Première

CHAPITRE 6

THÈME 2 / Statistiques et probabilités

Probabilités et répétitions d'expériences aléatoires

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/lz8ztn

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Exprimer la proportion 20 % sous forme d'une fraction irréductible.

2. Calculer 20 % de $\frac{7}{5}$ sous forme décimale.

Évolution et variations

3. Quelle évolution revient à multiplier par 0,65 ?

4. Que valait 118,5 avant d'avoir baissé de 21 % ?

5. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 50 % puis qui a diminué de 40 % ?

6. Quel est le taux d'évolution nécessaire à compenser une hausse de 28 % ?

7. Compléter le tableau d'indices suivant.

Année	2020	2021	2022	2023
Prime en €	1800		2200	2500
Indice	100	112		

Calculs numériques et algébriques

8. Classer dans l'ordre croissant : $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{6}$.

9. Écrire sous la forme d'une puissance de 7 :
$A = (7^3)^5 \times \frac{7^{-3}}{7^5}$.

10. Donner l'écriture scientifique de 0,00256.

11. Convertir 3,54 m² en cm².

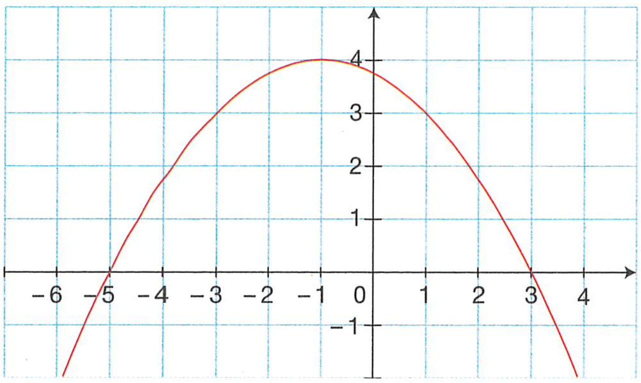
12. Construire le tableau de signes de $-2(x - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

13. On donne $P = 2(L + \ell)$. Exprimer L en fonction de P et de ℓ.
Dans la formule donnée ci-dessus, calculer P sachant que $L = 3{,}1$ et $\ell = 2{,}7$.

14. Factoriser $B = 2(x + 3) - (x + 3)^2$.

15. Développer et réduire $C = 5 - (3 - x)(x + 7)$.

Fonctions et représentations



16. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.
a. Déterminer $f(-1)$ et $f(2)$.
b. Combien 5 a t-il d'antécédents par f ?
c. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 3$.
d. Construire le tableau de signes de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

17. Construire le tableau de signes de $-2\,(x + 7)(x - \frac{1}{3})$.

18. Dans un repère :
a. tracer la droite d'équation $y = 1{,}5x - 1$.
b. tracer la droite passant par A(–1 ; –2) et de coefficient directeur $\frac{1}{3}$.

19. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(–5 ; 2) et B(–3 ; –2).

20. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par le point C(2 ; –3) et de coefficient directeur $m = 4$.

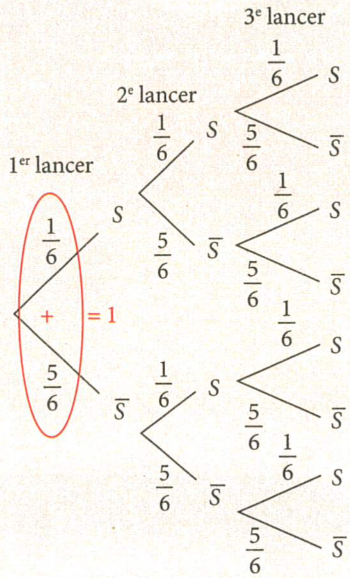
1 Représenter une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes par un arbre de probabilités

Méthode

Pour construire un arbre pondéré :
- on associe une notation à chaque issue ;
- on trace les branches de la première épreuve ;
- à partir de chaque première issue, on trace les nouvelles branches de la deuxième épreuve, etc. ;
- on ajoute les probabilités des issues sur chaque branche.

Exemple

On lance un dé classique à six faces et on regarde si on obtient 6. On répète cette épreuve trois fois : les épreuves sont indépendantes. On note S l'événement : « On obtient 6 ». On peut construire l'arbre de probabilité pondéré ci-contre.



Propriétés :

1. Dans un arbre pondéré représentant des épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le produit des probabilités du chemin qui mène à cette issue.

2. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues favorables à cet événement.

Exercice résolu A

On lance une pièce truquée, puis on lance un dé classique à 6 faces lui aussi truqué. On note F l'événement « la pièce tombe sur face » et S l'événement « le dé affiche 6 ».

On admet que la probabilité que la pièce tombe sur pile est 0,4 et que la probabilité que le dé affiche 6 est 0,3.

1 Représenter la situation par un arbre pondéré.

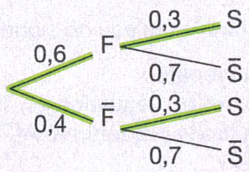
2 Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur face et que le dé affiche 6 ?

3 Quelle est la probabilité que le dé affiche 6 ?

SOLUTION

1. On commence par lancer la pièce. L'arbre de probabilités commence donc par les deux branches correspondant à toutes les issues de la pièce : face (F) et pile ($\overline{F}$). L'arbre continue par les probabilités concernant le dé. On mettra ici deux branches : l'une correspondant à l'événement « le dé affiche 6 » (S) et l'autre à l'événement « le dé affiche une autre valeur que 6 » ($\overline{S}$).
On rappelle que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Nous obtenons alors :



2. Le mot « et » se traduit en probabilité par une intersection ($\cap$).
On demande de calculer ici $P(F \cap S)$. Pour cela, on repère sur l'arbre le chemin passant par F et S. La probabilité est le produit de 0,6 et 0,3.
$P(F \cap S) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

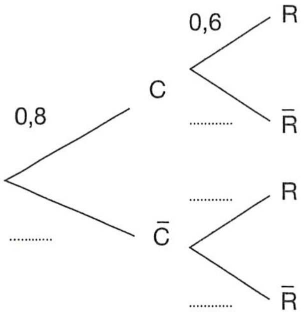
3. Pour calculer P(S), on va chercher tous les chemins qui mènent à l'événement S (en vert sur la figure). P(S) sera la somme des probabilités des chemins verts.

$$\begin{aligned} P(S) &= P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S) \\ &= 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,3 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Exercices d'application directe

1 On réalise une expérience composée de deux épreuves indépendantes.

Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



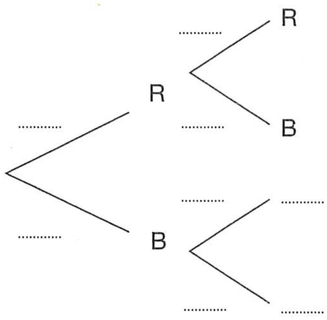
2 Construire un arbre pondéré représentant une expérience aléatoire composée de deux épreuves indépendantes sachant que $P(A) = 0,15$ et $P(B) = 0,71$. On utilisera uniquement les lettres A et B.

3 Un sac contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On prélève au hasard une boule, on note sa couleur puis on la remet dans le sac, et on effectue un deuxième tirage. On note B l'événement « La boule tirée est bleue » et R l'événement « La boule tirée est rouge ».

a. Les épreuves sont-elles indépendantes ?

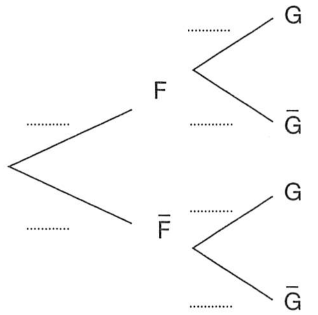
b. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage ?

c. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



4 La population de gauchers en France est estimée à 12 %. Dans une classe, il y a 14 filles et 18 garçons. On choisit un élève au hasard puis on se demande s'il est gaucher.
On note F l'événement « L'élève est une fille » et G « La personne est gauchère ».

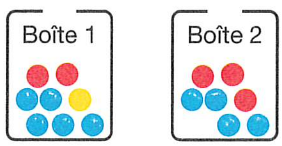
a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



b. Quelle est la probabilité de choisir un garçon droitier ?

c. Calculer la probabilité de l'issue $(F, \overline{G})$ puis interpréter le résultat.

5 On dispose de billes de couleurs réparties dans deux boîtes :



On prélève une bille dans chaque boîte.

a. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules bleues ?

d. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?

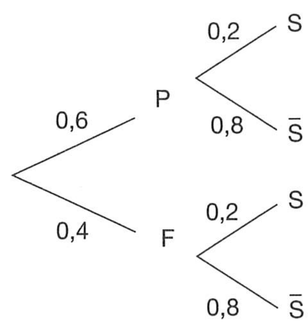
6 On lance un dé classique et on regarde si on obtient 6 ou non, puis on tire une carte dans un jeu classique de 32 cartes et on regarde si on obtient un as ou non.
On note S l'événement « On obtient 6 » et A l'événement « On tire un as ».

a. Représenter la situation par un arbre pondéré en utilisant uniquement les lettres S et A.

b. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un 6 et un as ».

c. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un 6 et une autre carte qu'un as ».

7 On lance une pièce truquée, puis on lance un dé truqué. On note P l'événement « La pièce tombe sur Pile » et F « La pièce tombe sur Face ». On note également S « Le dé tombe sur 6 ». La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



a. Quelle est la probabilité de l'événement (P, S) ?

b. Quelle est la probabilité de l'événement (F, S) ?

