Thème 10

Inéquations

Des idées, des réflexes

Comment résoudre une inéquation du type $ax+b \leqslant c$?

Résoudre l'inéquation $-5x+12 \leqslant 27$.

$-5x+12-12 \leqslant 27-12$ ← On soustrait 12 à chaque membre.

$-5x \leqslant 15$

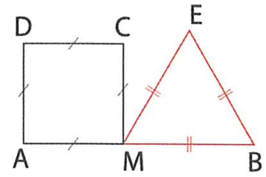
$\dfrac{-5x}{-5} \geqslant \dfrac{15}{-5}$ ← On divise par −5 chaque membre. Ce nombre est négatif donc on change le sens de l'inégalité.

$x \geqslant -3$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = [-3\,;+\infty[$. ← On utilise un intervalle pour écrire l'ensemble des solutions.

Comment modéliser un problème à l'aide d'une inéquation ?

M est un point d'un segment [AB] de longueur 20. On construit un carré AMCD et un triangle équilatéral MBE comme indiqué ci-contre.



Pour quelles positions du point M sur le segment [AB] le périmètre $\mathcal{P}$ du carré est-il inférieur à celui $\mathcal{P}'$ du triangle ?

– On choisit une inconnue :
on note x la longueur du segment [AM] avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.

– On exprime en fonction de x les périmètres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$: $\mathcal{P} = 4x$ et $\mathcal{P}' = 3(20-x)$.

– On traduit l'inégalité $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ par une inéquation : $4x \leqslant 3(20-x)$.

Comment résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$?

Résoudre l'inéquation $(x+1)(-2x+6) \leqslant 0$.

❶ On porte les solutions des équations $x+1=0$ et $-2x+6=0$ par ordre croissant sur la ligne « x ».

❷ On utilise le signe de $ax+b$ (selon le signe de a) pour compléter le signe de $x+1$ et celui de $-2x+6$.

❸ On applique la règle du signe d'un produit pour compléter le signe de $(x+1)(-2x+6)$.

❶ x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
❷ $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
❸ $(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit l'ensemble des solutions à l'aide de la première et la dernière lignes : $\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$.

Inégalités (1)

Série 1

1 **Un nombre x vérifiant l'inégalité $x \leqslant 1$ est …**

- a. 2
- b. 0
- c. $\frac{7}{3}$
- d. 1,2

2 **Un nombre a vérifiant l'inégalité $a \geqslant -3$ est …**

- a. −2
- b. −10
- c. $-\frac{17}{5}$
- d. −3,01

3 **Un nombre y vérifiant l'inégalité $y < 4$ est …**

- a. 4
- b. 4,2
- c. −3
- d. $\frac{17}{4}$

4 **Un nombre b vérifiant l'inégalité $b > \frac{8}{3}$ est …**

- a. 2
- b. $\frac{8}{5}$
- c. $\frac{10}{3}$
- d. $\frac{8}{3}$

5 **Un nombre x vérifiant l'inégalité $x \leqslant \frac{7}{9}$ est …**

- a. 1
- b. $\frac{7}{8}$
- c. $\frac{5}{4}$
- d. $\frac{5}{9}$

Série 2

1 **Si x désigne un nombre réel tel que $x < 5$, alors …**

- a. $x - 3 < 2$
- b. $x - 2 > 3$
- c. $x - 3 > 2$
- d. $x - 5 > 0$

2 **Si a désigne un nombre réel tel que $a > 5$, alors …**

- a. $a + 1 > 6$
- b. $a + 5 < 10$
- c. $a + 1 < 6$
- d. $a + 3 < 8$

3 **Si y désigne un nombre réel tel que $y \leqslant -12$, alors …**

- a. $y + 3 \leqslant -9$
- b. $y + 3 \geqslant -8$
- c. $y + 8 \geqslant 0$
- d. $y + 1 \leqslant -13$

4 **Si b désigne un nombre réel tel que $b < 1$, alors …**

- a. $b - 1 > 0$
- b. $b - 3 > -2$
- c. $b - 5 > -5$
- d. $b - 1 < 0$

5 **Si x désigne un nombre réel tel que $x \geqslant 0$, alors …**

- a. $x - 2 \geqslant 4$
- b. $x - 2 \leqslant -5$
- c. $x - 2 \leqslant 0$
- d. $x - 2 \geqslant -2$

Série 3

1 **Si a et b désignent deux nombres réels tels que $a < 2$ et $b < 6$, alors …**

- a. $a + b = 8$
- b. $a + b < 8$
- c. $a + b > 8$
- d. on ne peut rien dire sur $a + b$

2 **Si x et y désignent deux nombres réels tels que $x > -1$ et $y > 7$, alors …**

