Première

CHAPITRE 4

THÈME 1 / Analyse

Dérivation

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/6xelro

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Exprimer la proportion 0,23 sous forme de pourcentage.

2. Calculer 40 % de 70 % sous forme de pourcentage.

Évolution et variations

3. Quelle évolution revient à multiplier par 0,7 ?

4. Que valait 60 avant d'avoir augmenté de 20 % ?

5. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a augmenté de 30 % puis a diminué de 40 % ?

6. Le taux d'évolution nécessaire à compenser une baisse de 35 % est une hausse :
a. inférieure à 35 %.
b. égale à 35 %.
c. supérieure à 35 %.

7. Un article passe de 39 € à 27,30 €.
Quelle évolution en pourcentage a-t-il subi ?

8. Voici un tableau regroupant les indices des prix dans un magasin local entre les années 2020 et 2023.

Année	2020	2021	2022	2023
Indice	100	102	105	110

a. Quelle est l'évolution des prix en pourcentages entre 2020 et 2021 ?
b. Quelle est l'évolution des prix en pourcentages entre 2020 et 2023 ?
c. Quelle est l'évolution des prix en pourcentages entre 2021 et 2023 ?

Calculs numériques et algébriques

9. Comparer $\frac{5}{4}$ et $\frac{11}{9}$.

10. Convertir 15 626 g en dag.

11. Résoudre $9x - 2 > 3x + 5$.

12. Donner un ordre de grandeur de $56{,}67 \times 10^5$.

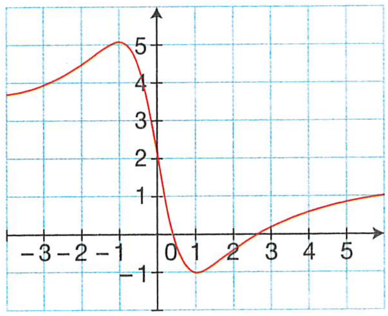
13. Construire le tableau de signes de $(5x - 10)(9 - 3x)$ sur $\mathbb{R}$.

14. a. On donne $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$. Exprimer AE en fonction de AB, de AC et de AD.
b. En reprenant la formule de la question précédente, calculer AE sachant que AB = 5 cm, AC = 8 cm et de AD = 3 cm.

15. Développer et réduire $A = 6 + 3x^2 - (x - 7)(x + 7)$.

16. Factoriser $B = (x - 5)^2 - 3(x - 5)$.

Fonctions et représentations



17. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.
a. Quelle est l'image de 5 par f ?
b. Résoudre $f(x) = 2$.
c. Résoudre $f(x) < 0$.
d. Établir le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

18. Construire le tableau de signes de $-2(2x - 4)(x + 1)$.

19. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x + 2)$ et $g(x) = -5x + 3$.

20. On considère les points A(2 ; –1) et B(–1 ; 5).
Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

21. Dans un repère :
a. Tracer la droite d'équation $y = -\frac{2}{5}x + 2$.
b. Tracer la droite passant par le point C(–2 ; 3) et de coefficient directeur –2.

1 Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point

Pour montrer qu'une fonction est dérivable au point d'abscisse a :

1. On calcule $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. On fait tendre h vers 0.

3. Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre L alors la fonction est dérivable en $x = a$ et $f'(a) = L$.

Dans le cas contraire, la fonction f n'est pas dérivable en a.

Exercice résolu A — Montrer qu'une fonction est dérivable en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$. Soit h un réel différent de 0.

1 Montrer que $f(2+h) = 3h^2 + 12h + 13$.

2 Montrer que $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 3h + 12$.

3 Évaluer $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0. En déduire la valeur de $f'(2)$.

SOLUTION

1. $f(2+h) = 3(2+h)^2 + 1 = 3(4 + 4h + h^2) + 1 = 3h^2 + 12h + 13$.

2. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{3h^2+12h+13-13}{h} = \dfrac{3h^2+12h}{h} = 3h + 12$.

3. Lorsque h est proche de 0, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ est proche de 12.

f est donc dérivable en $x = 2$ et $f'(2) = 12$.

Exercices d'application directe

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x + 6.$$

a. Justifier que $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = -4$.

....

....

b. En déduire la valeur de $f'(3)$.

....

c. Le résultat était-il prévisible ?

....

....

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

On a utilisé un tableur pour afficher les valeurs de $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour différentes valeurs de h.

	A	B
1	h	$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
2	1	2
3	0,1	1,1
4	0,01	1,01
5	0,001	1,001
6	0,0001	1,0001
7	0,00001	1,00001
8	0,000001	1,000001
9	0,0000001	1,0000001

a. Que se passe-t-il pour le nombre $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h se rapproche de zéro ?

....

....

b. Que peut-on conjecturer pour $f'(2)$?

....

....

3 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On a utilisé un tableur pour afficher les valeurs de $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ pour différentes valeurs de h.

	A	B
1	h	$\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$
2	1	-12
3	0,1	-9,3
4	0,01	-9,03
5	0,001	-9,003
6	0,0001	-9,0003
7	0,00001	-9,00003
8	0,000001	-9,000003
9	0,0000001	-9,0000003

a. Que se passe-t-il pour le nombre $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ lorsque h se rapproche de zéro ?

....

....

b. Que peut-on conjecturer pour $f'(-3)$?

....

....

4 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On a utilisé Python pour afficher les valeurs de $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pour différentes valeurs de h.

```
In [6]: runfile('C:/Users/Nico/essai.py', wdir='C:/Users/Nico')
[0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 1e-05]
(f(1+h)-f(1))/h= -2.821000000000007 pour h =  0.1
(f(1+h)-f(1))/h= -3.0100000000000016 pour h =  0.01
(f(1+h)-f(1))/h= -3.028008999999443 pour h =  0.001
(f(1+h)-f(1))/h= -3.0298009900064926 pour h =  0.0001
(f(1+h)-f(1))/h= -3.029980099977791 pour h =  1e-05
```

a. Que se passe-t-il pour le nombre $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ lorsque h se rapproche de zéro ?

....

....

b. Que peut-on conjecturer pour $f'(1)$?

....

....

5 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On a utilisé Python pour afficher les valeurs de $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ pour différentes valeurs de h.

```
In [7]: runfile('C:/Users/Nico/essai.py', wdir='C:/Users/Nico')
[0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 1e-05]
(f(-1+h)-f(-1))/h= 0.6189999999999962 pour h =  0.1
(f(-1+h)-f(-1))/h= 0.9699999999999598 pour h =  0.01
(f(-1+h)-f(-1))/h= 1.0059909999995398 pour h =  0.001
(f(-1+h)-f(-1))/h= 1.0095990099934227 pour h =  0.0001
(f(-1+h)-f(-1))/h= 1.0099599000668036 pour h =  1e-05
```

a. Que se passe-t-il pour le nombre $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ lorsque h se rapproche de zéro ?

....

....

b. Que peut-on conjecturer pour $f'(-1)$?

....

....

2 Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente

Rappel : graphiquement, $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = a$.

Par exemple : $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = -3$.

Exercices d'application directe

6 Compléter les phrases suivantes.

a. $f'(-1)$ est .... de la tangente à la courbe représentative de la fonction .... au point d'abscisse $x =$ ....

b. $g'(-2)$ est le coefficient directeur de ....

au point d'abscisse $x =$ ....

c. $h'(5)$ est .... au point d'abscisse $x = 5$.

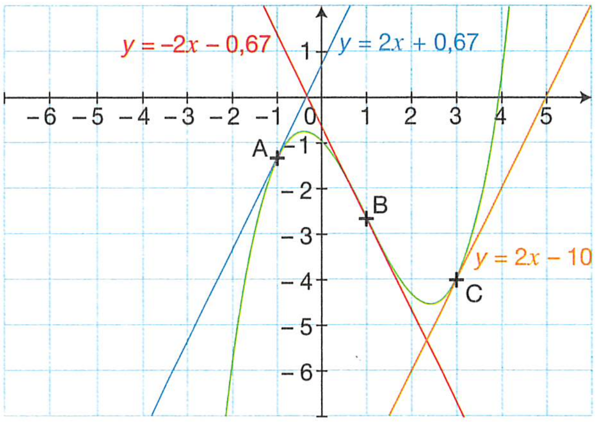
7 Compléter les phrases suivantes.

a. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $x = 3$ se note ....

b. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse $x = -5$ se note ....

c. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 1$ se note ....

8 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f en vert ainsi que les tangentes à la courbées aux points d'abscisse $x = -1$; $x = 1$ et $x = 3$.



a. Rappeler la signification de $f'(-1)$.

....

....

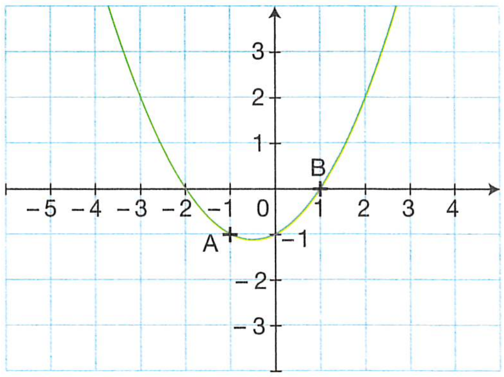
....

En déduire que $f'(-1) =$ ....

b. De même, $f'(1) =$ ....

c. De même, $f'(3) =$ ....

9 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g.



On sait de plus que $g'(-1) = -0{,}5$ et que $g'(1) = 1{,}5$ et que l'équation des tangentes à la courbe représentative de g aux points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$ sont toutes les deux de la forme $y = \dots x - 1{,}5$.

a. En vous aidant des informations fournies par le texte, donner l'équation de la tangente à la courbe en $x = -1$.

$y =$ ....$x - 1{,}5$

En utilisant le tableau de valeurs ci-dessous, tracer cette tangente.

b. En vous aidant des informations fournies par le texte, donner l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$.

$y =$ ....$x - 1{,}5$

En utilisant le tableau de valeurs ci-dessous, tracer cette tangente.