2 Reconnaître une situation aléatoire modélisée par la loi de Bernoulli

Une expérience de Bernoulli est une expérience à deux issues que l'on peut nommer « succès » et « échec ».

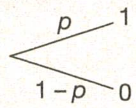
Au succès, on associe souvent le chiffre 1 et à l'échec, on associe souvent le chiffre 0.

On appelle « loi de Bernoulli » la loi de probabilité qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On appelle p le paramètre de la loi de Bernoulli qui correspond à la probabilité du succès.

On peut résumer cela dans le tableau suivant :

a_i	0	1
$P(X = a_i)$	$1 - p$	p

Ou à l'aide de l'arbre suivant :



Exercice résolu B

On lance un dé équilibré à 6 faces et on s'intéresse à la réalisation de l'événement « obtenir un 5 ».

1 Montrer en quoi cette expérience peut être modélisée à l'aide d'une expérience de Bernoulli.

2 Déterminer la loi de probabilité de l'expérience.

SOLUTION

Ici, nous pourrions penser que l'expérience comprend six évènements : « le dé affiche 1 », « le dé affiche 2 », etc.

On peut en fait appeler « succès » l'événement S défini par « le dé affiche 6 » et « échec » l'événement E défini par « le dé affiche une autre valeur que 6 ».

Le dé étant équilibré, la probabilité du succès est $\frac{1}{6}$ et celle de l'échec est $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

	Succès	Échec
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Exercices d'application directe

8 On lance un dé cubique et on observe si on obtient une valeur supérieure ou égale à 5.

a. Peut-on associer à cette situation une loi de Bernoulli ?

b. Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité associée.

9 On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on observe si on obtient une figure.

a. Peut-on associer à cette situation une loi de Bernoulli ?

b. Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité associée.

c. Quelle est l'espérance de cette loi de Bernoulli ?

10 TABLEUR Dans la cellule d'un tableur, la fonction suivante est inscrite :

```
=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)>7;"Pile";"Face")
```

a. Peut-on associer à cette formule une expérience de Bernoulli ?

b. Si oui, déterminer la loi de Bernoulli associée.

11 TABLEUR Dans la cellule d'un tableur, la fonction suivante est inscrite :

```
=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)<=4;1;0)
```

a. Peut-on associer à cette formule une expérience de Bernoulli ?

b. Si oui, déterminer la loi de Bernoulli associée.

12 TABLEUR Dans la cellule d'un tableur, la fonction suivante est inscrite :

```
=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)<=17;"Eliminé";"Reçu")
```

a. Peut-on associer à cette formule une expérience de Bernoulli ?

b. Si oui, déterminer la loi de Bernoulli associée.

13 Donner une situation pouvant être associée à une loi de Bernoulli. Préciser le succès ainsi que la valeur de sa probabilité *p*.

14 PYTHON Voici une fonction Python :

```python
def bernoulli():
    if randint(1, 10)<4:
        return 1
    return 0
```

a. Peut-on associer à cette formule une expérience de Bernoulli ?

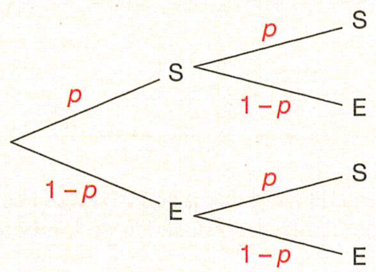
b. Si oui, déterminer la loi de Bernoulli associée.

3 Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leqslant 4$

Pour construire un tel arbre de probabilités :

- on trace les deux branches de la première épreuve qui sont S pour le succès et E pour l'échec. On place au-dessus de chaque branche la probabilité de l'événement inscrit à l'extrémité de la branche ;
- à partir de chaque événement E ou S inscrit aux extrémités des branches, on trace deux nouvelles branches menant aux événements S et E en indiquant sur chaque branche la probabilité des événements S ou E qui sont identiques aux branches précédentes ;
- on recommence autant de fois que nécessaire.

Illustration pour un arbre à deux niveaux :



Rappel

1. Au-dessus de chaque branche menant à l'événement S, la probabilité est la même.

2. Les notations les plus utilisées sont S ou 1 pour un succès et E, 0 ou $\overline{S}$ pour l'échec. D'autres notations sont possibles.

Exercice résolu C

Pour aller au lycée, Mariana prend son vélo. Elle a sur son trajet trois feux tricolores indépendants les uns des autres. La probabilité que chaque feu tricolore soit vert est de 0,7.

On notera V l'événement « le feu tricolore est vert » et R l'événement « le feu tricolore est rouge ».

1 Réaliser un arbre de probabilités représentant cette situation.

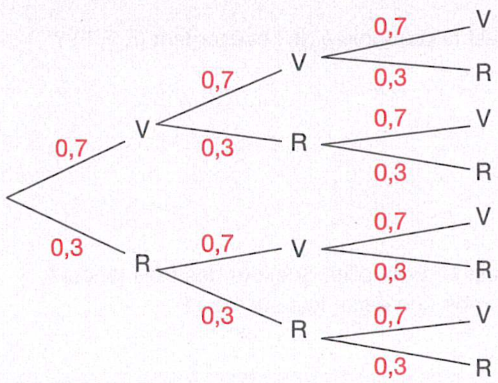
2 Quelle est la probabilité que Mariana ait le premier feu rouge et les deux suivants verts.

3 Quelle est la probabilité que Mariana ait sur son trajet un feu rouge et deux feux verts ?

4 Quelle est la probabilité que Mariana ait au minimum un feu rouge sur son trajet ?

SOLUTION

1. Un arbre de probabilités possible est :



2. On cherche la probabilité de (R,V,V). Il y a un seul chemin sur l'arbre.
Nous avons donc P(R,V,V) = 0,7 × 0,3 × 0,3 = 0,063.

3. Notons A l'événement décrit dans la question.
Il y a trois chemins contenant un feu rouge et deux feux verts : (R,V,V), (V,R,V) et (V,V,R).

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R,V,V) + P(V,R,V) + P(V,V,R) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}063 + 0{,}063 + 0{,}063 \\ &= 0{,}189 \end{aligned}$$

4. Notons B l'événement décrit dans l'énoncé. Il y a sept chemins qui contiennent au minimum un feu rouge. Il est ici plus rapide d'utiliser l'événement complémentaire $\overline{B}$ qui ne contient qu'un seul chemin : (V,V,V).

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\overline{B}) \\ &= 1 - P(V,V,V) \\ &= 1 - 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}657 \end{aligned}$$

Exercices d'application directe

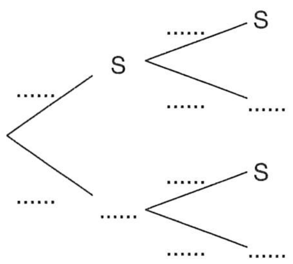
15 On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie truquée. La probabilité d'obtenir Face est égale à 0,6.

a. Les épreuves sont-elles indépendantes ?

b. Représenter la situation par un arbre pondéré.

16 On jette un dé équilibré deux fois de suite de manière indépendante.
On note S l'événement « le dé affiche 6 ».

a. Compléter l'arbre de probabilités suivant :

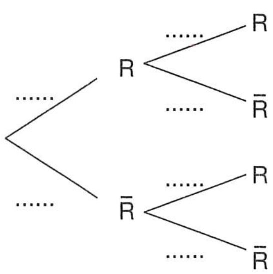


b. Quelle est la probabilité de l'événement (S,S) ?

17 Dans un jeu de 32 cartes classiques, on tire au hasard une première carte qui est remise dans le paquet puis au hasard une seconde carte.

On note R l'événement « la carte tirée est un roi ».

a. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



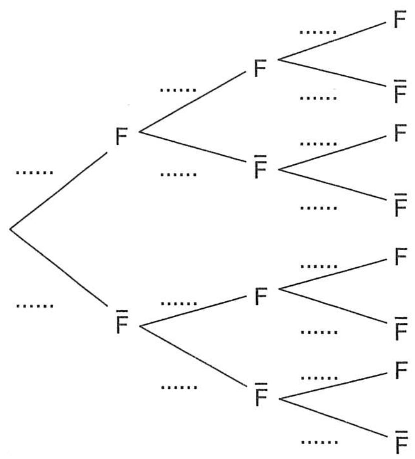
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul roi sur l'ensemble des deux tirages ?

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun roi sur l'ensemble des deux tirages ?

18 On jette trois fois de suite une pièce truquée. Les trois lancers sont indépendants. La probabilité de tomber sur pile est 0,55.

On notera F l'événement « la pièce tombe sur face ».

a. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



b. Quelle est la probabilité de l'événement ($\bar{F}$, $\bar{F}$, F) ?

c. Quelle est la probabilité que lors des trois lancers, la pièce tombe une seule fois sur face ?

d. Quelle est la probabilité que la pièce tombe au maximum deux fois sur face lors des trois lancers ?

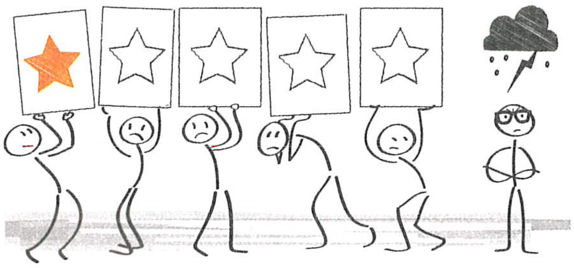
19 Dans une boulangerie, une baguette doit peser 250 g. Après une étude, le boulanger constate que 5 % de ses baguettes ne respectent pas cette contrainte. Un client achète 3 baguettes.
On arrondira les résultats à 10^{-3}.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité que toutes les baguettes soient conformes ?

c. Quelle est la probabilité qu'au moins une baguette ne soit pas conforme ?

