Première

CHAPITRE 3

THÈME 1 / Analyse

Fonctions de degré 2 et de degré 3

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/zvw553

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. $\frac{1}{5}$ des 1 400 élèves d'un lycée ne pratiquent pas d'activité sportive. Combien d'élèves sont concernés ?

2. Calculer 24 % de $\frac{4}{3}$ sous forme décimale.

Évolution et variations

3. Baisser de 13 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 800 quand il a baissé de 40 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 9 à 12 ?

6. Quelle est l'évolution subi par une valeur qui a augmenté de 30 % puis diminué de 30 % ?

7. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une baisse de 25 %.

8. Compléter le tableau d'indice suivant :

Prix en €	60	80	
Indice	100		115

Calculs numériques et algébriques

9. Mettre sous la forme d'une seule fraction $A = 5 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$

10. Écrire sous la forme 3^k le nombre $B = \frac{3^8}{9} \times \frac{27}{3^5}$.

11. Convertir 275 minutes en heures minutes.

12. Résoudre $8x - 5 = -x + 23$.

13. Construire le tableau de signes de $-6x - 18$ sur $\mathbb{R}$.

14. La vitesse V exprimée en m/s est donnée par la formule $V = \frac{d}{t}$, où d est la distance exprimée en m et t le temps exprimé en s.

Un homme parcourt 3 km en 50 minutes. Quelle est sa vitesse en m/s ?

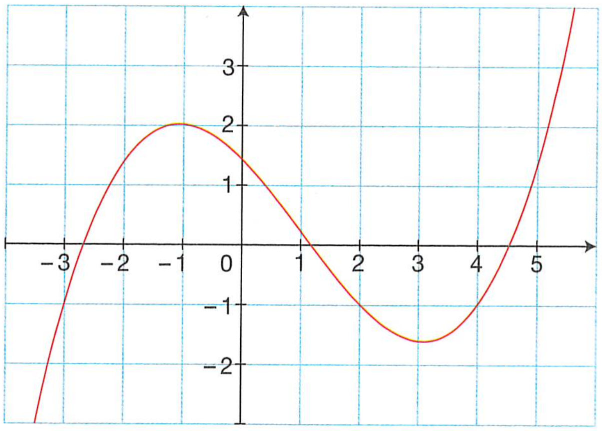
15. Reprendre la formule de l'exercice précédent et exprimer d en fonction de V et de t.

16. Développer et réduire $C = 18 - 3(2x - 1)(x + 4)$.

17. Factoriser $D = 9x^2 - 25$.

Fonctions et représentations

18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Quelle est l'image de -2 par f ?
b. Déterminer $f(4)$.
c. Quels sont les antécédents de 1 par f ?
d. Établir le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
e. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

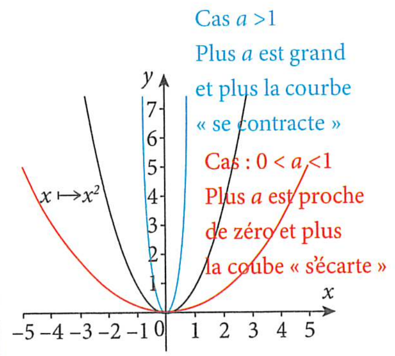
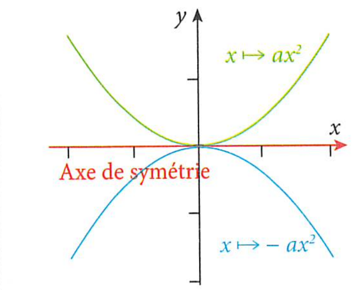
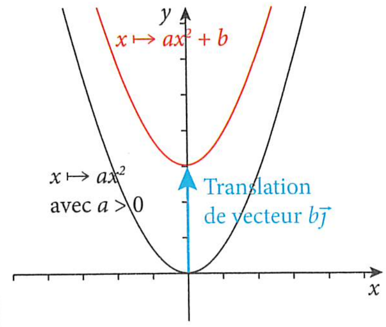
19. Déterminer l'ordonnée du point de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 3(x + 2)(x - 5)$ dont l'abscisse est -2.

20. Tracer dans un repère orthonormé la droite passant par A(5 ; 3) et de coefficient directeur 3.

21. Tracer dans le même repère la droite d'équation $y = 0{,}5x - 3$.

22. On considère les points A(−4 ; 4) et B(7 ; −6). Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

1 Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2

Influence du coefficient a ($a > 0$)	Passage de $a > 0$ à $a < 0$	Influence du coefficient b
		
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x = 0$.	La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \mapsto ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses.	La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $b\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$.

Pour passer de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ à celle de $x \mapsto ax^2 + b$:

1. Si $a < 0$:

(1) on trace d'abord $x \mapsto |a|x^2$ en écartant ($0 < |a| < 1$) ou compressant ($|a| > 1$) la courbe par rapport à celle de la fonction carrée.