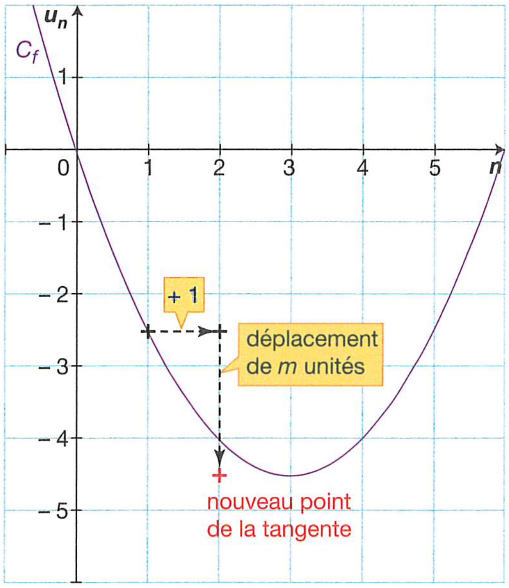
3 Construire la tangente à une courbe en un point

Méthode 1

- Lorsque l'équation réduite (de la forme $y = mx + p$) de la tangente est connue, il suffit de trouver deux points de cette droite.
- Pour trouver l'un de ces points, on remplace x par une valeur que l'on choisit et on calcule la valeur de y correspondante. On procède de même pour le second point.
- On trace ensuite la droite passant par ces deux points.

Méthode 2

- Si l'on connaît le point de la courbe et le coefficient directeur m de la tangente à la courbe en ce point, il suffit de trouver un second point.
- On peut procéder comme sur le graphique ci-contre : on avance de 1 unité en abscisses à partir du point connu et on se déplace de m unités suivant les ordonnées pour arriver sur le second point.
- Pour terminer, on trace la droite passant par les deux points.



Attention

- lorsque $m > 0$, se déplacer de m unités revient à monter de m unités suivant les ordonnées ;
- lorsque $m < 0$, se déplacer de m unités revient à baisser de m unités suivant les ordonnées (comme sur le schéma).

Remarque

Si m n'est pas un nombre entier, on peut faire un déplacement de 2 unités en abscisses et de $2 \times m$ en ordonnées ou de 3 unités en abscisses et de $3 \times m$ en ordonnées.

Exercice résolu B

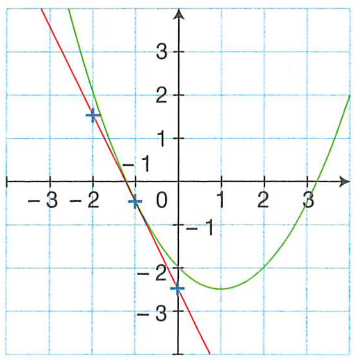
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$ est $y = -2x - 2{,}5$.
Tracer cette tangente.

SOLUTION

On sait que la tangente est une droite. Pour la tracer, on peut chercher deux points de cette droite (même trois par précaution).
Pour cela, on peut remplir un tableau de valeurs dans lequel on choisit arbitrairement trois valeurs de x.

x	-2	-1	0
y	$y = -2 \times (-2) - 2{,}5$ $y = 1{,}5$	$y = -2 \times (-1) - 2{,}5$ $y = -0{,}5$	$y = -2 \times 0 - 2{,}5$ $y = -2{,}5$

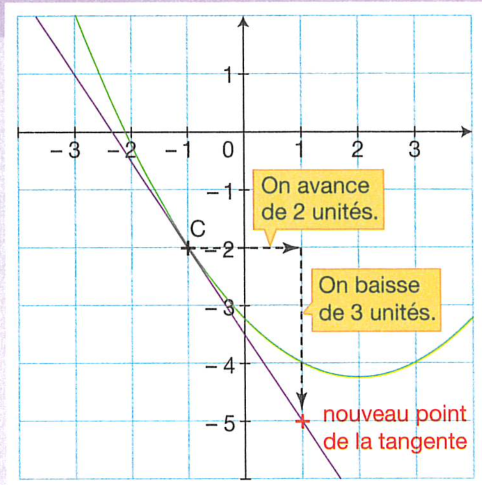
La tangente passe donc par les points de coordonnées $(-2 ; 1{,}5)$, $(-1 ; -0{,}5)$ et $(0 ; -2{,}5)$.



Cours et méthodes

Exercice résolu C

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -1$ a pour coefficient directeur $m = -1{,}5$.
Tracer cette tangente.



SOLUTION

Nous ne connaissons pas ici l'équation de la tangente.
On va donc utiliser la méthode avec le coefficient directeur.

Nous avons un point de cette tangente : le point de la courbe d'abscisse −1 que nous nommons C.

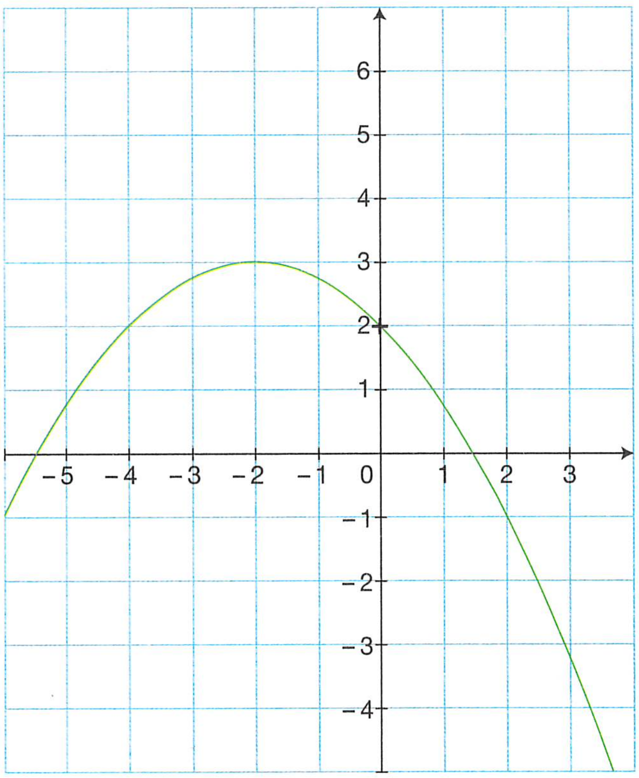
Pour trouver le second point, nous pouvons avancer d'une unité en abscisses à partir du point C, puis baisser de 1,5 unité en ordonnées.

Nous pouvons aussi avancer de 2 unités en abscisses à partir du point C puis baisser de $1{,}5 \times 2$ soit 3 unités en ordonnées. Cela a l'avantage d'être plus précis car nous avons des nombres entiers ici.

On peut ensuite tracer la droite qui passe par ces deux points.

Exercices d'application directe

10 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ est $y = -x + 2$.

a. Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	−2	0	3
$y = -x + 2$			

b. Donner les coordonnées de trois points de cette tangente.

....

....

c. Placer les trois points sur le graphique puis tracer la tangente.

2. On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = -2$ est $y = 2$.

a. Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	−2	0	3
$y = 2$			

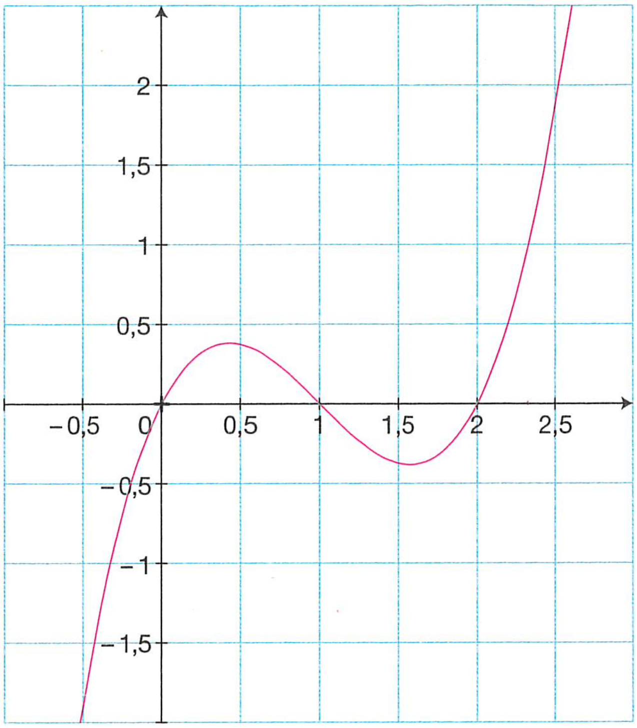
b. Donner les coordonnées de trois points de cette tangente.

....

....

c. Placer les trois points sur le graphique puis tracer la tangente.

11 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 2$ est $y = 2x - 4$.

a. Remplir le tableau de valeurs suivant dans lequel on choisira trois valeurs différentes pour x.

x	....	....	....
$y = 2x - 4$			

b. Donner les coordonnées de trois points de cette tangente.

....

....

....

c. Placer les trois points sur le graphique puis tracer la tangente.

2. On sait que l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ est $y = -x + 1$.

a. Remplir le tableau de valeurs suivant dans lequel on choisira trois valeurs différentes pour x.

x	....	....	....
$y = -x + 1$			

b. Donner les coordonnées de trois points de cette tangente.

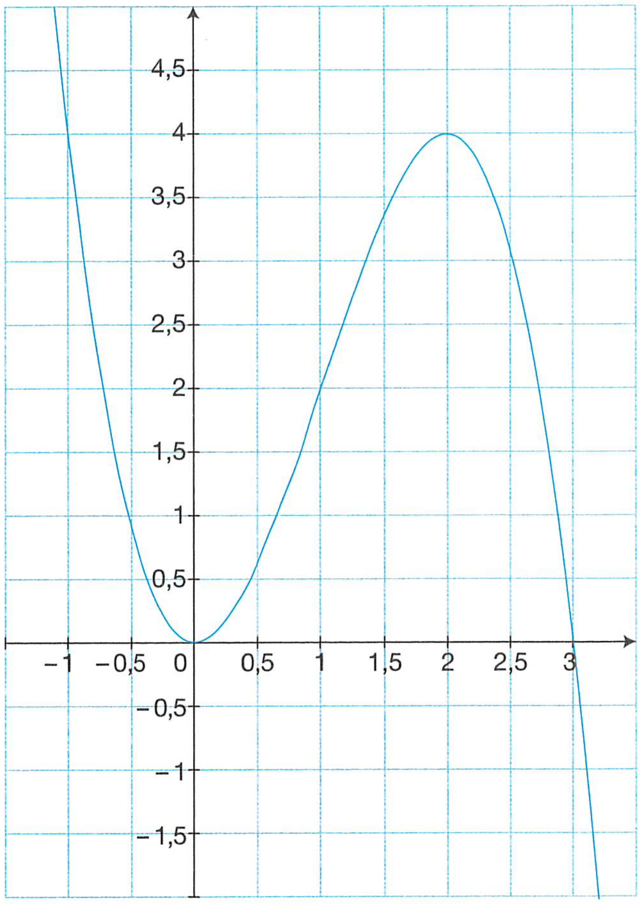
....