20 Dans un pays lointain, 80 % de la population n'est pas satisfaite de son gouvernement. Un journaliste décide d'interviewer 4 personnes choisies au hasard.



Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité que les quatre personnes choisies ne soient pas satisfaites du gouvernement ?

c. Quelle est la probabilité qu'au moins une des personnes soit satisfaite du gouvernement ?

4 Interpréter les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$ et calculer leurs probabilités

En mathématiques, une variable aléatoire est associée à une lettre majuscule (souvent X ou Y).

1. $\{X = a\}$ désigne l'événement « X prend la valeur a ».
$P(\{X = a\})$ est égale à la probabilité du chemin de l'arbre pondéré amenant à cet événement.

2. $\{X \leqslant a\}$ désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égale à la valeur a ».
$P(\{X \leqslant a\})$ est égale à la somme des probabilités de tous les chemins de l'arbre pondéré amenant à cet événement.

Exercice résolu D — Comprendre la notion de variable aléatoire

Dans la station de ski où Amel est en vacances, il y a trois télésièges. Elle prend le télésiège EVEREST une fois sur deux. Elle monte dans le télésiège ACONCAGUA dans 30 % des cas et elle choisit le télésiège KILIMANDJARO le reste du temps. Chaque jour, Amel monte dans deux télésièges. On note X la variable aléatoire associée au temps passé par Amel dans les télésièges un jour donné.

Nom du télésiège	EVEREST	ACONCAGUA	KILIMANDJARO
Durée de la montée (en min)	5	8	11

1 Décrire par une phrase l'événement $\{X = 10\}$.
Donner les issues favorables à cet événement.

2 Décrire par une phrase l'événement $\{X \leqslant 16\}$.
Donner les issues favorables à cet événement.

3 À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de X.

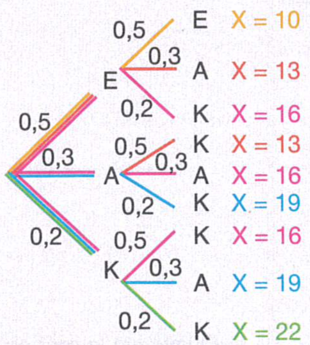
Rappel
Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (souvent sous forme de tableau) la probabilité de toutes les issues possibles pour X.

SOLUTION

1. L'événement $\{X = 10\}$ signifie qu'Amel a passé 10 minutes dans les télésièges.
La seule issue favorable à cet événement est (E, E).

2. L'événement $\{X \leqslant 16\}$ signifie qu'Amel a passé au plus 16 minutes dans les télésièges.
Les issues favorables sont (E, E) ; (E, A) ; (E, K) ; (A, E) ; (A, A) ; (K, E).

3. $P(E, E) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
$P(E, A) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$
$P(E, K) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$
$P(A, E) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$
$P(A, A) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$
$P(A, K) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$
$P(K, E) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$
$P(K, A) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$
$P(K, K) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$



a_i	10	13	16	19	22
$P(X = a_i)$	0,25	0,30	0,29	0,12	0,04

MÉTHODE
Pour déterminer une loi de probabilité, on s'aide de l'arbre puis on présente les résultats sous la forme d'un tableau. La somme des probabilités du tableau doit être égale à 1.

Exercices d'application directe

21 On note X une variable aléatoire. Traduire mathématiquement chacune des phrases suivantes.

a. X prend la valeur 1.

b. La valeur prise par X est exactement 3.

c. X est au moins égale à 5.

d. X est au plus égale à 2.

e. La valeur prise par X dépasse strictement 4.

f. X prend une valeur de 7 ou moins.

22 On lance un dé classique à 6 faces. On note X la variable aléatoire égale au double du nombre obtenu.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Quelle est l'issue favorable à l'événement $\{X = 4\}$?

c. Quelles sont les issues favorables à $\{X \leqslant 4\}$?

23 On choisit au hasard un nombre entre 1 et 21. On note X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X = 3\}$?

c. Calculer $P(X = 3)$.

d. Calculer $P(X \leqslant 3)$.

24 Décrire un énoncé où la variable aléatoire prend les valeurs -1 et $+3$.

25 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

a_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = a_i)$	0,3	0,25	0,20	0,10	0,10	0,05

a. Donner la valeur de $P(X = 2)$.

b. Quelles sont les issues favorables à l'événement $\{X \leqslant 2\}$?

c. Calculer $P(X \leqslant 2)$.

d. Quelle est la probabilité que X soit au moins égale à 2 ?

26 On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X dans le tableau ci-dessous :

a_i	-2	2	3	5	9	12
$P(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$

a. Sachant que $P(X \leqslant 3) = \frac{11}{16}$, compléter le tableau précédent.

b. Donner la probabilité que X soit au moins égale à 5.

27 On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures déjà arrêtées à un feu rouge donné lorsqu'un automobiliste arrive.
Voici la loi de probabilité de X.

a_i	0	1	2	3	4	5	6 ou plus
$P(X = a_i)$		0,25	0,30	0,15	0,10	0,05	0,05

a. Compléter le tableau.

b. Interpréter la valeur 0,30 donnée dans le tableau.

c. Déterminer $P(X \leqslant 2)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 5 voitures devant l'automobiliste ?

28 Sur des cartons, les valeurs suivantes sont notées : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10. On choisit un carton au hasard, on le remet puis on en choisit un deuxième.
On ajoute alors les deux résultats obtenus.

a. Compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer 1ensemble des résultats possibles.

	2	4	6	8	10
2	4				
4	6				
6					
8					
10					

2. On note X la variable aléatoire égale à la somme des nombres obtenus.
Les probabilités seront données sous forme fractionnaires.

a. Décrire l'événement $\{X = 10\}$.

b. Calculer $P(X = 10)$.

c. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5 Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire discrète

On considère une expérience aléatoire pour laquelle on définit une variable aléatoire X.

Pour calculer l'espérance mathématique de X, on doit :

1. Établir la loi de probabilité de X en s'aidant d'un arbre, d'un tableau ou de toute autre méthode.

La loi de probabilité de X est souvent présentée sous la forme d'un tableau comme celui-ci :

a_i	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	…	p_n

$a_1, a_2, \dots, a_n$ représentent toutes les valeurs possibles prises par X.

2. L'espérance mathématique de X, notée E(X), est définie par $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n$.

Interprétation : l'espérance de X correspond à la valeur moyenne de la variable aléatoire X lorsque l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

Exercice résolu E

Une association sportive propose à ses adhérents football ou basket.

70 % des adhérents font du football et le reste du basket.

De plus, dans chaque section sportive, 60 % font du sport en loisir et le reste en compétition.

Pour la suite de l'exercice, on note F l'événement « l'adhérent pratique le football » et L l'événement « l'adhérent pratique le sport en loisir ».

Les tarifs proposés par l'association sont les suivants :

Football	300 € annuels
Basket	250 € annuels
Ajout de 50 € annuels pour les adhérents faisant de la compétition	

On appelle X la variable aléatoire donnant le prix payé annuellement par un adhérent.

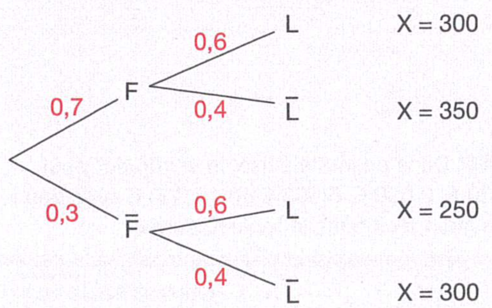
1 Faire un arbre de probabilités et indiquer au bout de chaque chemin la valeur prise par X.

2 Établir la loi de probabilité de X.

3 Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

SOLUTION

1. Un arbre de probabilités possible est :



2. On voit dans l'arbre qu'il y a trois tarifs possibles : 250 €, 300 € et 350 €.

$P(X = 250) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$

$P(X = 300) = 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}54$ (deux chemins mènent à X = 300.)

$P(X = 350) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

On peut résumer cela dans un tableau :

a_i	250	300	350
$P(X = a_i)$	0,18	0,54	0,28

3. $E(X) = 0{,}18 \times 250 + 0{,}54 \times 300 + 0{,}28 \times 350 = 305$

Cela signifie qu'en moyenne, un adhérent paie 305 € pour sa cotisation annuelle.

Exercices d'application directe

29 On joue à un jeu de hasard et on note X le gain algébrique à l'issue du jeu.
La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

a_i	−5	1	2	20
$P(X = a_i)$	0,6	0,15	0,1	0,05

a. Calculer l'espérance de X.

b. Donner une interprétation de E(X) dans le contexte de l'exercice.

30 Dans un concours, il n'y a que cinq notes possibles : 0 ; 5 ; 10 ; 15 et 20.
On note X la note que peut obtenir un candidat.
La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

a_i	0	5	10	15	20
$P(X = a_i)$	0,1	0,2	0,4	0,1	....

a. Dans le tableau ci-dessus, indiquer P(X = 20). Expliquer le calcul qui a permis de répondre à cette question.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Donner une interprétation de E(X) dans le contexte de l'exercice.

