'(x)=\frac{1}{x^2}$
- ☐ **d.** $h'(x)=\frac{1}{x}$

Série 2

1 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+2$. Pour tout réel x, la fonction dérivée de la fonction f est telle que …**

- ☐ **a.** $f'(x)=-1$
- ☐ **b.** $f'(x)=-x$
- ☐ **c.** $f'(x)=2$
- ☐ **d.** $f'(x)=-2x$

2 **g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x^2-x-2$. Pour tout réel x, la fonction dérivée de la fonction g est telle que …**

- ☐ **a.** $g'(x)=3x^2+6x-1$
- ☐ **b.** $g'(x)=x^2+3x-1$
- ☐ **c.** $g'(x)=3x^3+6x^2-x$
- ☐ **d.** $g'(x)=3x^2+6x$

3 **La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ qui admet pour dérivée la fonction h' telle que $h'(x)=10x^4-3x^2+x+3$ peut s'écrire sous la forme …**

- ☐ **a.** $h(x)=40x^3-6x+1$
- ☐ **b.** $h(x)=2x^5-x^3+0{,}5x^2+3x+2$
- ☐ **c.** $h(x)=x^5-x^3+x^2+3$
- ☐ **d.** $h(x)=10x^5-3x^3+x^2+3x$

4 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+5$. Une expression de la fonction dérivée de f est …**

- ☐ **a.** $f'(x)=x^3-4$
- ☐ **b.** $f'(x)=x^3-4x+5$
- ☐ **c.** $f'(x)=x(x-4)$
- ☐ **d.** $f'(x)=(x-2)(x+2)$

5 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$f(x)=4x^3-5x^2+7.$$

Voici des expressions trouvées pour $f'(x)$: Gil : « $2x^2(6x-5)$ ». Lila : « $2x(6x-5)$ ». May : « $x(4x-5)$ ». Noé : « $12x^2-7x$ ». L'expression correcte est celle de …

- ☐ **a.** May
- ☐ **b.** Gil
- ☐ **c.** Lila
- ☐ **d.** Noé

Série 3

1 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x(5x+2)$. Pour tout réel x, …**

- ☐ **a.** $f'(x)=3\times(5x+2)-3x\times 5$
- ☐ **b.** $f'(x)=x\times(5x+2)+3x\times x$
- ☐ **c.** $f'(x)=3x+(5x+2)$
- ☐ **d.** $f'(x)=3\times(5x+2)+3x\times 5$

2 **g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2x-1)(x+3)$. Pour tout réel x, …**

- ☐ **a.** $g'(x)=3x+2$
- ☐ **b.** $g'(x)=7$
- ☐ **c.** $g'(x)=4x+2$
- ☐ **d.** $g'(x)=4x+5$

3 **h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(3x+1)^2$. Pour tout réel x, …**

- ☐ **a.** $h'(x)=6x+2$
- ☐ **b.** $h'(x)=6(3x+1)$
- ☐ **c.** $h'(x)=9x+3$
- ☐ **d.** $h'(x)=18x$

4 **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{5x}$. Pour tout réel $x\neq 0$, …**

- ☐ **a.** $f'(x)=\frac{1}{25x^2}$
- ☐ **b.** $f'(x)=\frac{1}{5x^2}$
- ☐ **c.** $f'(x)=-\frac{1}{5x^2}$
- ☐ **d.** $f'(x)=-\frac{1}{25x^2}$

5 **k est la fonction définie sur $[5;10]$ par $k(x)=\frac{3x}{x-2}$. Pour tout réel x de $[5;10]$, …**

- ☐ **a.** $k'(x)=-\frac{6}{(x-2)^2}$
- ☐ **b.** $k'(x)=\frac{6x-6}{(x-2)^2}$
- ☐ **c.** $k'(x)=-\frac{6}{x-2}$
- ☐ **d.** $k'(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$

Fiche 94

Dérivées de fonctions

Série 1

1 ***f*** **est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(4x-1)^3$. Pour tout réel x, la fonction dérivée de la fonction *f* est telle que …**

☐ **a.** $f'(x)=3(4x-1)^2$ ☐ **b.** $f'(x)=12(4x-1)^2$

☐ **c.** $f'(x)=4(4x-1)^3$ ☐ **d.** $f'(x)=12(4x-1)$

2 ***g'*** **est la fonction dérivée de la fonction *g* définie sur ℝ par $g(x)=\sqrt{x^2+1}$. Pour tout réel x, il est correct d'écrire …**

☐ **a.** $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ ☐ **b.** $g'(x)=2x\sqrt{x^2+1}$

☐ **c.** $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ☐ **d.** $g'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