....

....

c. Placer les trois points sur le graphique puis tracer la tangente.

12 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ sachant que l'équation de la tangente est $y = 3x - 1$.

	....	....	....

....

....

....

....

....

b. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -1$ sachant que l'équation de la tangente est $y = -9x - 5$.

	....	....	....

....

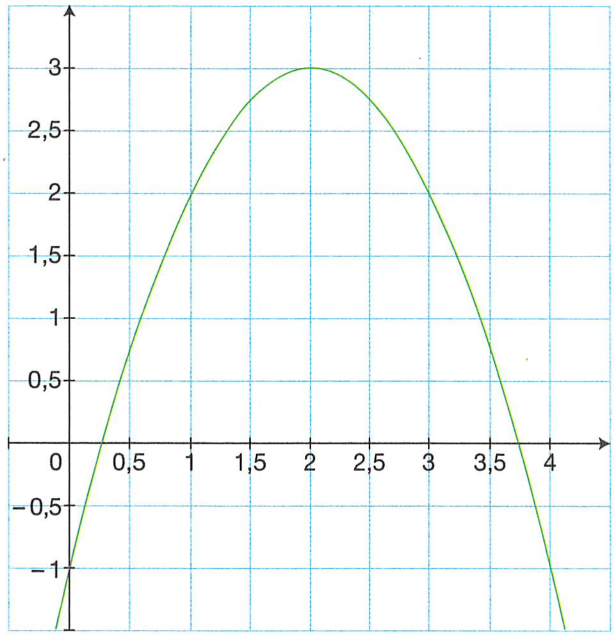
....

....

....

....

13 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction *f*.



1. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est 4.

a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 0$.

b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses, je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

2. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est –2.

a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 3$.

b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses, je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

14 On donne ci-après la courbe représentative d'une fonction *g*.

1. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 2$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est 3.

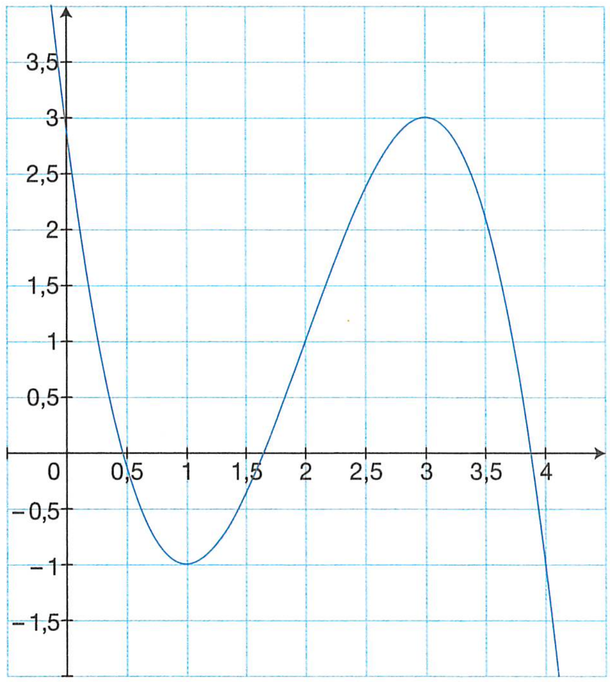
a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 2$.

b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses, je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

2. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est 0.



a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 3$.

b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses, je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

3. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est 0.

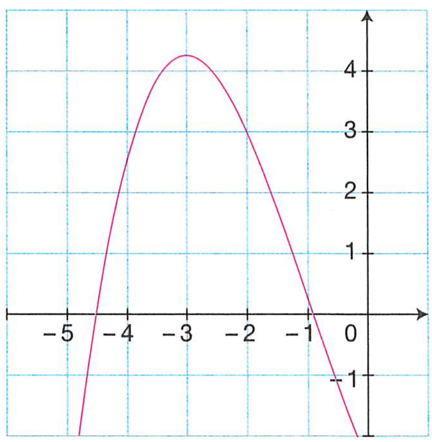
a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 1$.

b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses, je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

15 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction *h*.



1. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -2$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est –2 .

a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = -2$.

b. Compléter les phrases.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses,

je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

2. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -3$ sachant que le coefficient directeur de cette tangente est 0.

a. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = -3$.

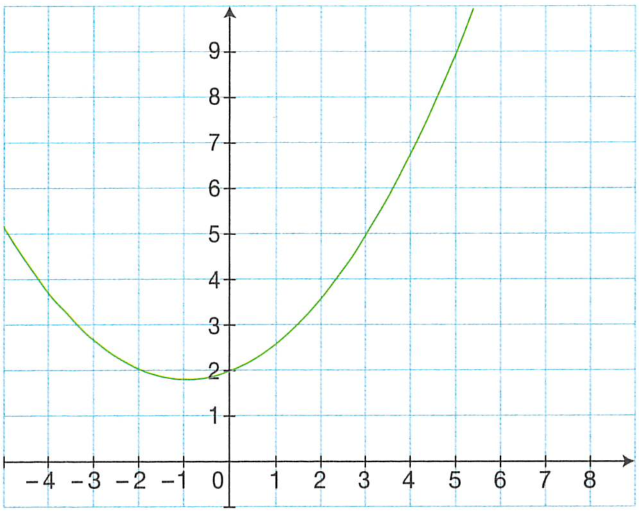
b. Compléter la phrase.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses,

je .... de ...... unités en ordonnées.

c. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

16 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction *f*.



1. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$ sachant que $f'(0) = \frac{2}{5}$.

a. Rappeler la signification graphique de $f'(0)$.

....

....

....

....

b. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 0$.

c. Compléter les phrases.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses,

je .... de ...... unités en ordonnées.

À partir de ce point, si j'avance de 5 unités en abscisses,

je .... de ...... unités en ordonnées.

d. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

2. On veut tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$ sachant que $f'(3) = \frac{4}{5}$.

a. Rappeler la signification graphique de $f'(3)$.

....

....

b. Placer sur la courbe représentative de la fonction le point d'abscisse $x = 3$.

c. Compléter les phrases.

À partir de ce point, si j'avance de 1 unité en abscisses,

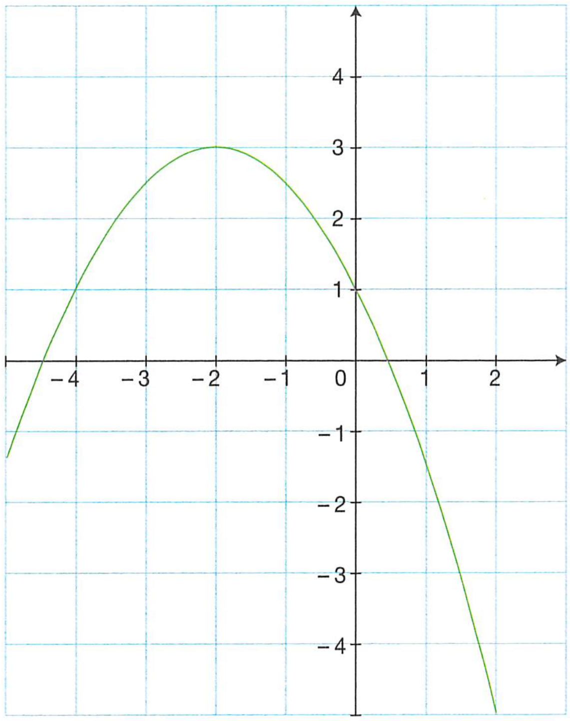
je .... de ...... unités en ordonnées.

À partir de ce point, si j'avance de 5 unités en abscisses,

je .... de ...... unités en ordonnées.

d. À l'aide de la question précédente, trouver un autre point de la tangente puis la tracer.

17 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction *g*.



a. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -4$ sachant que $g'(-4) = 2$.

....

....

....

b. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -2$ sachant que $g'(-2) = 0$.

....

....

....

c. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ sachant que $g'(1) = -3$.

....

....

....

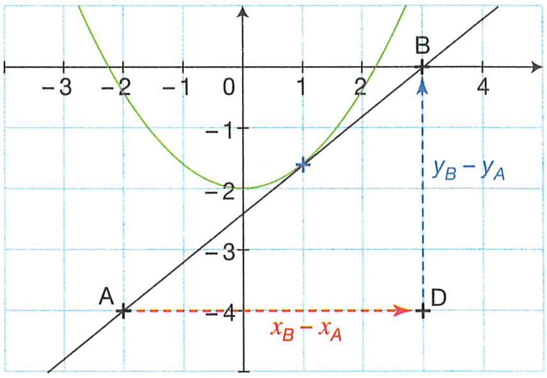
4 Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point

Pour déterminer l'équation réduite d'une tangente :

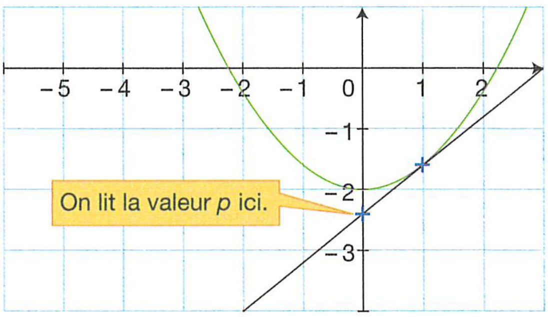
1. On repère sur le graphique la bonne tangente.

2. On rappelle que l'équation réduite de la tangente est de la forme $y = mx + p$.

3. On calcule le coefficient directeur m de cette tangente :

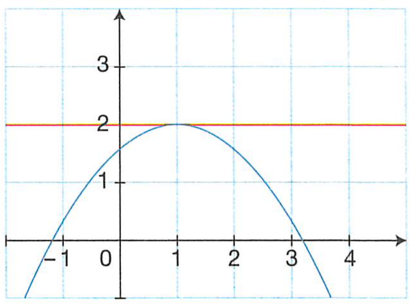
par une méthode numérique	**par une méthode graphique**
On choisit sur cette tangente deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Le coefficient directeur est alors donné par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.	On choisit sur cette tangente deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. On repère directement sur le graphique $y_B - y_A$ et $x_B - x_A$.  Le coefficient directeur est alors donné par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

4. Pour l'ordonnée à l'origine, on peut procéder de la manière suivante :

par une méthode numérique	**par une méthode graphique**
Dans l'équation réduite $y = mx + p$, on remplace x et y par les coordonnées du point A (ou celles d'un autre point de la tangente). On trouve alors rapidement la valeur de p en résolvant une équation.	L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées. 