31 PYTHON On note X la variable aléatoire qui donne l'âge des élèves d'une classe de 1re STMG.
On a écrit un programme Python permettant de calculer l'espérance de X :

```python
age = [15,16,17,18]
proba =[0.1,0.4,0.35,0.15]

def esperance(X,Y):
    esp = 0
    for i in range(len(X)):
        esp = X[i]*Y[i]+esp
    return esp

print(esperance(age,proba))
```

a. Quels sont les différents âges des élèves de cette classe ?

b. Quelle est la probabilité qu'un élève ait 16 ans ?

c. Quel nombre va afficher le programme ?

d. Quelle interprétation peut-on en faire dans le contexte de l'exercice ?

32 TABLEUR Dans un jeu télévisé, le vainqueur peut gagner 1 000 €, 2 000 €, 5 000 € ou 10 000 € avec des probabilités indiquées dans le tableau suivant :

B4   fx   =SOMMEPROD(B1:D2)

	A	B	C	D	E
1	ai	1000	2000	5000	10000
2	P(X=ai)	0,4	0,3	0,2	0,1
3					
4	E(X) =	8000,9			
5					

a. La formule saisie dans la cellule B4 comprend une erreur pour le calcul de l'espérance. Proposer une modification.

b. L'espérance affichée est donc fausse. Quelle est la bonne valeur ? Justifier par un calcul.

c. Quelle interprétation de l'espérance peut-on faire dans le contexte de l'exercice ?

33 Pour son anniversaire, Lilou n'arrive pas à se décider pour les couleurs de sa décoration. Dans le magasin, elle choisit au hasard une nappe en papier : 30 % sont blanches, 25 % grises, 25 % vertes et le reste est rose. Ensuite, elle choisit au hasard des serviettes : 75 % sont blanches, les autres sont grises.

Voici les tarifs proposés par le magasin :

	Blanc	Gris	Vert	Rose
Nappes	1 €	1,50 €	2 €	2,50 €
Serviettes	1,50 €	1 €		

On note X la variable aléatoire égale au prix payé par Lilou.

Dans cet exercice, on gardera les résultats exacts sous forme décimale.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. À l'aide de l'arbre, déterminer les valeurs prises par X.

c. Calculer $P(X = 3)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

d. Calculer $E(X)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

34 Roxane doit choisir son repas du midi au restaurant universitaire. Elle a choisi le plat de poisson (3,50 €) dans 50 % des cas, le plat de viande (3 €) dans 30 % des cas ou la pizza (2,50 €) le reste du temps. Pour le dessert, elle choisit un laitage (1 €) dans 65 % des cas, un fruit (0,50 €) dans 25 % des cas et une viennoiserie (2 €) le reste du temps. On note X la variable aléatoire égale au prix payé par Roxane pour son repas du midi.

a. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

b. Déterminer les valeurs prises par X.

c. Donner la loi de probabilité de X en recopiant et complétant le tableau ci-dessous (il faut ajouter des cases !).

Valeurs de X	3	3,50	....
Probabilités associées	0,05	....	....

d. Calculer E(X) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

35 Gabriel est invité à un mariage. Lors de l'apéritif, un quart des bouchées sont à l'olive (180 kcal), 10 % sont au thon (220 kcal) et le reste est à l'oignon (260 kcal). Gabriel choisit au hasard deux bouchées. On estime que le nombre de bouchées est assez grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la première bouchée de Gabriel soit à l'oignon ?

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de kcal consommées par Gabriel.

a. Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau. On gardera les résultats exacts.

b. Calculer $P(X \leqslant 400)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Calculer E(X) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

6 Simuler N échantillons de taille *n* d'une expérience de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1

Méthode avec un tableur

Pour simuler N échantillons de taille *n* avec un tableur, on peut :
- commencer par simuler un seul échantillon de taille *n* dans une colonne qui affichera 1 (pour succès) et 0 (pour échec) ;
- ensuite, ajouter une ligne calculant la fréquence des succès de la colonne ;
- enfin, étirer toute la colonne vers la droite sur N colonnes.

Pour afficher le nuage de points, il suffit de sélectionner la dernière ligne « fréquences » et d'utiliser « insertion graphique » / « nuage de points ».

Exercice résolu F

On veut simuler avec un tableur le lancer de dix pièces qui affichent 1 (pile) avec une probabilité de 0,6 et 0 (face) avec une probabilité de 0,4.
On va ensuite simuler 40 échantillons de cette expérience.
Voici une copie d'écran d'un tableur permettent ces simulations :

	A	B	C	D
1		Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
2	lancer 1	1	0	1
3	lancer 2	0	1	1
4	lancer 3	0	1	1
5	lancer 4	1	1	1
6	lancer 5	1	1	0
7	lancer 6	1	0	0
8	lancer 7	1	1	0
9	lancer 8	0	1	1
10	lancer 9	0	1	0
11	lancer 10	0	1	1
12				
13	fréquence de 1	0,5	0,8	0,6

1 Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B2 qui, étirée vers le bas, permet de simuler le lancer d'une pièce qui affiche 1 avec une probabilité égale à 0,6 ?

2 Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B13 pour afficher la fréquence d'apparition du 1 parmi les dix lancers ?

3 On a étiré la plage de cellules B2:B13 vers la droite pour avoir 40 simulations de cette expérience.
Après avoir sélectionné la ligne 13, que peut-on faire pour afficher un graphique montrant la fréquence de ces 40 simulations d'échantillon de taille 10 ?

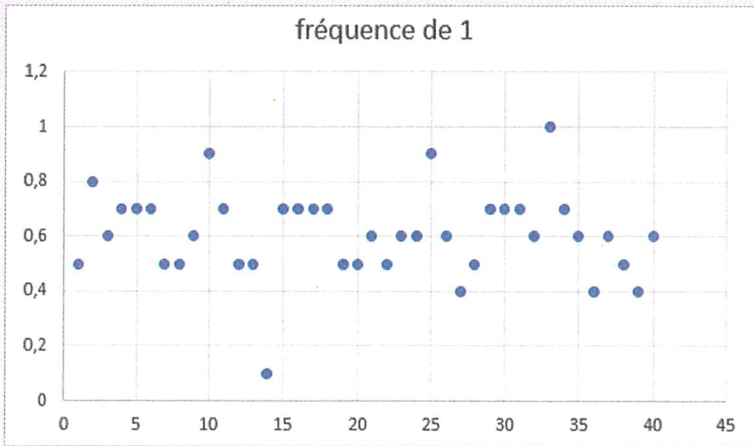
SOLUTION

1. Une formule possible en B2 est :
=si(alea.entre.bornes(1,10)<=6,1,0))

2. Une formule possible en B13 est :
=somme(B2:B11)/10

3. Une fois la ligne 13 sélectionnée, on peut insérer un graphique de type nuage de points avec des points non reliés entre eux.

On obtient alors un graphique ressemblant à celui-ci :



Méthode avec Python

Remarque : on ne traite pas la partie graphique, qui n'est pas au programme avec Python.

Pour faire une simulation identique avec Python, on peut créer :
- une fonction simulant une expérience de Bernoulli ;
- une fonction « échantillon » qui affiche la fréquence des succès des n expériences de Bernoulli ;
- une boucle itérative permettant de faire afficher le résultat de la fonction « échantillon » N fois.

Cette boucle itérative peut permettre aussi de créer une liste contenant l'ensemble des fréquences issues des N simulations.

Exercice résolu G

Voici un programme Python :

1 Que peuvent représenter les variables n et N dans ce programme ?

2 Comment compléter la ligne 15 pour que la fonction « pièce » affiche 1 avec une probabilité de 0,6 ?

3 Comment compléter la ligne 22 pour que la variable « compteur » comptabilise les 1 de chaque expérience ?

4 Comment compléter la ligne 24 pour que la fonction « échantillon » affiche la fréquence d'apparition des 1 dans cette expérience comprenant n lancers ?

```
8   from math import *
9   from random import *
10
11  n = 10
12  N = 40
13
14  def piece() :
15      if randint(1,10)<=.... :
16          return 1
17      else : return 0
18
19  def echantillon():
20      compteur = 0
21      for i in range(n-1):
22          if piece() == ....:
23              compteur = compteur+1
24      return ......
25
26  for i in range(N-1):
27      print(echantillon())
```

SOLUTION

1. N correspond au nombre d'échantillons qui va être étudié.
Dans un échantillon, on va reproduire n fois l'expérience de Bernoulli.

2. On va mettre 6. En effet, six valeurs sur dix sont inférieures ou égales à 6, ce qui correspond bien à une probabilité de $\frac{6}{10}$ ou 0,6.

3. On va mettre 1 puisque l'on comptabilise le nombre de 1.

4. La fréquence des succès est égale à l'effectif des succès divisé par l'effectif total.
Il suffit donc d'écrire « compteur/n ».

Exercices d'application directe

36 Dans un tableur, la fonction alea.entre.bornes(min,max) affiche un nombre entier de manière aléatoire entre min et max, qui sont deux entiers (avec min < max).

a. Quelles sont toutes les valeurs que peut afficher une cellule qui contient la formule : =alea.entre.bornes(1,6) ?

b. Quelles sont toutes les valeurs que peut afficher une cellule qui contient la formule : =alea.entre.bornes(1,10) ?

c. Quelles sont toutes les valeurs que peut afficher une cellule qui contient la formule : =alea.entre.bornes(1,100) ?

37 TABLEUR a. Dans la cellule d'un tableur, on a écrit la formule : =si(alea.entre.bornes(1,6)<=4,1,0)
Quelle est la probabilité que la cellule affiche la valeur 1 ?
Donner le résultat sous forme de fraction puis sous forme décimale.

b. Dans la cellule d'un tableur, on a écrit la formule :
=si(alea.entre.bornes(1,100)<=32,1,0)
Quelle est la probabilité que la cellule affiche la valeur 1 ?
Donner le résultat sous forme de fraction puis sous forme décimale.