3 ***h*** **est la fonction définie sur ℝ* par $h(x)=\dfrac{1}{3x^2}$. Pour tout réel x non nul, $h'(x)$ est égal à …**

☐ **a.** $h'(x)=-\dfrac{1}{9x^4}$ ☐ **b.** $h'(x)=-\dfrac{2}{x}$

☐ **c.** $h'(x)=-\dfrac{2}{3x^3}$ ☐ **d.** $h'(x)=\dfrac{2}{3x^3}$

4 ***k'*** **est la fonction dérivée de la fonction *k* définie sur ℝ par $k(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+5}$. Pour tout réel x, on peut écrire $k'(x)$ sous la forme …**

☐ **a.** $k'(x)=-\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+5)^2}$

☐ **b.** $k'(x)=-\dfrac{1}{(x^2+3x+5)^2}$

☐ **c.** $k'(x)=-\dfrac{2x+3}{x^2+3x+5}$

☐ **d.** $k'(x)=\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+5)^2}$

5 ***f'*** **est la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x-6}$. Pour tout réel $x>2$ …**

☐ **a.** $f'(x)=\dfrac{12x-27}{(3x-6)^2}$ ☐ **b.** $f'(x)=\dfrac{3}{3x-6}$

☐ **c.** $f'(x)=\dfrac{5x-11}{(3x-6)^2}$ ☐ **d.** $f'(x)=\dfrac{3}{(3x-6)^2}$

Série 2

1 **Sur ℝ, la fonction dérivée de la fonction *f* définie par $f(x)=e^x$ est telle que …**

☐ **a.** $f'(x)=xe^x$ ☐ **b.** $f'(x)=-e^x$

☐ **c.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ☐ **d.** $f'(x)=e^x$

2 ***g*** **est la fonction définie sur ℝ par $g(x)=e^{-0,8x}$. Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à …**

☐ **a.** $0,8e^{-0,8x}$ ☐ **b.** $-0,8xe^{-0,8x}$

☐ **c.** $e^{0,8x}$ ☐ **d.** $-0,8e^{-0,8x}$

3 ***h*** **est la fonction définie sur ℝ par $h(x)=e^{3x-2}$. Pour tout réel x, $h'(x)$ est égal à …**

☐ **a.** $3xe^{3x-2}$ ☐ **b.** $(3x-2)e^{3x-2}$

☐ **c.** $3e^{3x-2}$ ☐ **d.** e^{3x-2}

4 ***f'*** **est la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=(2x-5)e^x$. Pour tout réel x …**

☐ **a.** $f'(x)=2+e^x$

☐ **b.** $f'(x)=e^x+(2x-5)e^x$

☐ **c.** $f'(x)=(7-2x)e^x$

☐ **d.** $f'(x)=(2x-3)e^x$

5 ***g*** **est la fonction définie sur ℝ par $g(x)=\dfrac{1}{e^{4x}}$. Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à …**

☐ **a.** e^{-4x} ☐ **b.** $-4e^{-4x}$

☐ **c.** $\dfrac{4}{e^{8x}}$ ☐ **d.** $\dfrac{4}{e^{4x}}$

Série 3

1 ***f*** **est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$. Pour tout réel $x>0$ …**

☐ **a.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ☐ **b.** $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$

☐ **c.** $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ☐ **d.** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

2 ***g*** **est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)$. Pour tout réel $x>0$ …**

☐ **a.** $g'(x)=\dfrac{2}{x}$ ☐ **b.** $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

☐ **c.** $g'(x)=\dfrac{1}{2x}$ ☐ **d.** $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(2)$

3 ***h*** **est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=(\ln(x))^2$. Pour tout réel $x>0$, $h'(x)$ est égal à …**

☐ **a.** $\dfrac{2}{\ln(x)}$ ☐ **b.** $\dfrac{2}{x\ln(x)}$

☐ **c.** $\dfrac{2\ln(x)}{x}$ ☐ **d.** $2\ln(x)$

4 ***f'*** **est la fonction dérivée de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\ln(x^2+1)$. Pour tout réel x, une expression correcte de $f'(x)$ est …**

☐ **a.** $\dfrac{1}{x^2+1}$ ☐ **b.** 2

☐ **c.** $\dfrac{x}{\ln(x^2+1)}$ ☐ **d.** $\dfrac{2x}{x^2+1}$

5 ***k*** **est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $k(x)=\ln(x^2)-\ln(3x)$. On peut affirmer, pour tout réel $x>0$, que …**

☐ **a.** $k'(x)=\dfrac{1}{x}$ ☐ **b.** $k'(x)=-\dfrac{1}{x}$

☐ **c.** $k'(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ ☐ **d.** $k'(x)=\dfrac{x-3}{x}$