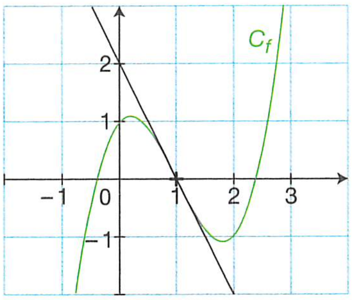
Remarque

Si la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, inutile de faire des calculs, le coefficient directeur de la tangente est égal à 0.
Dans l'exemple ci-contre, la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $y = 2$.



Exercice résolu D

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre.
On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 1$. Déterminer l'équation de cette tangente.



SOLUTION avec une méthode numérique

On sait que l'équation réduite d'une droite s'écrit sous la forme $y = mx + p$.

On place sur cette tangente les points A(0 ; 2) et B(2 ; –2).

Calculons le coefficient directeur p.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-2}{2-0} = -2$$

L'équation réduite de la tangente demandée est alors $y = -2x + p$.

Calculons l'ordonnée à l'origine p.

Dans l'équation réduite de cette tangente, nous allons remplacer x et y par les coordonnées d'un point de la tangente. Utilisons par exemple le point B(2 ; –2).

Concrètement, remplaçons x par 2 et y par –2 :

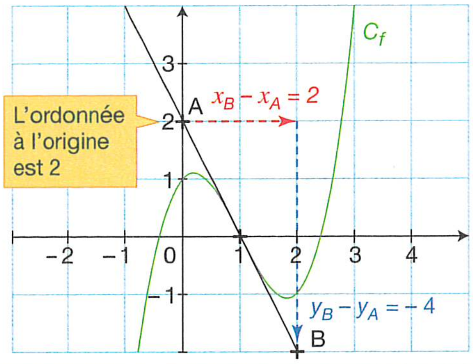
$-2 = -2 \times 2 + p$

Soit $-2 = -4 + p$

Soit $-2 + 4 = p$

Soit $p = 2$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ est $y = -2x + 2$.



SOLUTION avec une méthode graphique

On sait que l'équation réduite d'une droite s'écrit sous la forme $y = mx + p$.

Déterminons la valeur de m.

On choisit sur la tangente deux points A et B, et on lit graphiquement $y_B - y_A = -4$ et $x_B - x_A = 2$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4}{2} = -2$$

L'équation réduite de la tangente est alors $y = -2x + p$.

Déterminons la valeur de p.

Graphiquement, p correspond à l'ordonnée du point d'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées. Ici, on lit $p = 2$.

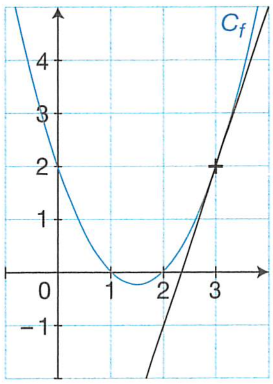
Conclusion : l'équation réduite de la tangente cherchée est $y = -2x + 2$.

Exercices d'application directe

18 Méthode numérique

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 3$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.



a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une droite.

....

b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(........ ; ....) et B(........ ; ....) de cette tangente.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ ......$x + p$.

c. Calcul de l'ordonnée à l'origine :

Le point A(........ ; ....) appartient à cette droite.

On peut donc remplacer x par .... et y par .... dans l'équation réduite de la droite.

....

....

....

....

....

....

....

Conclusion : l'équation réduite de la droite est ....

....

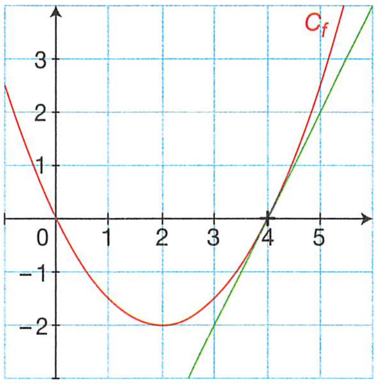
19 Méthode numérique

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 4$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.

a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une droite.

....



b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(........ ; ....) et B(........ ; ....) de cette tangente.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ ......$x + p$.

c. Calcul de l'ordonnée à l'origine :

Le point A(........ ; ....) appartient à cette droite.

On peut donc remplacer x par .... et y par .... dans l'équation réduite de la droite.

....

....

....

....

....

....

....

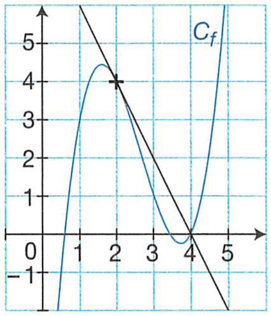
Conclusion : l'équation réduite de la droite est ....

....

20 Méthode numérique

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 2$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.



a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une tangente.

....

b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(........ ; ....) et B(........ ; ....) de cette tangente.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ ......$x + p$.

c. Calcul de l'ordonnée à l'origine :

Le point A(........ ; ....) appartient à cette droite.

On peut donc remplacer x par .... et y par .... dans l'équation réduite de la droite.

....

....

....

....

....

....

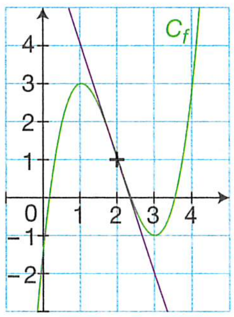
Conclusion : l'équation réduite de la droite est ....

....

21 Méthode graphique

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 2$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.



a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une droite.

....

b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(....... ; ....) et B(....... ; ....) de cette tangente.

Faire apparaître sur le graphique $y_B - y_A$ et $x_B - x_A$.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ .....$x + p$.

c. Lecture de l'ordonnée à l'origine :

Graphiquement, on lit que $p =$ ....

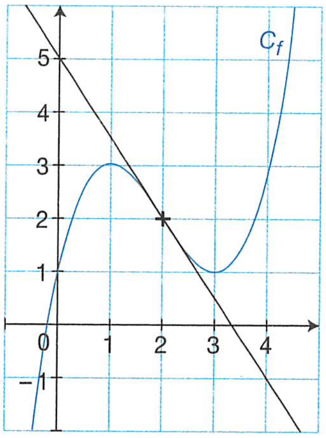
Conclusion : l'équation réduite de la tangente est ....

....

22 Méthode graphique

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 2$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.



a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une droite.

....

b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(....... ; ....) et B(....... ; ....) de cette tangente.

Faire apparaître sur le graphique $y_B - y_A$ et $x_B - x_A$.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ .....$x + p$.

c. Lecture de l'ordonnée à l'origine :

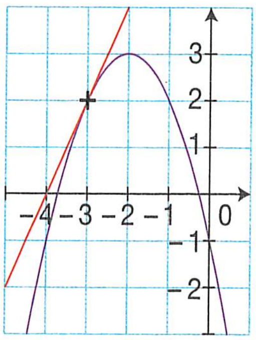
Graphiquement, on lit que $p =$ ....

Conclusion : l'équation réduite de la tangente est ....

....

23 Méthode mixte

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a tracé la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -3$. Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de cette tangente.



a. Rappeler l'écriture de l'équation réduite d'une droite.

....

b. Calcul du coefficient directeur de cette tangente :

On choisit deux points A(....... ; ....) et B(....... ; ....) de cette tangente.

Faire apparaître sur le graphique $y_B - y_A$ et $x_B - x_A$.

Le coefficient directeur est donné par la formule :

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

L'équation réduite de la tangente est alors $y =$ .....$x + p$.

c. On ne peut pas lire l'ordonnée à l'origine sur ce graphique. On va donc utiliser une méthode numérique.

Le point B(....... ; ....) appartient à cette droite.

On peut donc remplacer x par .... et y par .... dans l'équation réduite de la droite.

....

....

....

....

....

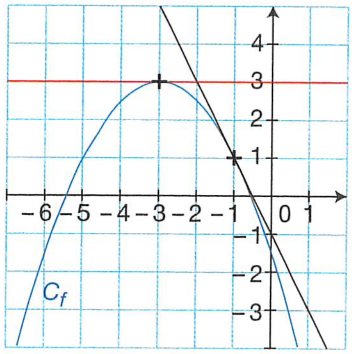
....

Conclusion : l'équation réduite de la droite est ....

....

24 On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

On a tracé sur ce graphique deux tangentes.



Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = -3$ et au point d'abscisse $x = -1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Fonction f	Fonction dérivée f'	f est dérivable sur
$f(x) = c$ avec c une constante réelle	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	

Propriété 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction définie par $u + v$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
Nous avons de même $(u - v)' = u' - v'$.

Exercice résolu E

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = x^3 - x$.
Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

SOLUTION

- Nous avons $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3$.
Nous savons, d'après le cours, que $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 0$.
Nous savons, d'après la propriété 1, que :
$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Soit $f'(x) = 2x + 0$
Soit $f'(x) = 2x$.

- Nous avons $g(x) = u(x) - v(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x$.
Nous savons, d'après le cours, que $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$.
Nous savons, d'après la propriété 1, que :
$g'(x) = u'(x) + v'(x)$
Soit $g'(x) = 3x^2 - 1$.

Exercices d'application directe

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$.

On reconnaît que $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) =$ ....
et $v(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Comme $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ alors $f'(x) =$ ....

26 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + x$.

On reconnaît que $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) =$ ....
et $v(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Comme $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ alors $f'(x) =$ ....

27 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 6 - x^2$.

On reconnaît que $f(x) = u(x) - v(x)$ avec $u(x) =$ ....
et $v(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Comme $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ alors $f'(x) =$ ....

28 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x - x^3$.

On reconnaît que $f(x) = u(x) - v(x)$ avec $u(x) =$ ....
et $v(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Comme $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ alors $f'(x) =$ ....

29 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 7$.

On reconnaît que $f(x) = u(x) - v(x)$ avec $u(x) =$ ....
et $v(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Comme $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ alors $f'(x) =$ ....

30 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + x + 5.$$

On reconnaît que $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$ avec $u_1(x) =$ ...., $u_2(x) =$ .... et $u_3(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u_1'(x) =$ ...., $u_2'(x) =$ .... et $u_3'(x) =$ ....

Comme $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$ alors $f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x)$ soit $f'(x) =$ ....

31 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - x^2 + 16.$$

On reconnaît que $f(x) = u_1(x) - u_2(x) + u_3(x)$ avec $u_1(x) =$ ...., $u_2(x) =$ .... et $u_3(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u_1'(x) =$ ...., $u_2'(x) =$ .... et $u_3'(x) =$ ....