38 **a.** Écrire 0,98 sous la forme d'une fraction décimale.

b. Compléter la formule ci-dessous pour qu'elle affiche dans une cellule tableur le mot « OUI » avec une probabilité égale à 0,98.

=si(alea.entre.bornes(……,……)<=……,«OUI»,«NON»)

39 **a.** Écrire 0,675 sous la forme d'une fraction décimale.

b. Compléter la formule ci-dessous pour qu'elle affiche dans une cellule tableur le nombre 1 avec une probabilité égale à 0,675.

=si(alea.entre.bornes(……,……)<=……,1,0)

40 PYTHON Avec la bibliothèque random de Python, on peut utiliser la fonction randint(min,max) où min et max sont des nombres entiers. Cette fonction affiche de manière aléatoire des nombres entiers compris entre min et max.

a. Dans une console Python, on a écrit print(randint(4,20)).
Quelles sont toutes les valeurs que peut afficher cette ligne de commande ?

b. Dans une console Python, on a écrit print(randint(0,7)).
Quelles sont toutes les valeurs que peut afficher cette ligne de commande ?

41 PYTHON Voici un programme Python :

```python
from math import *
from random import *

a = 0

if randint(1,10)>7:
    a = 1

print(a)
```

a. Quels sont les différents affichages possibles lors de l'exécution du programme ?

b. Quelle est la probabilité que le programme affiche 1 lors de l'exécution du programme ?

42 PYTHON Voici un programme Python :

```python
from math import *
from random import *

a = "Pile"

if randint(1,100)<=45:
    a = "Face"

print(a)
```

a. Quels sont les différents affichages possibles lors de l'exécution du programme ?

b. Quelle est la probabilité que le programme affiche « Face » lors de l'exécution du programme ?

....

....

....

....

....

43 PYTHON **a.** Écrire 0,67 sous la forme d'une fraction décimale.

....

....

....

b. Compléter la ligne 13 du programme pour que le mot « Pile » s'affiche lors de l'exécution du programme avec une probabilité égale à 0,67.

```
8   from math import *
9   from random import *
10
11  a = "Face"
12
13  if randint(.......,.......)<=.......:
14      a = "Pile"
15
16  print(a)
```

13 if randit(............,............)<=............):a=«Pile»

44 PYTHON **a.** Écrire 0,525 sous la forme d'une fraction décimale.

....

....

....

b. Compléter la ligne 13 du programme pour que le mot « Pile » s'affiche lors de l'exécution du programme avec une probabilité égale à 0,525.

```
8   from math import *
9   from random import *
10
11  a = "Face"
12
13  if randint(.......,.......)<=.......:
14      a = "Pile"
15
16  print(a)
```

13 if randit(............,............)<=............):a=«Pile»

45 TABLEUR Dans le monde, la probabilité qu'un nouveau-né soit une fille est de 0,475.
On veut simuler 20 naissances en notant 1 si le nouveau-né est une fille et 0 si le nouveau-né est un garçon.
On va ensuite simuler 100 échantillons de cette expérience.
Voici une copie d'écran d'un tableur permettent ces simulations :

	A	B	C	D	E	F
1		échantillon1	echantillon	échantillon3	échantillon4	échantillon5
2	enfant 1	0	1	1	0	0
3	enfant	1	0	0	0	0
19	enfant 18	1	0	1	0	1
20	enfant 19	1	1	0	1	1
21	enfant 20	0	0	0	1	1
22						
23	Nombre de filles	9	9	12	8	8
24	Fréquences de filles	0,45	0,45	0,6	0,4	0,4

a. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B2 qui, étirée vers le bas, permet d'afficher 1 (« fille ») avec une probabilité de 0,475 et 0 (« garçon ») le reste du temps ?

....

....

....

b. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B23 pour afficher le nombre d'apparitions du 1 dans la plage de valeurs B2:B21 ?

....

....

....

c. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B24 pour afficher la fréquence d'apparition du 1 dans la plage de valeurs B2:B21 ?

....

....

....

d. On a étiré la plage de cellules B2:B24 vers la droite pour avoir 100 simulations de cette expérience.
Après avoir sélectionné la ligne 13, que peut-on faire pour afficher un graphique montrant la fréquence de ces 100 simulations d'échantillon de taille 20 ?

....

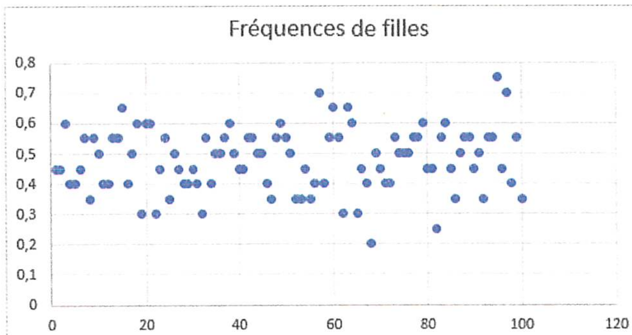
....

....

....

....

On obtient alors un graphique similaire à celui-ci :



7 Interpréter la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une expérience de Bernoulli de paramètre p

Rappel de cours

Fluctuation d'échantillonnage

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès observée sur chaque expérience varie. C'est ce qu'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

Interprétation des résultats

On étudie une simulation de N échantillons de taille n et on note s l'écart-type de la série des fréquences observées et p la proportion théorique.

Nous avons alors :

- En moyenne, environ 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - s ; p + s]$.
- En moyenne, environ 95 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 2s ; p + 2s]$.
- En moyenne, plus de 99 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 3s ; p + 3s]$.

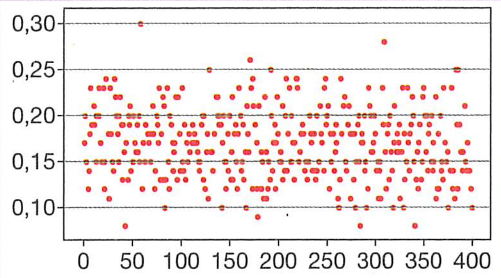
Propriété : pour de grandes valeurs de n, s et $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont proches.

Exercice résolu (H)

On observe le fait d'obtenir un 6 lorsqu'on lance un dé.

On simule 400 échantillons de taille 100.
On obtient le nuage de points ci-contre.

De plus, le calcul de l'écart type donne le résultat suivant : $s \approx 0{,}037$. On note p la probabilité d'obtenir 6.



1 Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à s de p.

2 Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à $2s$ de p.

3 Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à $3s$ de p.

4 Peut-on dire qu'il est fréquent d'obtenir moins de 10 % de 6 ?

5 Que va-t-il se passer si on augmente la taille de l'échantillon à 200 ?

SOLUTION

1. $p - s \approx 0{,}130$ et $p + s \approx 0{,}204$.
Il y a 114 fréquences en dehors de l'intervalle, donc il y en a 286 dans l'intervalle, ce qui correspond à $\frac{286}{400} = 0{,}715 = 71{,}5\ \%$.

2. $p - 2s \approx 0{,}093$ et $p + 2s \approx 0{,}241$.
Il y a 11 fréquences en dehors de l'intervalle, donc il y en a 389 dans l'intervalle, ce qui correspond à $\frac{389}{400} = 0{,}9725 = 97{,}25\ \%$.

3. $p - 3s \approx 0{,}056$ et $p + 3s \approx 0{,}278$.
Il y a 2 fréquences en dehors de l'intervalle, donc il y en a 398 dans l'intervalle, ce qui correspond à $\frac{398}{400} = 0{,}995 = 99{,}5\ \%$.

4. 14 valeurs sont inférieures ou égales à 0,10, ce qui correspond à $\frac{14}{400} = 0{,}035 = 3{,}5\ \%$.
C'est donc une situation rare.

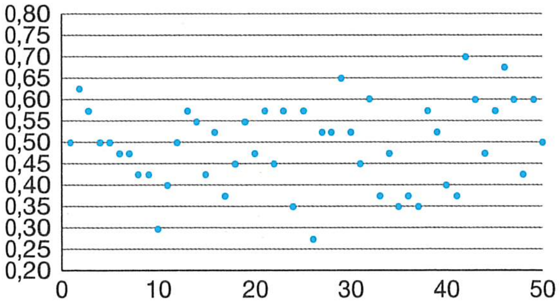
5. La taille de l'échantillon augmente donc la fluctuation diminue : les fréquences vont se rapprocher de la proportion théorique $\frac{1}{6}$.
De plus, l'écart type va diminuer et être de l'ordre de $\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{200}} \approx 0{,}035$.

MÉTHODE

Pour déterminer le pourcentage de fréquence à une distance inférieure à s de p, on calcule l'intervalle $[p - s ; p + s]$ et on compte le nombre de fréquences à l'extérieur de cet intervalle.

Exercices d'application directe

46 On donne le nuage de points suivant, obtenu suite à une simulation d'échantillons de taille 40.



a. Combien d'échantillons a-t-on simulé ?

b. Quelle semble être la proportion théorique p ?

c. On donne l'écart type de cette série : $s = 0{,}1$.
Déterminer le pourcentage des fréquences comprises dans l'intervalle $[p - ks\ ;\ p + ks]$ pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

d. Que va-t-il se passer pour s si on augmente la taille de l'échantillon à $n = 500$?