- a. $x + y = 6$
- b. $x + y < 6$
- c. on ne peut rien dire sur $x + y$
- d. $x + y > 6$

3 **Si a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors …**

- a. $a + b = 0$
- b. $a + b \geqslant 0$
- c. $a + b \leqslant 0$
- d. on ne peut rien dire sur $a + b$

4 **Si x et y désignent deux nombres réels tels que $x < 2$ et $y > 6$, alors …**

- a. $x + y < 8$
- b. on ne peut rien dire sur $x + y$
- c. $x + y > 4$
- d. $x + y = 8$

5 **Si c et d désignent deux nombres réels tels que $c - d \leqslant 2$ et $d \leqslant 3$, alors …**

- a. $c \geqslant 5$
- b. on ne peut rien dire sur c
- c. $c \leqslant 5$
- d. $c + d \geqslant 8$

6 **Si p et q désignent deux nombres réels tels que $p > 3$ et $q - p > 4$, alors …**

- a. $p + q > 7$
- b. $q > 7$
- c. $q < 7$
- d. on ne peut rien dire sur q

Inégalités (2)

Série 1

1 Si a et b désignent des nombres réels tels que $a \leqslant b$, alors …

- a. $17a \geqslant 17b$
- b. $-3a \leqslant -3b$
- c. $\frac{a}{3} \geqslant \frac{b}{3}$
- d. $2a \leqslant 2b$

2 Si a et b désignent des nombres réels tels que $a > b$, alors …

- a. $-2a < -2b$
- b. $-7a > -7b$
- c. $3a < 3b$
- d. $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$

3 Si x désigne un nombre réel tel que $2x \leqslant 8$, alors …

- a. $x \geqslant 4$
- b. $x \leqslant -4$
- c. $x \leqslant 4$
- d. $x \leqslant \frac{1}{4}$

4 Si x désigne un nombre réel tel que $-3x \leqslant 18$, alors …

- a. $x \geqslant 6$
- b. $x \leqslant -6$
- c. $x \leqslant 21$
- d. $x \geqslant -6$

5 Si x désigne un nombre réel tel que $7x > 8$, alors …

- a. $x < \frac{7}{8}$
- b. $x > \frac{8}{7}$
- c. $x < \frac{8}{7}$
- d. $x > -\frac{8}{7}$

Série 2

1 Si a et b désignent deux nombres réels tels que $a - b \geqslant 0$, alors …

- a. a est inférieur ou égal à b
- b. a est supérieur ou égal à b
- c. a est égal à b
- d. a est strictement supérieur à b

2 Si a et b désignent deux nombres réels tels que $a - b \leqslant 0$, alors …

- a. a est inférieur ou égal à b
- b. a est supérieur ou égal à b
- c. a est différent de b
- d. a est strictement inférieur à b

3 Si x et y désignent deux nombres réels tels que $x - y < 0$, alors …

- a. x est strictement supérieur à y
- b. on ne peut pas comparer x et y
- c. x est supérieur ou égal à y
- d. x est strictement inférieur à y

4 x désigne un nombre réel positif et y désigne un nombre réel. Si $a = 2x + y$ et $b = x + y$, alors …

- a. on ne peut pas comparer a et b
- b. a est supérieur ou égal à b
- c. a est égal à $2b$
- d. a est inférieur ou égal à b

5 x désigne un nombre réel. Si $a = x^2$ et $b = 2x - 1$, alors …

- a. a est supérieur ou égal à b
- b. on ne peut pas comparer a et b
- c. a est inférieur ou égal à b
- d. a est égal à b^2

Série 3

1 a et b désignent des nombres réels positifs ; b est différent de 0. Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$, alors …

- a. on ne peut pas comparer a et b
- b. a est supérieur ou égal à b
- c. a est inférieur ou égal à b
- d. a est inférieur ou égal à $-b$

2 a et b désignent des nombres réels positifs ; b est différent de 0. Si $\frac{a}{b} \geqslant 1$, alors …

- a. on ne peut pas comparer a et b
- b. a est inférieur ou égal à b
- c. a est supérieur ou égal à b
- d. a est supérieur ou égal à 1

3 Parmi ces quatre affirmations, une seule est vraie. Il s'agit de …

- a. $0{,}7^2$ est inférieur à 0,7
- b. $1{,}5^2$ est inférieur à 1,5
- c. $1{,}01^2$ est inférieur à 1,01
- d. $0{,}25^2$ est supérieur à 0,25

4 x désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1. Si $a = x^2$ et $b = x$, alors …

- a. on ne peut pas comparer a et b
- b. a est inférieur ou égal à b
- c. a est supérieur ou égal à b
- d. a est égal à $2b$