Comme $f(x) = u_1(x) - u_2(x) + u_3(x)$ alors $f'(x) = u_1'(x) - u_2'(x) + u_3'(x)$ soit $f'(x) =$ ....

Propriété 2
Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(ku)' = k \times u'$.

Exercice résolu F

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2$ et $g(x) = -5x$.
Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.

SOLUTION

- $f(x) = 6 \times u(x)$ avec $u(x) = x^2$

Nous savons que $u'(x) = 2x$.
Comme $f(x) = 6 \times u(x)$ alors $f'(x) = 6 \times u'(x)$
Soit $f(x) = 6 \times 2x$, ce qui donne $f'(x) = 12x$.

- $g(x) = -5 \times u(x)$ avec $u(x) = x$

Nous savons que $u'(x) = 1$.
Comme $g(x) = -5 \times u(x)$ alors $g'(x) = -5 \times u'(x)$
Soit $g(x) = -5 \times 1$, ce qui donne $g'(x) = -5$.

Exercices d'application directe

32 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3$.

On reconnaît que $f(x) = 2 \times u(x)$ avec $u(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ ....

Comme $f(x) = 2 \times u(x)$ alors $f'(x) = 2 \times u'(x)$

Soit $f'(x) =$ ....

Soit $f'(x) =$ ....

33 Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = -12x.$$

On reconnaît que $g(x) = -12 \times u(x)$ avec $u(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ ....

Comme $g(x) = -12 \times u(x)$ alors $g'(x) = -12 \times u'(x)$

Soit $g'(x) =$ ....

Soit $g'(x) =$ ....

34 Soit h la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 3x^2.$$

On reconnaît que $h(x) = 3u(x)$ avec $u(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ ....

Comme $h(x) = 3 \times u(x)$ alors $h'(x) = 3 \times u'(x)$

Soit $h'(x) =$ ....

Soit $h'(x) =$ ....

35 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{5}{3}x^3.$$

On reconnaît que $f(x) = \frac{5}{3} \times u(x)$ avec $u(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ ....

Comme $f(x) = \frac{5}{3} \times u(x)$ alors $f'(x) = \frac{5}{3} \times u'(x)$

Soit $f'(x) =$ ....

Soit $f'(x) =$ ....

36 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^3.$$

Remarque : $-x^3 = -1 \times x^3$

On reconnaît que $f(x) = -u(x)$ avec $u(x) =$ ....

D'après le cours, nous avons $u'(x) =$ ....

Comme $f(x) = -u(x)$ alors $f'(x) = -u'(x)$

Soit $f'(x) =$ ....

Soit $f'(x) =$ ....

Méthode générale

1. Si la fonction n'est composée que d'une fonction de référence, on dérive directement la fonction en utilisant le tableau de dérivation et éventuellement la propriété 2.

2. Si la fonction est une somme (ou une différence) de plusieurs fonctions de référence, la fonction dérivée est la somme (ou la différence) de la dérivée de ces fonctions de référence.

Exercice résolu G

Soient f et g les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 + 2x^2$ et $g(x) = -5x^2 + 8x - 1$.
Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.

SOLUTION

• $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 7x^3$ et $v(x) = 2x^2$.
En utilisant la propriété 2, nous savons que $u'(x) = 7 \times 3x^2 = 21x^2$ et $v(x) = 2 \times 2x = 4x$.
Comme $f(x) = u(x) + v(x)$ alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Soit $f'(x) = 21x^2 + 4x$

• $g(x) = u_1(x) + u_2(x) - u_3(x)$ avec $u_1(x) = -5x^2$, $u_2(x) = 8x$ et $u_3(x) = 1$
En utilisant la propriété 2, nous savons que $u_1(x) = -5 \times 2x = -10x$, $u_2(x) = 8 \times 1 = 8$ et $u_3(x) = 0$.
Comme $g(x) = u_1(x) + u_2(x) - u_3(x)$ alors $g'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) - u_3'(x)$
Soit $g(x) = -10x + 8 - 0$
Soit $g(x) = -10x + 8$

SOLUTION **avec rédaction simplifiée**

• On écrit l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites : $f(x) = 7 \times x^3 + 2 \times x^2$.
On peut repérer au surligneur les fonctions présentes dans le tableau de dérivation p. 86 :
$f(x) = 7 \times x^3 + 2 \times x^2$

et on remplace chaque fonction surlignée par sa fonction dérivée

$f'(x) = 7 \times 3x^2 + 2 \times 2x$
Soit $f'(x) = 21x^2 + 4x$

• On écrit l'expression de $g(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites : $g(x) = -5 \times x^2 + 8 \times x - 1$.
On peut repérer au surligneur les fonctions présentes dans le tableau de dérivation p. 86 :
$g(x) = -5 \times x^2 + 8 \times x - 1$

On remplace chaque fonction surlignée par sa fonction dérivée :

$g'(x) = -5 \times 2x + 8 \times 1 - 0$
Soit $g'(x) = -10x + 8$

Attention

Il faut bien faire attention aux constantes (les nombres) car elles n'ont pas toutes le même statut. On a surligné le 1, que l'on a considéré comme une fonction, car ce 1 ne multiplie ni x, ni x^2, ni x^3.
En revanche, le -5 et le 8 ne sont pas considérés comme des fonctions car ces constantes multiplient x, x^2 ou x^3.

Exercices d'application directe

37 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 6.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

38 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 2x + 7.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

39 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

40 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^3 + 12x^2 - x.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

41 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 5x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}5x.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

42 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 1{,}2x^3 + 0{,}5x^2 + 2{,}4x - 6{,}6.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

43 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2{,}5x^3 - 0{,}8x^2 + 3{,}07x - 2.$$

a. Réécrire l'expression de $f(x)$ avec les signes « $\times$ » implicites.

$f(x) =$ ....

b. À l'aide d'un surligneur, indiquer les fonctions du tableau de dérivation p. 86.

$f(x) =$ ....

Remplacer chaque expression surlignée par sa fonction dérivée, puis écrire $f'(x)$ sous forme simplifiée.

$f'(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

6 Déterminer par le calcul l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point

Pour déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe en un point donné, on procède de la manière suivante.

a. On écrit l'équation générale : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

b. On remplace a par la valeur demandée (on ne remplace jamais x dans ce type de question).

c. On calcule $f(a)$.

d. On calcule $f'(x)$ puis $f'(a)$.

e. Dans l'équation donnée en **a.**, on remplace $f(a)$ et $f'(a)$ par les valeurs numériques trouvées en **c.** et en **d.**

f. On développe l'expression trouvée en **e.** pour avoir l'équation réduite de la tangente cherchée.

Exercice résolu (H)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

SOLUTION

a. L'équation réduite de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

b. L'équation est demandée en $x = 2$. On remplace a par 2.
L'équation s'écrit alors $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

c. On calcule $f(2)$: $f(2) = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 7$

d. On calcule $f'(x)$: ici, $f'(x) = 16x - 3$.
On calcule $f'(2)$: ici, $f'(2) = 6 \times 2 - 3 = 9$.

e. Dans l'équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, on remplace $f(2)$ par 7 et $f'(2)$ par 9.
L'équation s'écrit alors $y = 9(x - 2) + 7$.

f. On développe et on réduit l'expression :
$y = 9(x - 2) + 7$
Soit $y = 9x - 18 + 7$
Soit $y = 9x - 11$

Exercices d'application directe

44 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x^2 + 2x - 1.$$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 0$.

a. L'équation réduite de la tangente est ……

b. L'équation est demandée en $x =$ ……
On remplace a par ……
L'équation s'écrit alors ……

c. On calcule $f(0)$.
$f(0) =$ ……
Soit $f(0) =$ ……

d. Calculer $f'(x)$.

……

……

……

……

En déduire $f'(0)$.

……

……

e. Remplacer $f(0)$ et $f'(0)$ dans l'équation proposée dans la question **b**.

……

f. Développer et réduire l'expression trouvée dans la question précédente.

……

……

……

……

45 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^2 + 3x - 5.$$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 1$.

a. L'équation réduite de la tangente est ....

b. L'équation est demandée en x = ...

On remplace a par ....

L'équation s'écrit alors ....

c. On calcule $f(1)$.

$f(1)$ = ...

Soit $f(1)$ = ...

d. Calculer $f'(x)$.

....

....

En déduire $f'(1)$.

....

....

e. Remplacer $f(1)$ et $f'(1)$ dans l'équation proposée dans la question b.

....

f. Développer et réduire l'expression trouvée dans la question précédente.

....

....

....

....

46 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1.$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = -1$.

a. L'équation réduite de la tangente est ....

b. L'équation est demandée en x = ...

On remplace a par ....

L'équation s'écrit alors ....

c. On calcule $f(-1)$.

$f(-1)$ = ...

Soit $f(-1)$ = ...

d. Calculer $f'(x)$.

....

....

En déduire $f'(-1)$.

....

....

e. Remplacer $f(-1)$ et $f'(-1)$ dans l'équation proposée dans la question b.

....

f. Développer et réduire l'expression trouvée dans la question précédente.

....

....

....

....

47 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 3x - 5.$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 1$.

a. L'équation réduite de la tangente est ....

b. L'équation est demandée en x = ...

On remplace a par ....

L'équation s'écrit alors ....

c. On calcule $f(1)$.

$f(1)$ = ...

Soit $f(1)$ = ...

d. Calculer $f'(x)$.

....

....

En déduire $f'(1)$.

....

....

e. Remplacer $f(1)$ et $f'(1)$ dans l'équation proposée dans la question b.

....

f. Développer et réduire l'expression trouvée dans la question précédente.

....

....

....

....

48 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 5x + 2.$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7 Étudier les variations d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Tableau de variations

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f

1. On détermine la dérivée f'.
2. On étudie le signe de f'.
3. On construit le tableau de variations de f.
4. On calcule les images aux bornes de I, ainsi qu'aux éventuelles valeurs où l'on observe un changement de sens de variation de la fonction f.

Rappel

- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I alors la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I alors la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Exercice résolu 1

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$.
Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

SOLUTION

a. On commence par calculer la fonction f'.

Comme $f(x) = -4 \times x^2 + 3 \times x - 1$

Alors $f'(x) = -4 \times 2x + 3 \times 1 - 0$

Soit $f'(x) = -8x + 3$

b. Étudions le signe de $f'(x)$.

f' est une fonction affine. Résolvons pour commencer $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{8}$

On sait que $f'(x)$ change de signe en $x = \dfrac{3}{8}$. f' étant une fonction affine décroissante (car son coefficient directeur -8 est négatif), elle est positive jusqu'à $x = \dfrac{3}{8}$ et négative après.