47 TABLEUR Pour son mariage, Charlotte a acheté une grande quantité de dragées. Sur le paquet, il est indiqué que 40 % des dragées sont blanches. Pour vérifier, Charlotte décide de prélever avec remise 30 échantillons de taille 20.

a. Donner une formule à entrer dans le tableur pour simuler le prélèvement d'une dragée. On note 1 si la dragée est blanche.

b. En copiant cette formule, on obtient un échantillon de taille 20. Quelle est la fréquence des dragées blanches ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Tirage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	Simulation 1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

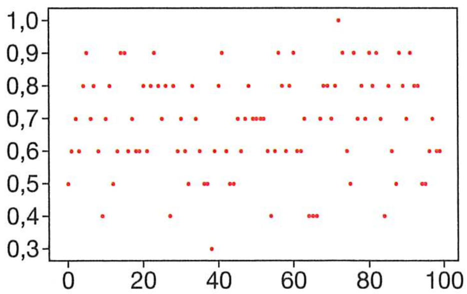
c. En simulant 30 échantillons, on obtient les fréquences suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Simulation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Fréquence	0,35	0,35	0,4	0,3	0,55	0,4	0,4	0,45	0,45	0,45
3											
4	Simulation	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	Fréquence	0,4	0,25	0,45	0,6	0,25	0,5	0,4	0,3	0,4	0,35
6											
7	Simulation	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	Fréquence	0,5	0,35	0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,4	0,45

Pourquoi cette fréquence n'est-elle pas toujours égale à 0,40 ?

d. Donner un intervalle centré sur 0,40 contenant environ 95 % des fréquences.

48 Ibrahim gagne ses matchs de badminton 7 fois sur 10. Il décide de participer à un tournoi où il jouera 10 matchs lors de la sélection.
Pour participer aux quarts de finale, il faut gagner au moins 5 matchs.
On simule 100 échantillons de 10 matchs et on obtient le nuage de points ci-dessous.



De plus, le calcul de l'écart type donne le résultat suivant : $s \approx 0{,}14$. On note p la probabilité qu'Ibrahim gagne un match.

a. Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à s de p.

b. Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à $2s$ de p.

c. Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à $3s$ de p.

d. Donner le nombre de simulations où Ibrahim sera qualifié pour les quarts de finale. Est-ce une situation fréquente ?

49 On lance un dé à 10 faces numérotées de 1 à 10. On simule 200 échantillons de 100 lancers de ce dé et on note la fréquence des lancers supérieurs ou égaux à 4. On obtient le tableau suivant :

0,57	0,58	0,59	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65
1	1	1	2	2	1	5	7	6

0,66	0,67	0,68	0,69	0,7	0,71	0,72	0,73	0,74
10	20	12	26	14	16	13	12	16

0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8	0,81	0,82	0,83
6	14	6	4	2	2	1	0	0

a. En moyenne, quelle est la fréquence obtenue ?

b. Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 68 % des fréquences environ.

c. Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 95 % des fréquences environ.

d. Calculer l'écart type s de cette série.

e. Déterminer les intervalles $[p - s ; p + s]$ et $[p - 2s ; p + 2s]$, et comparer avec les intervalles obtenus aux questions b et c.

50 On a simulé l'achat de 20 échantillons de 100 bulbes. La probabilité qu'un bulbe soit rouge est de $p = 0,4$. Dans le tableur utilisé pour la simulation, 1 représente un bulbe de couleur rouge et 0 un bulbe d'une autre couleur. On a obtenu une liste de 20 fréquences :

0,26	0,4	0,4	0,5	0,43	0,45	0,42	0,34
0,29	0,4	0,41	0,4	0,35	0,46	0,44	0,31
0,41	0,36	0,43	0,39				

Cette série de fréquences a un écart-type $s = 0,058$.

a. Calculer le pourcentage des fréquences dans l'intervalle $[p - s ; p + s]$. Donner une interprétation du résultat.

b. Calculer le pourcentage des fréquences dans l'intervalle $[p - 2s\ ;\ p + 2s]$. Donner une interprétation du résultat.

c. Calculer le pourcentage des fréquences dans l'intervalle $[p - 3s\ ;\ p + 3s]$. Donner une interprétation du résultat.

d. Que va-t-il se passer pour s si on augmente la taille de l'échantillon à $n = 400$?

51 Le tableau ci-dessous donne les écarts types des fréquences obtenues lors de 10 simulations de 20 échantillons de taille $n = 50$ où le succès a pour probabilité $p = 0{,}5$.

0,08	0,06	0,04	0,08	0,09	0,08	0,07	0,07	0,09	0,05

a. Quelle est la moyenne des écarts types obtenus ?

b. Quel est l'ordre de grandeur existant entre l'écart type et la valeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$?

52 PYTHON Dans un village en 2018, il y a eu 30 naissances, dont 20 garçons.

a. Compléter la ligne 18 du programme Python permettant de retourner la fréquence du nombre de garçons nés sur un échantillon de taille 30 en supposant que la probabilité d'obtenir un garçon est d'une chance sur deux :

```
8   from math import *
9   from random import *
10
11  n = 30
12
13  list = []
14
15  def naissance_garcons(n):
16      compteur = 0
17      for i in range(n):
18          compteur = compteur + randint(....,.....)
19      return compteur/n
20
21  for i in  range(......):
22      list.append(round(naissance_garcons(n),2))
23
24  print(list)
```

18 compteur=compteur+randint(..........,..........)

b. Compléter la ligne 21 afin de créer une liste des fréquences de 50 échantillons de taille 30.

```
[0.57, 0.57, 0.53, 0.6, 0.53, 0.5, 0.4, 0.5, 0.5, 0.33, 0.47, 0.43, 0.47, 0.43,
0.63, 0.43, 0.47, 0.4, 0.23, 0.37, 0.5, 0.47, 0.3, 0.53, 0.6, 0.6, 0.47, 0.57,
0.43, 0.4, 0.53, 0.57, 0.5, 0.5, 0.43, 0.53, 0.4, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.53,
0.6, 0.43, 0.43, 0.47, 0.6, 0.5, 0.5, 0.67]
```

21 for i in range(..........,..........):

c. Est-il possible d'avoir, dans la liste ci-dessus, la valeur 1 ? la valeur 0 ?

d. Dans la liste ci-dessus, déterminer le pourcentage de simulations parmi lesquelles il y a au moins 20 garçons. Est-ce fréquent ?

e. Dans la liste ci-dessus, déterminer le pourcentage de simulations parmi lesquelles il y a au plus 10 garçons. Est-ce fréquent ?

53 Pour pouvoir devenir surveillant de baignade, il faut passer un diplôme qui comporte 4 épreuves indépendantes : une épreuve de natation, une épreuve de secourisme, une épreuve écrite concernant les réglementations et une épreuve orale concernant la prévention des noyades.

Voici le taux de réussite à chacune des épreuves :

Épreuve	Natation	Secourisme	Écrit	Oral
Taux de réussite	84 %	92 %	78 %	85 %

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité pour un candidat d'obtenir son diplôme ?

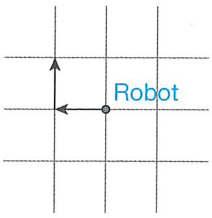
c. Quelle est la probabilité pour un candidat de réussir seulement trois des quatre épreuves ?

d. Quelle est la probabilité pour un candidat d'échouer à au moins une épreuve ?

54 Un robot se déplace deux fois de suite sur un quadrillage. À chaque intersection, il peut aller vers la droite, vers la gauche, vers le haut ou vers le bas. Il est programmé pour choisir ses déplacements avec les probabilités suivantes :

Direction	Droite	Gauche	Haut	Bas
Probabilités	0,5	0,1	0,25	0,15

a. Quelle est la probabilité que le robot effectue le déplacement suivant ?



b. Repérer sur le quadrillage toutes les positions d'arrivée possibles. Quelle est la case d'arrivée la plus probable ? Quelle est sa probabilité ?

c. Quelle est la probabilité que le robot se retrouve à sa position de départ ?

55 **Dysfonctionnement d'un distributeur**

Représenter – Calculer

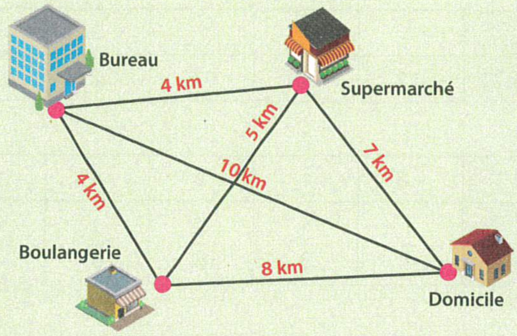
Un distributeur de boissons peut rencontrer deux sortes de problèmes techniques. Au niveau de la distribution des commandes, il ne distribue rien à l'utilisateur dans 1 % des cas et ne distribue pas le bon produit dans 5 % des cas. Au niveau de la monnaie, il ne rend pas du tout la monnaie dans 3 % des cas et ne rend pas la bonne somme dans 2 % des cas. Les deux dysfonctionnements sont indépendants l'un de l'autre.

a. Quelle est la probabilité pour un utilisateur que tout se passe bien ?

b. Quelle est la probabilité qu'un utilisateur rencontre au moins un dysfonctionnement ?

56 Chaque soir, après le travail, Maxime décide :
- de rentrer chez lui directement 2 jours sur 5 ;
- de passer par la boulangerie avant de rentrer 2 jours sur 5 ;
- de passer à la boulangerie puis au supermarché 1 jour sur 5.

Le plan des lieux est le suivant :



On note X la variable aléatoire égale à la distance parcourue par Maxime entre son bureau et son domicile.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Donner la valeur de P(X = 10).

c. Calculer P(X ⩽ 12) et interpréter le résultat dans le contexte.