5 Parmi ces quatre affirmations, une seule est vraie. Il s'agit de …

- a. $\frac{1}{6}$ est supérieur à $\frac{5}{3}$
- b. $\frac{8}{11}$ est supérieur à $\frac{3}{5}$
- c. $\frac{14}{3}$ est inférieur à $\frac{23}{5}$
- d. $\frac{5}{6}$ est supérieur à $\frac{6}{7}$

Résolution d'une inéquation du 1^er^ degré

Série 1

1 L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x \leqslant 9$ est …

- a. $[3\,;+\infty[$
- b. $]-\infty\,;3]$
- c. $[-3\,;+\infty[$
- d. $]-\infty\,;3[$

2 L'ensemble des solutions de l'inéquation $-4x < 8$ est …

- a. $[-2\,;+\infty[$
- b. $]-\infty\,;-2[$
- c. $]-\infty\,;2[$
- d. $]-2\,;+\infty[$

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x+7 \geqslant 19$ est …

- a. $]4\,;+\infty[$
- b. $\left[\dfrac{26}{3}\,;+\infty\right[$
- c. $]-4\,;+\infty[$
- d. $[4\,;+\infty[$

4 L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x-1 \leqslant 1$ est …

- a. $[0\,;+\infty[$
- b. $]-\infty\,;-2]$
- c. $[-2\,;+\infty[$
- d. $]-\infty\,;0]$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $7x+7 < -28$ est …

- a. $]-\infty\,;-5[$
- b. $]-3\,;+\infty[$
- c. $]-\infty\,;-5]$
- d. $]-\infty\,;3[$

Série 2

1 L'inéquation $3x+4 < x+2$ est équivalente à …

- a. $4x < 6$
- b. $2x < -2$
- c. $3x < 6$
- d. $2x+6 < 0$

2 L'inéquation $5x-9 \geqslant 8x-7$ est équivalente à …

- a. $-2 \geqslant 3x$
- b. $-3x \geqslant -16$
- c. $13x \geqslant 2$
- d. $-3x \leqslant 2$

3 L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x-1 \leqslant -x+3$ est …

- a. $]-\infty\,;2]$
- b. $[1\,;+\infty[$
- c. $]-\infty\,;1]$
- d. $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right]$

4 L'ensemble des solutions de l'inéquation $5x+5 > 7x+1$ est …

- a. $]-\infty\,;2[$
- b. $]2\,;+\infty[$
- c. $]-2\,;+\infty[$
- d. $]-\infty\,;-2[$

5 L'ensemble des solutions de l'inéquation $1-x \leqslant 2-2x$ est …

- a. $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$
- b. $[1\,;+\infty[$
- c. $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$
- d. $]-\infty\,;1]$

Série 3

1 Romain achète des gigaoctets sur Internet. 1 Go coûte 0,05 €. Il y a 5 € de frais de dossier.
Pour payer moins de 15 €, Romain doit acheter un nombre x de Go qui vérifie l'inéquation …

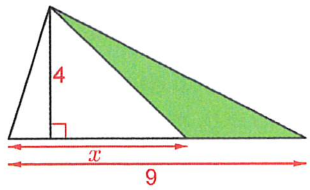
- a. $0{,}05x+5 < 15$
- b. $5x+0{,}05 < 15$
- c. $0{,}05x-5 < 15$
- d. $15x+0{,}05 < 5$

2 Pour refaire son toit, Alix paie 40 € par m² et 900 € de pose. La surface x à refaire (en m²) pour moins de 5 000 € vérifie l'inéquation …

- a. $40x+900 < 5\,000$
- b. $40x+900 < 5\,000$
- c. $900x-40 < 5\,000$
- d. $940x < 5000$

3 Unité de longueur : le centimètre.
L'aire de la surface verte est supérieure ou égale à 2 cm² lorsque x vérifie l'inéquation …

- a. $18+2x \geqslant 2$
- b. $18-2x \leqslant 2$
- c. $18-2x \geqslant 2$
- d. $18 \geqslant 2x$

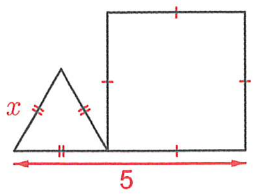


4 Si on retranche 4 au triple d'un nombre x, le nombre obtenu est inférieur ou égal au double de x lorsque x vérifie l'inéquation …

- a. $-12x \leqslant 2x$
- b. $3x-12 \leqslant 2x$
- c. $3x \leqslant 4$
- d. $3x-4 \leqslant 2x$

5 Le périmètre du triangle est inférieur ou égal à celui du carré lorsque x vérifie l'inéquation …

- a. $3x \leqslant 25$
- b. $3x \leqslant (5-x)^2$
- c. $x \leqslant 5-x$
- d. $3x \leqslant 20-4x$