On peut résumer cela avec un tableau de variations dans lequel on prévoit une ligne pour les variations de f :

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{8}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de la fonction f		↗	$\dfrac{-7}{16}$	↘	

$f\left(\dfrac{3}{8}\right) = -4 \times \left(\dfrac{3}{8}\right) + 3 \times \dfrac{3}{8} - 1 = \dfrac{-7}{16}$

Exercice résolu J — Étudier le sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathrm{I} = [-5 ; 4]$ par :
$f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 0{,}5$.

1. Étudier les variations de f sur I.
2. En déduire les extremums de f sur I.

SOLUTION

1. • Détermination de la dérivée f' :
$f'(x) = 3x^2 + 4{,}5 \times 2x - 12 \times 1 + 0 = 3x^2 + 9x - 12$.

• Étude du signe de f' : f' est un polynôme du second degré, donc on le factorise pour étudier son signe.
On voit assez facilement que 1 est une solution de $f'(x) = 0$. De plus, son coefficient a vaut 3.
Donc $f'(x) = 3(x - 1)(x - x_2)$.
On développe $f'(x)$ pour déterminer la valeur de x_2 :
$f'(x) = 3(x^2 - x_2x - x + x_2) = 3x^2 + 3(-x_2 - 1)x + 3x_2$.

Alors $3x_2 = -12$ donc $x_2 = \dfrac{12}{3} = -4$.

Par conséquent $f'(x) = 3(x - 1)(x + 4)$.
On en déduit le tableau de signes de f' sur I :

x	-5		-4		1		4
Signe de f'		+	0	−	0	+	

• Construction du tableau de variations de f :

x	-5	-4	1	4
Variations de f	48 ↗	56,5 ↘	-6 ↗	88,5

• Calcul des images par f que l'on intègre au tableau de variations :
$f(-5) = 48$; $f(-4) = 56{,}5$; $f(1) = -6$ et $f(4) = 88{,}5$.

2. En observant les valeurs des images par f du tableau de variations, on en déduit que sur I, le minimum de f est -6 atteint pour $x = 1$ et son maximum est 88,5 atteint pour $x = 4$.
Par ailleurs, la dérivée f' s'annule en -4 et change de signe autour de cette valeur. Donc 56,5 est un maximum local de f.

Exercices d'application directe

49 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$.
Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

Comme $f(x) = 6 \times x^2 - 2 \times x + 3$.

Alors $f'(x) =$ ....

Soit $f'(x) =$ ....

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

$f'(x)$ est une fonction affine.

Résoudre pour commencer $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ .... $= 0$

....

....

....

....

....

On sait que $f'(x)$ change de signe en $x =$ .... f' étant une fonction affine croissante (car son coefficient directeur est positif), elle est positive jusqu'à $x =$ .... et négative après.
On peut résumer cela avec un tableau de variations dans lequel on prévoit une ligne pour les variations de f :

x	$-\infty$	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			
Variations de la fonction f			

$f($........$) =$ ....

50 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 4x - 5$.
Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

Comme $f(x) =$ ....

Alors $f'(x) =$ ....

Soit $f'(x) =$ ....

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

f' est une fonction affine.

Résoudre pour commencer $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ .... $= 0$

....

....

....

On sait que $f'(x)$ change de signe en $x =$ .... f' étant une fonction affine croissante (car son coefficient directeur est positif), elle est positive jusqu'à $x =$ .... et négative après. On peut résumer cela avec un tableau de variations dans lequel on prévoit une ligne pour les variations de f :

x	$-\infty$	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			
Variations de la fonction f			

f(............) = ...

51 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$.

Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

....
....
....

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

....
....
....
....
....

c. En déduire le tableau de variations.

x	$-\infty$	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			
Variations de la fonction f			

f(............) = ...

52 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7x^2 + 2x + 6$.

Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

....
....
....

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

....
....
....
....
....

c. En déduire le tableau de variations.

x	$-\infty$	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			
Variations de la fonction f			

f(............) = ...

53 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x$.

Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.

....
....
....
....
....
....
....

x	$-\infty$	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			
Variations de la fonction f			

f(............) = ...

54 Exercice en partie résolu

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$.

Le but de l'exercice est de déterminer le tableau de variations de la fonction f.

a. Calculons $f'(x)$:

Comme $f(x) = -x^3 + 6 \times x^2 + 1$

Alors $f'(x) = -3x^2 + 6 \times 2x + 0$

Soit $f'(x) = -3x^2 + 12x$

b. Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)$ est une fonction du second degré. Pour déterminer ses racines, nous allons écrire $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Comme $a = -3$ alors $f'(x) = -3(x - x_1)(x - x_2)$

0 est une racine évidente de f'
donc $f'(x) = -3(x - 0)(x - x_2) = -3x(x - x_2)$.

Déterminons la valeur de x_2. Pour cela, on va remplacer x par une valeur simple. Par exemple, $x = 1$.

Comme $f'(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$ alors
$f'(1) = -1^3 + 6 \times 1^2 + 1 = 6$

Comme $f'(x) = f'(1) = -3x(x - x_2)$

alors $f'(1) = -3 \times 1 \times (1 - x_2) = -3(1 - x_2)$

Il suffit alors de résoudre $-3(1 - x_2) = 6$.

Soit $1 - x_2 = \dfrac{6}{-3}$

Soit $1 - x_2 = -2$

Soit $-x_2 = -3$

Soit $x_2 = 3$

Finalement, $f'(x) = -3x(x - 3)$.

Lorsqu'une fonction du second degré admet 2 racines, son signe est celui de a, sauf entre les racines.

On en déduit que :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				

c. Déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(0)$ = ……

$f(3)$ = ……

55 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 2$.

Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

……

b. Justifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = -3x(x + x_2)$.

……

On en déduit que f' possède deux racines qui sont …… et ……

c. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	……	……	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(……)$ = ……

$f(……)$ = ……

56 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$.

Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

……

b. Justifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = 6(x - 1)(x - x_2)$.

……

c. Déterminer la valeur de x_2. Pour cela, remplacer x par une valeur simple. Par exemple, $x = 0$.

Comme $f'(x)$ = ……

alors $f'(0)$ = …… = ……

Comme $f'(x) = 6(x - 1)(x - x_2)$

alors $f'(0)$ = …… = ……

Pour trouver x_2, il suffit de résoudre alors l'équation ……

……

Finalement, $f'(x)$ = ……

On en déduit que f possède deux racines qui sont …… et ……

d. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	……	……	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(0)$ = ……

$f(3)$ = ……

57 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

……

b. Résoudre $f'(x) = 0$.
(On remarquera que cette équation est du type $x^2 = c$.)

c. Déduire de la question précédente la forme factorisée de $f'(x)$ ainsi que les deux racines de $f'(x)$.

d. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	......	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

58 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 12x - 1$.

Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Résoudre $f'(x) = 0$.
(On remarquera que cette équation est du type $x^2 = c$.)

c. Déduire de la question précédente la forme factorisée de $f'(x)$ ainsi que les deux racines de $f'(x)$.

d. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$	......	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.
En reprenant la trame des exercices précédents, déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	......	......	$+\infty$
Signe de $f'(x)$				
Variations de la fonction f				

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

Pour les exercices 60 à 63, calculer la fonction dérivée.

60 a. $f(x) = 5x + 7$. b. $g(x) = -3x + 2$.

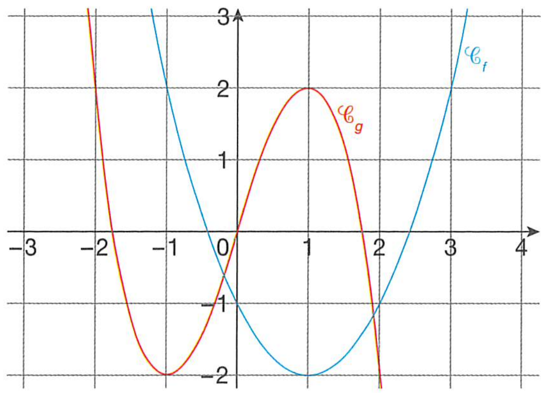
61 a. $f(x) = -5x^2 + 3x - 15$. b. $g(x) = -6x^2 + 6x + 12$.

62 a. $f(x) = -x^3 + 5{,}2x^2 - 3x + 1$. b. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

63 a. $f(x) = -3x^2 + x^3 + 5 - 9x$.
b. $g(x) = 275 + 436x^2 - 13x - 105x^3$.

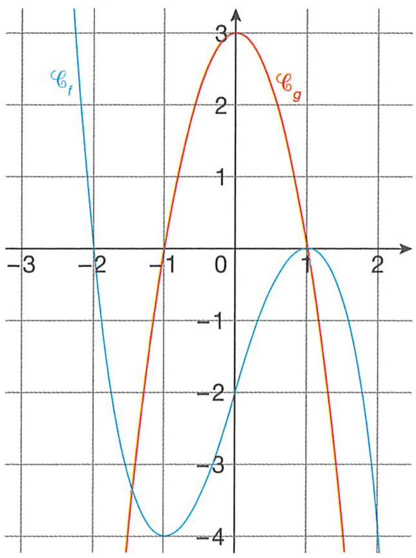
64 On considère les fonctions f, g et h dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par :
$f(x) = 2x - 5$ $g(x) = -x^2 + 3x + 1$ $h(x) = 5x^3 - 2x$.
Pour chacune de ces fonctions, déterminer leur nombre dérivé en 1 et -2.

65 On considère deux fonctions f et g dérivables et définies sur $\mathbb{R}$. Voici leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Dresser les tableaux de signes des fonctions dérivées f' et g'.

66 On considère deux fonctions f et g dérivables et définies sur $\mathbb{R}$. Voici leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



a. Déterminer les tableaux de signes et de variations de f et g.

b. L'une des deux correspond à la dérivée de l'autre. Laquelle ? Justifier.

67 On considère la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par $f(x) = x^3 - 0{,}75x^2 - 4{,}5x + 3$.

a. Montrer que $f'(x) = 3(x + 1)(x - 1{,}5)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-2 ; 2]$.

c. Donner les extremums de f, ainsi que les valeurs en lesquelles ils sont atteints.