57 On choisit au hasard un nombre entre 1 et 21. On note X la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus.

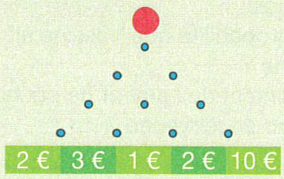
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Quelles sont les issues favorables à l'événement {X = 3} ?

c. Calculer P(X = 3).

d. Calculer P(X ⩽ 3).

58 Un joueur lance une bille du haut d'une planche cloutée. À chaque clou, la bille va au hasard à droite ou à gauche jusqu'à tomber dans une case déterminant le montant qu'il va remporter.



a. Quelle est la probabilité que le joueur gagne 10 € ?

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne 1 € ?

c. Quelle est la probabilité que le joueur gagne 2 € ?

59 PYTHON On considère le jeu de l'exercice précédent. On donne le programme Python ci-dessous :

```
from random import *
def case():
    x=0
    for i in range(4):
        x= x + randint(0,1)
    return(x)
```

Exercices d'approfondissement

a. Exécuter cet algorithme. À quoi sert-il ?

b. Programmer une fonction `gain()` qui simule ce jeu et retourne le gain du joueur.

60 Expliquer pourquoi les tableaux suivants ne sont pas des lois de probabilité.

a.

a_i	0	1	2	3	4
$P(X = a_i)$	0,2	− 0,1	0,6	0,25	0,05

b.

a_i	− 3	1	2	5	12
$P(X = a_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

c.

a_i	4	10	12	20	43
$P(X = a_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{2}$

61 Pour déterminer le montant de son argent de poche, la mère de Yassine propose à son fils de laisser faire le hasard en deux étapes. Première étape : il lance un dé classique. S'il fait 3 ou moins, il aura 2 €, s'il fait 4 ou 5, il aura 3 € et s'il fait 6, il aura 4 €. Deuxième étape : il tire une carte dans un jeu classique de 32 cartes. S'il tire un as, le montant est multiplié par 10, s'il tire une figure, le montant est multiplié par 5, s'il tire un numéro, le montant est multiplié par 3.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. On note X la variable aléatoire égale au montant d'argent de poche qu'aura Yassine.
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
b. Décrire par une phrase l'événement (X = 30) et calculer sa probabilité.
c. Calculer P(X = 20).
d. Quelle est la probabilité que Yassine ait au moins 10 € d'argent de poche ?
e. Quel est le montant de l'argent de poche que Yassine peut espérer avoir en moyenne ?

62 Dans une boutique de parfums, les cartes de fidélité sont détenues à 70 % par des femmes. Le gérant choisit au hasard sur le fichier informatique 4 clients possédant une carte de fidélité. Le gérant peut choisir plusieurs fois le même client. On note X la variable aléatoire associée au nombre de femmes choisies.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X. On gardera les valeurs exactes.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins une femme soit choisie ?

d. En moyenne, combien de femmes le gérant peut-il espérer choisir ?

63 Un vendeur de voitures est en contact chaque jour avec 4 clients. La probabilité que chaque client achète une voiture un jour donné est égale à 0,05. Le choix d'un client est indépendant du choix des autres clients. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures vendues par ce vendeur chaque jour.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Donner la loi de probabilité de X. Donner les résultats sous forme décimale arrondie à 10^{-6}.

c. Déterminer l'espérance de X.
À chaque voiture vendue, le vendeur touche une commission de 150 €. On note Y la variable aléatoire égale à la commission touchée par le vendeur chaque jour.

d. Déterminer l'espérance de Y.

e. Sur 10 jours, quel est le montant de la commission que peut espérer le vendeur ?

64 TABLEUR Pour son mariage, Charlotte a acheté une grande quantité de dragées. Sur le paquet, il est indiqué que 40 % des dragées sont blanches. Pour vérifier, Charlotte décide de prélever avec remise 30 échantillons de taille 20.

a. Donner une formule à entrer dans le tableur pour simuler le prélèvement d'une dragée. On note 1 si la dragée est blanche.

b. En copiant cette formule, on obtient un échantillon de taille 20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Tirage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	Simulation 1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

c. En simulant 30 échantillons, on obtient les fréquences suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Simulation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Fréquence	0,35	0,35	0,4	0,3	0,55	0,4	0,4	0,45	0,45	0,45
3											
4	Simulation	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	Fréquence	0,4	0,25	0,45	0,6	0,25	0,5	0,4	0,3	0,4	0,35
6											
7	Simulation	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	Fréquence	0,5	0,35	0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,5	0,4	0,45

Pourquoi cette fréquence n'est-elle pas toujours égale à 0,40 ?

d. Donner un intervalle centré sur 0,40 contenant environ 95 % des fréquences.

65 On lance un dé à 10 faces numérotées de 1 à 10.
On simule 200 échantillons de 100 lancers de ce dé et on note la fréquence des lancers supérieurs ou égaux à 4.
On obtient le tableau suivant :

0,57	0,58	0,59	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65
1	1	1	2	2	1	5	7	6

0,66	0,67	0,68	0,69	0,7	0,71	0,72	0,73	0,74
10	20	12	26	14	16	13	12	16

0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,8	0,81	0,82	0,83
6	14	6	4	2	2	1	0	0

a. En moyenne, quelle est la fréquence obtenue ?

b. Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 68 % des fréquences.

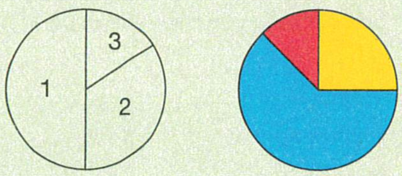
c. Déterminer un intervalle centré sur la proportion théorique p contenant 95 % des fréquences.

d. Calculer l'écart type s de cette série.

e. Déterminer les intervalles $[p - s\ ;\ p + s]$ et $[p - 2s\ ;\ p + 2s]$, et comparer avec les intervalles obtenus aux questions **b** et **c**.

66 Récolte de fonds

Paola organise pour le Téléthon le jeu suivant : il faut faire tourner chacune des roues ci-dessous.



1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Donner les issues possibles et la probabilité associée.

3. La première roue détermine le montant que l'on gagne, et la deuxième roue détermine par combien on multiplie ce montant.

Couleur	Bleu	Jaune	Rouge
Coefficient multiplicateur	× 0	× 5	× 10

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Calculer P(X = 0). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

b. En moyenne, combien le joueur peut-il espérer gagner ?

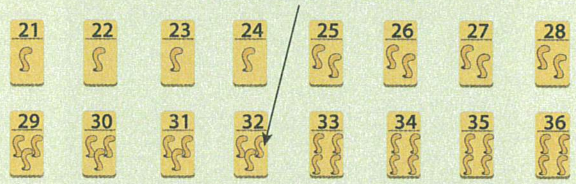
c. La partie coûte 5 € et Paola prévoit que 150 personnes viendront jouer ce week-end.
Combien peut-elle espérer récolter en moyenne pour le Téléthon ?

67 Pickomino

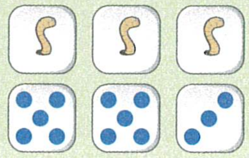
Raisonner – Calculer

Au jeu du Pickomino, on dispose de 8 dés. Chaque dé ressemble à un dé classique où la face portant le numéro 6 est remplacée par un ver. La valeur d'un ver est de 5 points. Lorsqu'il lance les dés, le joueur choisit parmi ce 1er tirage une valeur de dés (un chiffre ou un ver) et prend tous les dés correspondant à son choix et relance ensuite les dés restants. À chaque nouveau jet de dés, le joueur conserve les dés qui indiquent un même symbole, mais il ne peut choisir un symbole qu'il a choisi précédemment et qui se trouve donc déjà devant lui. Une fois que le joueur décide de ne plus lancer les dés, il fait la somme des valeurs obtenues et gagne le domino de la valeur correspondante. Le but du jeu est d'obtenir des dominos ayant le plus de vers possible.

La brochette de vers.



Mia a conservé les dés ci-après. Elle a pour le moment 28 points. Elle décide de lancer encore une fois les dés. Lorsqu'elle aura lancé les deux dés restants, elle ne pourra garder que des 1, des 2 ou des 4.



a. Quelle est la probabilité que Mia gagne un domino comportant 4 vers ?

b. Si Mia n'obtient aucun 1, ni de 2, ni de 4, elle passe son tour. Quelle est la probabilité que Mia passe son tour ?

c. Quelle est la probabilité que Mia gagne un domino comportant 3 vers ?