Utilisation d'un tableau de signes

Série 1

1 Voici le tableau de signes d'une expression $f(x)$. On peut affirmer …

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

☐ **a.** $f(x) \geqslant 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[1;2]$
☐ **b.** $f(x) \leqslant 0$ pour x appartenant à l'intervalle $[1;2]$
☐ **c.** $f(x) \geqslant 0$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty;1]$

2 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;6]$. Voici le tableau de signes de l'expression $f(x)$. On peut affirmer que …

x	-5		3		6
$f(x)$		−	0	+	

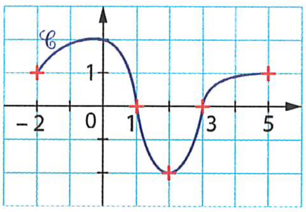
☐ **a.** $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-5;3]$
☐ **b.** $\mathscr{C}$ est située en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-5;3]$
☐ **c.** $\mathscr{C}$ est située en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[3;6]$

3 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Voici le tableau de signes de l'expression $f(x)$. On peut affirmer que …

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

☐ **a.** $\mathscr{C}$ est située en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3;2]$
☐ **b.** $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[2;+\infty[$
☐ **c.** $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3;2]$

4 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;5]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère. Le tableau de signes de $f(x)$ est incomplet. On peut compléter …



x	-2		☐ (vert)		3		5
$f(x)$		+	0	−	0	☐ (rouge)	

☐ **a.** le cadre vert par le non signe −
☐ **b.** le cadre vert par le nombre 0 et le cadre rouge par le signe +
☐ **c.** le cadre vert par le nombre 1 et le cadre rouge par le signe +

Série 2

1 À l'aide du tableau de signes ci-dessous, on peut affirmer que l'ensemble des nombres réels x tels que $(-2x+4)(3x-9) \leqslant 0$ est …

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	−	|	−	
$3x-9$		−	|	−	0	+	
$(-2x+4)(3x-9)$		−	0	+	0	−	

☐ **a.** $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$
☐ **b.** $]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$
☐ **c.** $[2;3]$

2 À l'aide du tableau de signes ci-dessous, on peut affirmer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x-1}{-x-2} \geqslant 0$ est …

x	$-\infty$		-2		0,5		$+\infty$
$2x-1$		−	|	−	0	+	
$-x-2$		+	0	−	|	−	
$\dfrac{2x-1}{-x-2}$		−	‖	+	0	−	

☐ **a.** $]-2;0,5]$
☐ **b.** $]-\infty;-2[\cup]0,5;+\infty[$
☐ **c.** $[-2;0,5]$

3 À l'aide du tableau de signes incomplet ci-dessous, on peut affirmer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0$ est …

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	|	+	
$x-1$		−	|	−	0	+	
$\dfrac{x+1}{x-1}$			0		‖		

☐ **a.** $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$
☐ **b.** $[-1;1[$
☐ **c.** $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$

4 À l'aide du tableau de signes incomplet ci-dessous, on peut affirmer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x(x+4)<0$ est …

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$-x$		+	|	+	0	−	
$x+4$			0				
$-x(x+4)$			0		0		

☐ **a.** $[-4;0]$
☐ **b.** $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$
☐ **c.** $]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

Série 3

1 Voici le tableau de signes incomplet de l'expression $A(x)=(-7x+1)(8x-16)$. On peut compléter …

x	$-\infty$		☐ (vert)		☐ (rouge)		$+\infty$
$A(x)$		−	0	+	0	−	

☐ **a.** le cadre vert par -2 et le cadre rouge par $-\dfrac{1}{7}$
☐ **b.** le cadre vert par $\dfrac{1}{2}$ et le cadre rouge par 7
☐ **c.** le cadre vert par $\dfrac{1}{7}$ et le cadre rouge par 2

2 Voici le tableau de signes d'une expression $C(x)$. $C(x)$ peut être égal à …

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$C(x)$		+	0	−	0	+	

☐ **a.** $(x-1)(x-2)$ ☐ **b.** $(x+1)(x+2)$ ☐ **c.** $(-x-1)(x-2)$

3 Voici le tableau de signes d'une expression $D(x)$. $D(x)$ peut être égal à …

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$D(x)$		−	0	+	0	−	

☐ **a.** $(3x-1)(x-2)$ ☐ **b.** $(3x+1)(x-2)$
☐ **c.** $(3x+1)(-x+2)$ ☐ **d.** $(-3x-1)(-x+2)$

4 Voici le tableau de signes d'une expression $E(x)$. $E(x)$ peut être égal à …

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$E(x)$		−	‖	+	0	−	

☐ **a.** $\dfrac{x-2}{x}$ ☐ **b.** $\dfrac{x}{x-2}$ ☐ **c.** $\dfrac{-x+2}{x}$ ☐ **d.** $\dfrac{x}{-x+2}$