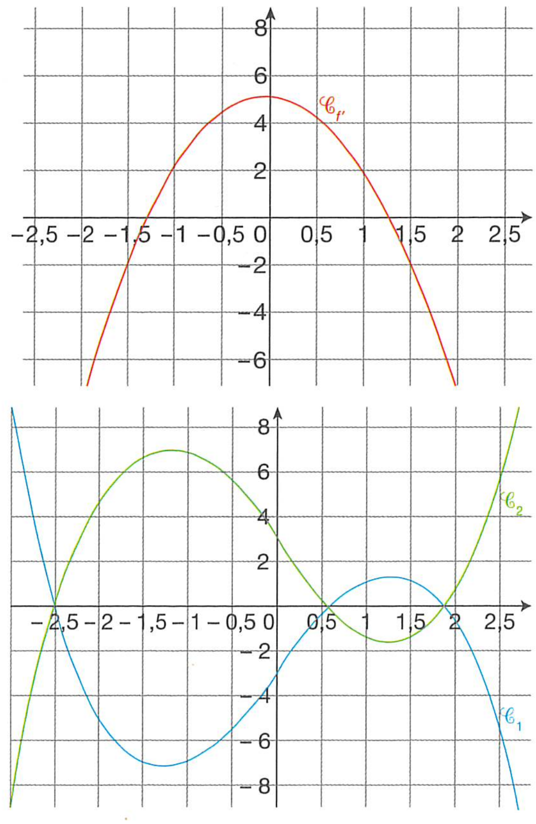
68 Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions polynômes suivantes, après avoir étudié le signe de la dérivée.

a. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

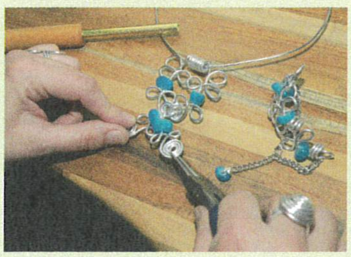
b. $g(x) = 2x^3 + 4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

c. $h(x) = x^3 + 6x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

69 On considère la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ représentée en rouge. Parmi les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, une seule est la représentation graphique de la fonction f, laquelle ? Justifier.



70 Une créatrice de bijoux fabrique des colliers. Elle peut en fabriquer jusqu'à 50 par mois.
Le coût de production, exprimé en euros, est donné par $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}165x^2 + 38{,}72x + 172$ pour x colliers fabriqués.



Exercices d'approfondissement

A. Étude du coût

a. Déterminer le montant des coûts fixes pour la créatrice.

b. Combien coûte la fabrication de 30 colliers ?

c. Donner l'ensemble de définition de la fonction C.

B. Étude de la recette

Chaque collier est vendu au prix de 80 euros.

a. Quelle est la recette obtenue pour la vente de 30 colliers ?

b. Donner l'expression de la recette $R(x)$ pour x colliers vendus.

C. Étude du bénéfice

a. Quel est le bénéfice obtenu pour la fabrication et la vente de 30 colliers ?

b. Donner l'expression du bénéfice $B(x)$ pour x colliers fabriqués et vendus.

c. Montrer que $B'(x) = -0{,}03(x - 43)(x + 32)$.

d. En déduire les variations de B sur $[0 ; 50]$.

e. Combien de colliers la créatrice doit-elle fabriquer et vendre afin que son bénéfice soit maximal ?

71 Une entreprise fabrique des robots ménagers. On note x le nombre de robots fabriqués par jour.
On sait que cette entreprise peut fabriquer jusqu'à 60 appareils par jour.
Le coût de fabrication, en euros, de x appareils, est modélisé par la fonction C définie par :

$$C(x) = x^2 + 160x + 800.$$

a. Déterminer les coûts fixes de cette entreprise.

b. On sait que chaque appareil est vendu 250 €. Déterminer l'expression de la fonction $R(x)$ qui représente la recette de cette entreprise pour x robots vendus.

c. En déduire que le bénéfice réalisé par la vente de x appareils est donnée par la fonction B définie par :

$$B(x) = -x^2 + 90x - 800.$$

d. Calculer la dérivée B' de la fonction B.

e. Déterminer les variations de B sur $[0 ; 60]$.

f. En déduire le nombre de robots à fabriquer et vendre par jour pour obtenir le bénéfice maximal et indiquer le montant de ce bénéfice maximal.

72 Vente de carottes

Une entreprise produit et vend des carottes.
Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.
Le coût de production de x tonnes de carottes est modélisé par la fonction
$C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$, où $C(x)$ est exprimé en euros.
Chaque tonne de carottes est vendue 150 euros.

A. Production de 3 tonnes de carottes

a. Déterminer le coût de production de 3 tonnes de carottes.

b. Déterminer le chiffre d'affaires réalisé lors de la vente de 3 tonnes de carottes.

c. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice si elle produit et vend 3 tonnes de carottes ?

B. Expression du bénéfice

a. Déterminer l'expression du chiffre d'affaires $R(x)$ pour x tonnes de carottes vendues.

b. En déduire que le bénéfice $B(x)$ s'exprime par :

$$B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650.$$

c. Quel est l'ensemble de définition de la fonction B ?

C. Étude du bénéfice

a. Déterminer $B'(x)$

b. Calculer $B'(-2)$.

c. En déduire la forme factorisée de B'.

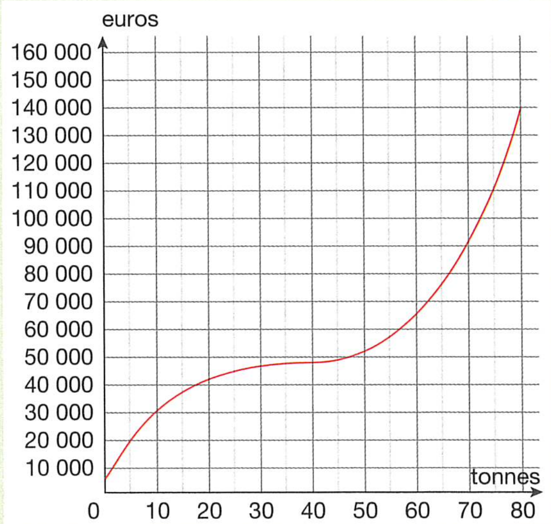
d. Étudier le signe de la fonction B'.

e. Construire le tableau de variations de la fonction B.

f. Quelle quantité de carottes l'entreprise doit-elle produire et vendre pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

73 Vente de croquettes

Une entreprise fabrique des croquettes pour chien.
Chaque jour, elle fabrique entre 0 et 80 tonnes.
Le coût de fabrication, en euros, de x tonnes est modélisé par la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-après :



A. Lecture graphique

À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

a. Combien coûte la production de 50 tonnes de croquettes ?

b. Quelle quantité de croquettes peut-on produire pour un coût de fabrication de 100 000 € ?

B. Étude de la recette

Une tonne de croquette est vendue 1 900 €. La recette, pour x tonnes vendues, est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; 80]$ par $R(x) = 1900x$.

a. Reproduire le graphique et tracer la représentation graphique de la fonction R.

b. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice en vendant 10 tonnes de croquettes ? Justifier la réponse.

C. Étude du bénéfice

On admet que le bénéfice réalisé par la vente de x tonnes de croquettes est donné par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 80] par $B(x) = -x^3 + 105x^2 - 1800x - 4000$.

a. Calculer $B'(x)$ où B' est la dérivée de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 80].

b. Calculer $B'(10)$ et $B'(60)$.

c. En déduire une factorisation de $B'(x)$.

d. Justifier le tableau de variations de la fonction B.

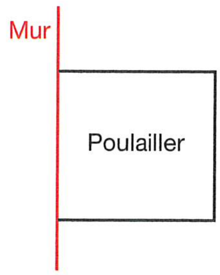
x	0		10		60		80
$B(x)$	…	↘	…	↗	…	↘	…

e. Quelle doit être la quantité de croquettes que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Que vaut ce bénéfice ?

74 Taille du poulailler

Modéliser – Calculer

Jérôme veut construire un poulailler de forme rectangulaire adossé au mur de sa maison.
Pour cela, il dispose de 7 mètres de grillage.
Quelles dimensions doit-il choisir pour que son poulailler ait une surface maximale ?



75 TABLEUR Découverte du coût marginal

Calculer – Raisonner

Un fabricant de lecteur MP3 peut produire jusqu'à 500 lecteurs par jour de production. Le coût total de fabrication de x lecteurs est modélisé par la fonction CT définie sur l'intervalle [0 ; 500] par :

$$CT(x) = 0{,}4x^3 - 7x^2 + 60x + 120.$$

On appelle coût marginal au rang x, noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque x pièces ont déjà été produites.
Ainsi $Cm(x) = CT(x+1) - CT(x)$.

1. Calculer $Cm(5)$. Donner une interprétation.

2. On veut regarder l'évolution du coût marginal en fonction de x.

Pour limiter les calculs, nous allons préparer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	x	c(x)	c(x+1)-c(x)	Approximation par C'(x)	Écart avec la valeur réelle
2	0	120	53,4		
3	1	173,4	41,8		
4	2	215,2	32,6		

a. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

b. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas a-t-on saisie dans la cellule C2 ?

c. Compléter la feuille de calculs pour une production de 0 à 500 lecteurs MP3.

Attention
- Il ne peut y avoir de production d'un 501e lecteur.
- Sur la dernière ligne, seules les colonnes A et B doivent être complétées.

3. En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total : $Cm(x) \approx CT'(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 500$.

a. Montrer que pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 500], $Cm(x) = 1{,}2x^2 - 12{,}8x + 53{,}4$.

b. Calculer alors pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 500] $CT'(x)$ et proposer une approximation de $Cm(x)$.

c. Calculer $Cm(5)$ à l'aide de cette approximation. Quelle est l'erreur commise (en pourcentage) par rapport à la valeur trouvée dans la question **1. a.** ? Que peut-on en penser ?

d. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 pour avoir une approximation de $Cm(x)$ par $CT'(x)$?

e. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule E2 pour avoir le pourcentage d'erreur de l'approximation par rapport à la valeur réelle calculée dans la colonne C ?

f. Observer l'intégralité de la colonne D. Que peut-on penser de cette approximation proposée pour le coût marginal ?

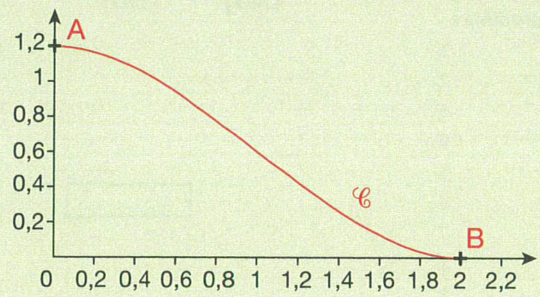
76 Le toboggan

Représenter – Calculer

On considère la fonction f définie sur [0 ; 2] par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

qui modélise le profil d'un toboggan de 1,20 m de hauteur et de 2 m de longueur.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.