68 Jeu mystère

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Fonction jeu()
    C ← nombre entier aléatoire entre 1 et 4
    Si C = 1, alors X ← 5
    Sinon X ← –2
    T ← nombre entier aléatoire entre 1 et 8
    Si T = 1, alors X ← X + 5
    Sinon X ← X – 2
    Retourner X
```

1. Écrire un énoncé de deux épreuves indépendantes en lien avec un jeu de 32 cartes pouvant correspondre à cet algorithme.

2. Quel doit être le prix minimal d'une partie ?

3. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, c'est-à-dire le gain moins la mise lorsqu'on a fixé le prix de la partie à 4 €.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Donner l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte.

4. Programmer sous Python la fonction `jeu()` précédente.

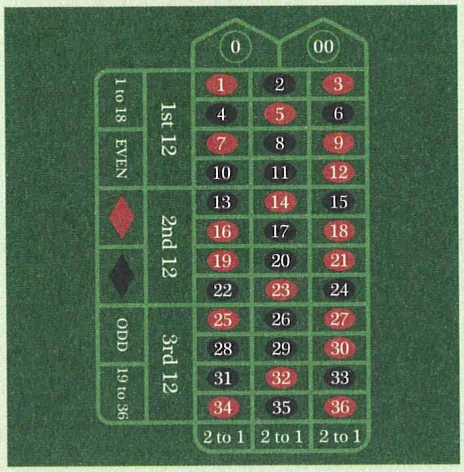
5. Écrire une fonction permettant de calculer la valeur moyenne des résultats obtenus lors de n parties.

6. Exécuter ce programme pour $n = 100$; $n = 500$ et $n = 1000$. Que constate-t-on ?

69 Au casino

Raisonner – Calculer

Une roulette anglaise est composée de numéros allant de 0 à 36. Le 0 est vert, les autres numéros sont en alternance rouges ou noirs.



Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

a. Le joueur mise 10 € sur le rouge. Si le rouge sort, il double sa mise, sinon il perd sa mise. Si le 0 sort, il perd la moitié de sa mise.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

b. Le joueur mise 10 € sur le numéro 24. Si le 24 sort, il gagne 36 fois sa mise, sinon il perd sa mise.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

c. Le joueur mise 10 € sur la première colonne.
Si un numéro de cette colonne sort, il triple sa mise, sinon il perd sa mise.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

d. Le joueur mise 5 € sur le rouge, 3 € sur la première colonne et 2 € sur le 7.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur.

e. Pour chaque question, déterminer l'espérance de la variable aléatoire.

70 Jouons avec les lettres

Raisonner – Calculer

Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet.
On prélève au hasard une lettre puis on la remet dans le sac. On répète cette épreuve 4 fois.
On gagne 10 € si on tire une voyelle et on perd 1 € si on tire une consonne. Les résultats seront arrondis à 10^{-5}.

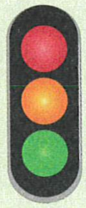
a. On note X le gain du joueur au bout des 4 tirages.
Donner la loi de probabilité de X.

b. Si l'on peut écrire avec les lettres tirées le mot GAIN, on gagne en plus la somme de 1 000 €.
Quelle est la somme maximale que l'on peut gagner et quelle est la probabilité de la gagner ?

71 Feux tricolores

Représenter – Raisonner

Quand elle rentre de sa garde de nuit, Marlène rencontre 2 feux tricolores non synchronisés. Elle est seule sur la route et ne s'arrête que si elle rencontre un feu orange ou rouge. Les feux sont rouges pendant 30 s puis verts pendant 25 s et oranges pendant 5 s.
Quel sera le temps maximal moyen pendant lequel Marlène sera à l'arrêt ?



72 Fléchettes

Représenter – Raisonner

Peter organise un tournoi de fléchettes pour son anniversaire. Il possède la cible ci-contre où les cercles ont des rayons de 5, 10 et 20 cm. La zone rouge rapporte 100 points, la zone jaune 40 et la zone bleue 20. Si on n'atteint pas la cible, on ne gagne aucun point. Aurélia, qui n'a jamais joué, lance au hasard 2 fléchettes. On considère qu'elle atteint la cible une fois sur deux et que la probabilité qu'elle soit dans une zone colorée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

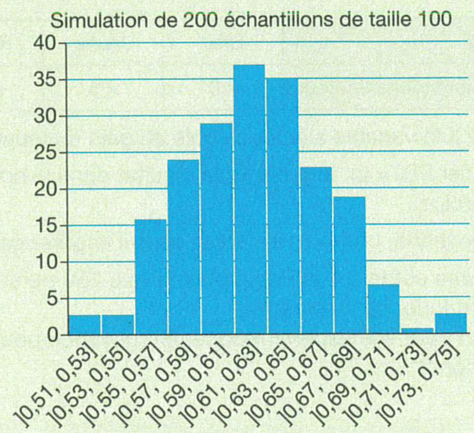
a. Quelle est la probabilité qu'Aurélia gagne 40 points ?

b. Combien de points Aurélia peut-elle espérer avoir en moyenne ?

73 Club de fitness

Modéliser – Raisonner

Dans un club de fitness, 63 % des adhérents sont des femmes. Le gérant se demande, s'il choisit au hasard 100 adhérents, quelle sera la proportion de femmes.
Il simule donc 200 échantillons de taille 100 sur tableur et obtient l'histogramme ci-dessous.



a. Quelle est la situation la plus fréquente ?

b. Donner un intervalle centré sur la proportion théorique représentant environ 95 % des situations.

c. En déduire une estimation de l'écart type de la série des fréquences obtenues.

TABLEUR 1 Les feux piétons

SITUATION Xavier se rend au lycée à pied. Sur son chemin, il doit traverser la route au niveau d'un feu piéton à 4 reprises. Les feux ne sont pas synchronisés, ils sont rouges pendant 1 minute puis verts pendant 30 secondes. Xavier n'aimant pas se lever tôt, il part au dernier moment mais s'il rencontre au moins 3 feux rouges, il arrivera en retard.

⇨ **Xavier arrivera-t-il plus d'une fois sur deux en retard ?**

A Simulation sur tableur

1 Lorsque Xavier rencontre un feu, quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?

2 Décrire l'épreuve de Bernoulli utilisée dans la situation.

On utilise un tableur pour simuler le trajet de Xavier. On choisit d'afficher un 1 si le feu est rouge. On souhaite réaliser la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Simulation	Feu 1	Feu 2	Feu 3	Feu 4	Nombre de feux rouges	Retard ?		Nombre de feux rouges rencontrés en moyenne	Fréquence des retards
2	1	0	0	1	1	2	non			
3										
4										
5										

3 **a.** Dans la cellule B2, saisir la formule $\boxed{= \text{SI(ALEA()<= 2/3 ; 1 ; 0)}}$. Expliquer la formule utilisée puis la copier de C2 à E2.

b. Compléter la cellule F2 en utilisant la fonction SOMME.

c. Compléter la cellule G2 en utilisant la fonction SI.

d. Copier les cellules afin de réaliser 500 simulations.

e. Compléter la cellule I2. Émettre une conjecture sur le nombre moyen de feux rouges rencontrés. On pourra utiliser la touche F9 pour réaliser 500 nouvelles simulations. Peut-on répondre à la question que Xavier se pose ?

f. Compléter la cellule J2 et répondre au problème de Xavier.

Feuille de calculs
liennathan.fr/kx3nj5

! Aide
- =SI(test ; « affichage 1 » ; « affichage 2 ») renvoie l'affichage 1 si le test est vrai et l'affichage 2 si le test est faux.
- =SOMME(… ; …) renvoie la somme de 2 cellules.
- =SOMME(… : …) renvoie la somme d'une plage de cellules.
- =NB. SI(plage ; « valeur ») renvoie le nombre de cellules contenant « valeur » dans la plage.

B Calculs théoriques

On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux rouges rencontrés par le lycéen.

1 Quelles sont les valeurs prises par X ?

2 Représenter la situation par un arbre pondéré. Préciser au bout de chaque chemin les valeurs de X.

3 Déterminer la loi de probabilité de X.

4 Interpréter la valeur de $P(X = 2)$ dans le contexte de l'exercice.

5 Calculer l'espérance de X et comparer avec le résultat obtenu à la question **A.3.e**.

6 Calculer $P(X \geqslant 3)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question **A.3.f**.

Travaux pratiques

PYTHON 2 Le marathon de Paris

SITUATION Anissa prépare le marathon de Paris : pour cela, elle veut aller courir au moins un jour sur deux. Cependant, elle n'aime pas courir sous la pluie. Or, il pleut en moyenne 170 jours par an à Paris.

⇨ **Anissa va-t-elle pouvoir réaliser son entraînement ?**

A Simulation d'un échantillon

1 Compléter l'algorithme en pseudo-code ci-dessous de façon à simuler le nombre de jours de pluie sur 40 jours.

```
Fonction pluie( )
  N ← 0
  Pour i allant de 1 à _______
      x ← nbre entier aléatoire entre 1 et 365
      Si x ≤ ___, alors
          N ← _______
  Retourner N
```

2 Écrire en langage Python le programme correspondant.

3 Exécuter ce programme 5 fois et noter les résultats obtenus.

4 Combien de simulations ne permettent pas à Anissa de réaliser son entraînement ?

Attention
➡ Pour utiliser la fonction `randint(a, b)` qui donne un nombre entier aléatoire entre *a* et *b*, il faut importer le module `Random` avec l'instruction suivante :
`from random import *`

B Histogramme de la simulation de 400 échantillons

Pour avoir une meilleure estimation, Anissa décide d'effectuer une simulation de 400 échantillons, d'observer les fréquences des jours de pluie et de les représenter par un histogramme.

1 Modifier le programme précédent afin qu'il retourne la fréquence des jours de pluie sur 30 jours.

2 Compléter le programme ci-dessous en utilisant la fonction `pluie()` afin de simuler les fréquences obtenues sur 400 échantillons et l'écrire en langage Python.

```
def echantillons():
    L=[]
    for i in range(___):
        L.append(_________)
    return (L)
```

3 Pour représenter l'histogramme associé à 400 simulations, écrire en langage Python le programme ci-dessous.

```
L=echantillons()
plt.hist (L,bins=[x*0.05 for x in range(21)])
plt.show()
```

Attention
➡ Pour utiliser la fonction `hist` qui représente un histogramme, il faut importer le module `matplotlib.pyplot` avec l'instruction suivante : import `matplotlib.pyplot as plt`.

C Interprétation de la simulation

1 Écrire un programme permettant de calculer le pourcentage de simulations donnant une fréquence inférieure ou égale à 0,5.

2 Interpréter le résultat obtenu dans le contexte.