On souhaite déterminer les réels a, b, c et d tels que :
– la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A(0 ; 1,2) et B(2 ; 0) ;
– en ces deux points A et B, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

2. a. Préciser les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
b. En déduire les valeurs de c et d.

3. a. Préciser les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.
b. En déduire le système de deux équations à deux inconnues a et b.
c. Résoudre ce système.

4. En déduire l'expression de la fonction f.

77 TABLEUR **L'orfèvre**

Représenter – Calculer

Un bijoutier fabrique des pendentifs en or.
Il peut en fabriquer entre 1 et 18 dans une semaine.
Le coût total de fabrication de ces x pendentifs, exprimé en euros, est modélisé par la fonction CT définie sur [1 ; 18] par :

$$CT(x) = 0{,}4x^3 - 6x^2 + 40x + 200.$$

On veut étudier le lien entre le coût moyen de fabrication et le coût marginal.

A. Coût moyen CM

On appelle coût moyen de fabrication, le coût de revient de la fabrication d'un pendentif.
Ainsi, on définit le coût moyen pour x pièces produites

par $CM(x) = \dfrac{\text{Coût total}}{\text{Nombre de pièces produites}} = \dfrac{CT(x)}{x}$,

avec x compris entre 1 et 18.

a. Reproduire la feuille de calculs ci-dessous.

b. Quelles formules destinées à être étirées vers le bas peut-on saisir dans les cellules B2 et C2 pour automatiser les calculs des colonnes B et C ?

c. Compléter la feuille de calculs et faire apparaître le graphique exprimant le coût moyen $CM(x)$. en fonction de la quantité produite x (étant compris entre 1 et 18).
Pour cela, sélectionner les colonnes A et C, et insérer un graphique (nuage de points).

d. À l'aide du graphique et de la colonne C, conjecturer le tableau de variations de la fonction CM sur l'intervalle [1 ; 18].

B. Coût marginal Cm

On appelle coût marginal au rang x, noté $Cm(x)$, le coût de fabrication d'une pièce supplémentaire lorsque x pièces ont déjà été produites. En économie, on approche ce coût marginal par la dérivée du coût total.
On définit donc dans cette partie la fonction coût marginal par la fonction Cm définie sur [1 ; 18] par $Cm(x) = CT'(x)$.

a. Exprimer $Cm(x)$ en fonction de x.

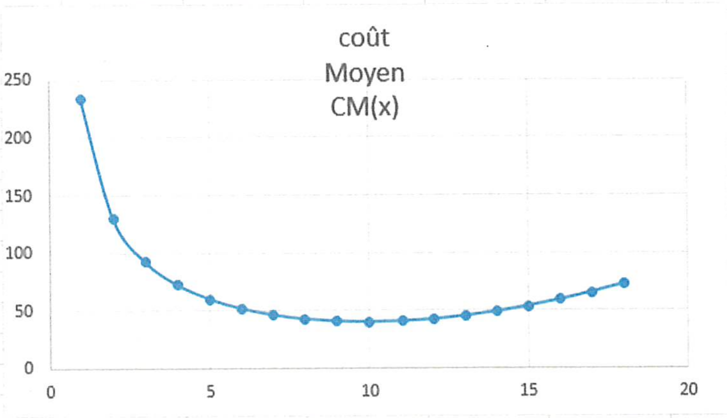
b. Calculer $Cm(7)$. En donner une interprétation.

c. Dans le tableur, ajouter une colonne D comportant le coût marginal Cm. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut-on saisir dans la cellule D2 ?
Compléter ensuite la colonne D. Sélectionner les colonnes A, C et D, et insérer un graphique (nuage de points).
En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions Cm et CM.

d. Quel lien semble-t-il exister entre les variations de la fonction CM et la position relative des fonctions CM et Cm ?

Remarque : ce lien pourra être démontré dans le cas général en classe de terminale.

	A	B	C	D
1	Nombres de pièces produites	Coût Total CT(x)	coût Moyen CM(x)	coût marginal Cm(x)
2	1			
3	2			
4	3			
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
10	9			
11	10			



Feuille de calculs
liennathan.fr/lwtjfu

TABLEUR

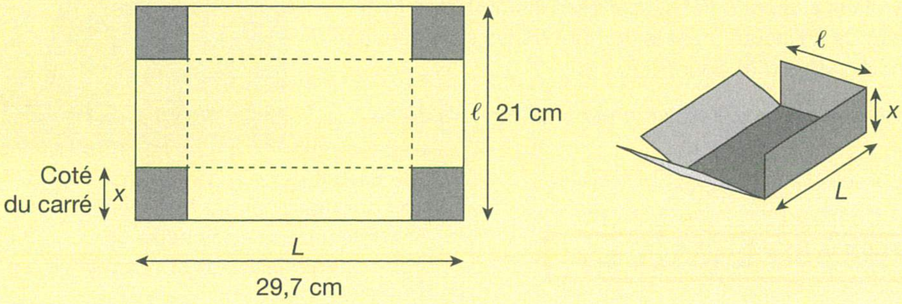
1 Optimisation du volume d'une boîte

SITUATION

Sophie veut fabriquer une boîte pouvant contenir le cadeau d'anniversaire de son frère.

Elle prend une feuille de papier cartonnée au format 21 cm × 29,7 cm. Elle découpe dans chaque coin des carrés de côté x centimètre(s) de manière à fabriquer une boîte de forme rectangulaire.

⇨ **Comment peut-elle calculer le volume maximal possible de sa boîte ?**



A Résolution à l'aide du tableur

Pour éviter des calculs compliqués, Sophie préfère utiliser son tableur. Elle réalise donc une feuille de calculs. Elle saisit dans les cellules B2, C2 et D2 des formules destinées à être étirées vers le bas.

1 Justifier que x est un réel de l'intervalle [0 ; 10,5].

2 Quelles formules Sophie a-t-elle pu saisir dans les cellules B2, C2 et D2 ?

3 Quel semble être le volume maximal (en cm³) que Sophie puisse obtenir avec cette boîte ? Pour quelle valeur de x ?

	A	B	C	D
1	x	Longueur de la boîte	Largeur de la boîte	Volume de la boîte
2	0	21	29,7	0
3	1	19	27,7	526,3
4	2	17	25,7	873,8
5	3	15	23,7	1066,5
6	4	13	21,7	1128,4
7	5	11	19,7	1083,5
8	6	9	17,7	955,8
9	7	7	15,7	769,3
10	8	5	13,7	548
11	9	3	11,7	315,9
12	10	1	9,7	97
13				

Feuille de calculs
liennathan.fr/9avk9d

B Résolution algébrique

Son amie Shaïma affirme qu'elle a trouvé mieux que Sophie en faisant des calculs. On note $V(x)$ le volume de la boîte obtenue. On rappelle que x appartient à l'intervalle [0 ; 10,5].

1 Exprimer la largeur ℓ et la longueur L du rectangle de base de la boîte en fonction de x.

2 Justifier alors que $V(x) = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$.

3 Calculer $V'(x)$ où V' désigne la fonction dérivée de la fonction V.

4 On admet que $x = 4{,}04$ et $x = 12{,}86$ sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $12x^2 - 202{,}8x + 623{,}7 = 0$.
En déduire le signe de $V'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 10,5] puis le tableau de variations complet de la fonction V sur l'intervalle [0 ; 10,5].

5 Donner alors le volume maximal trouvé par Shaïma ainsi que la valeur de x correspondante.

Aide
→ Le volume d'un parallélépipède rectangle est $V = L \times \ell \times h$ où L et ℓ sont les largeur et longueur du rectangle de base et h la hauteur.

Travaux pratiques

PYTHON 2 Approche du nombre dérivé d'une fonction en un point

SITUATION

Lors d'une course de char à voile, sur la plage de Berck, la distance en mètres parcourue par un pilote en fonction du temps t en secondes s'exprime par la formule suivante :

$d(t) = 20t - 0{,}001t^3 + \dfrac{2\ 000}{(t+10)^2}$ pour $t \in [0 ; 80]$.

On admet que, dans ces conditions, la vitesse instantanée $v(t)$ en mètres par seconde à l'instant t est le nombre dérivé de la fonction d en t, autrement dit, $v(t) = d'(t)$ pour $t \in [0 ; 80]$.

Quelle est la vitesse maximale atteinte par le pilote lors de sa course ?

A Une fonction pour le maximum

Comme nous n'avons pas vu, dans le cours, de formule pour dériver la fonction d, on se propose d'approcher, pour $t \in [0 ; 80]$, le nombre dérivé $d'(t)$ par le taux d'accroissement de la fonction d entre $t - h$ et $t + h$ pour une très petite valeur de h.
En prenant $h = 0{,}000001$, on obtiendra :

$$v(t) \approx \frac{d(t+0{,}000001) - d(t - 0{,}000001)}{0{,}000002}.$$

On se propose d'établir la liste « `ListeVitesses` » des approximations de $v(t)$ ainsi obtenues pour t variant de 0 à 80 avec un pas de 0,01. On obtiendra une approximation de la vitesse maximale atteinte par le coureur en prenant la valeur maximale de cette liste.

1 Ouvrir un éditeur Python, puis créer et sauvegarder un fichier « `Vitesse.py` » dans lequel on écrira tous les codes suivants.

2 Recopier et compléter le code ci-dessous en Python pour qu'il définisse une fonction qui prend en argument une liste `L` de nombres et renvoie le plus grand élément de `L`.

```
def max(L):
    m=L[0]
    for elt in L:
      if…:
        m=elt
    return(m)
```

B La liste des approximations des valeurs de v

1 Définir la fonction d dans le fichier « `Vitesse.py` ».

2 Définir une fonction `approx` prenant en argument un nombre t et renvoyant l'approximation de $v(t)$ par le taux d'accroissement de la fonction d entre $t - 0{,}000001$ et $t + 0{,}000001$.

3 Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?

```
ListeVitesses ← []
t ← 0
Tant que t ≤ 80 faire:
  Ajouter approx(t) à ListeVitesses
  t ← t+0,001
Fin Tant que
```

4 Implémenter cet algorithme à la suite du fichier « `Vitesse.py` ».

5 Recopier et compléter ce programme pour qu'il affiche la vitesse maximale atteinte par le pilote.