(2) On obtient ensuite la courbe de $x \mapsto ax^2$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses de la courbe de $x \mapsto |a|x^2$.

(3) On obtient la courbe de $x \mapsto ax^2 + b$ à partir de celle de $x \mapsto ax^2$ par translation de vecteur $b\vec{j}$.

2. Si $a > 0$: on reprend la méthode précédente en supprimant l'étape **(2)**.

Exercice résolu A

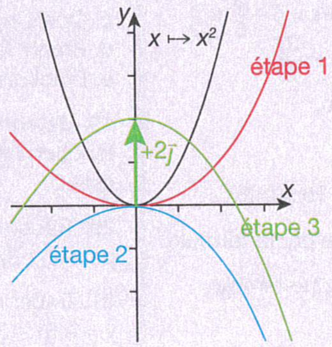
À partir de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$, donner à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -0{,}4x^2 + 2$. Justifier les différentes étapes.

SOLUTION

Étape 1 : $0{,}4 < 1$ donc la courbe représentative de $x \mapsto 0{,}4x^2$ « s'écarte » de celle de $x \mapsto x^2$.

Étape 2 : la courbe représentative de $x \mapsto -0{,}4x^2$ est la symétrique de celle de $x \mapsto 0{,}4x^2$ par rapport à l'axe des abscisses.

Étape 3 : on passe de la courbe représentative de $x \mapsto -0{,}4x^2$ à celle de $x \mapsto -0{,}4x^2 + 2$ en effectuant une translation de vecteur $2\vec{j}$.



Exercices d'application directe

1 Compléter chaque phrase avec le mot « écarter » ou « contracter ».

a. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 5x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0{,}6x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

c. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 1{,}01x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

d. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 10x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

e. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0{,}99x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

2 Compléter chaque phrase avec le nombre qui convient.

a. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 + 5$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 + 1{,}03$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

c. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

d. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 3$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

e. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

3 On voudrait passer de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ à celle de $x \mapsto 2x^2 + 3$.
Compléter chaque phrase avec le mot « écarter » ou « contracter » ou un nombre.

a. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 + 3$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$.

4 On voudrait passer de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ à celle de $x \mapsto -0{,}3x^2 + 2$.
Compléter chaque phrase avec le mot « écarter » ou « contracter » ou un nombre.

a. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0{,}3x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -0{,}3x^2$ est symétrique à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0{,}3x^2$ par rapport à l'axe des abscisses.
Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -0{,}3x^2 + 2$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -0{,}3x^2$.

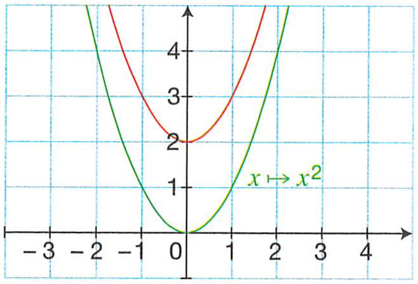
5 On voudrait passer de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ à celle de $x \mapsto -2x^2 - 1$.
Compléter chaque phrase avec le mot « écarter » ou « contracter » ou un nombre.

a. Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$, on va .... la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

b. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -2x^2$ est symétrique à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$ par rapport à l'axe des abscisses.
Pour obtenir la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -2x^2 - 1$, on va faire une translation de vecteur .... $\vec{j}$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -2x^2$.

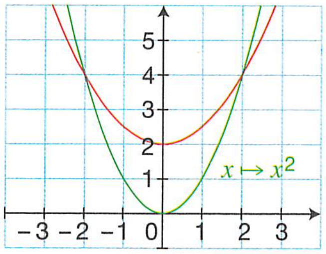
6 Entourer la seule expression possible associée à la courbe représentative de la courbe rouge.

a. $f(x) = x^2 + 3$
b. $f(x) = 3x^2 + 2$
c. $f(x) = x^2 + 2$
d. $f(x) = 0{,}5x^2 + 3$



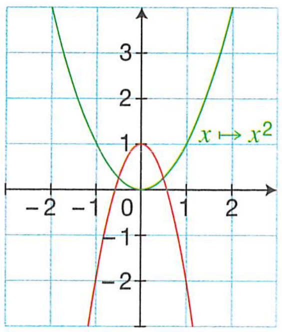
7 Entourer la seule expression possible associée à la courbe représentative de la courbe rouge.

a. $f(x) = x^2 + 3$
b. $f(x) = 3x^2 + 2$
c. $f(x) = x^2 + 2$
d. $f(x) = 0{,}5x^2 + 3$



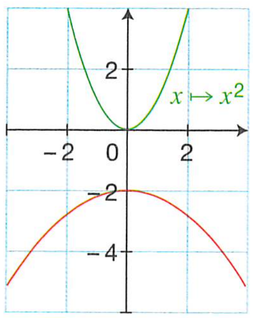
8 Entourer la seule expression possible associée à la courbe représentative de la courbe rouge.

a. $f(x) = 3x^2 + 1$
b. $f(x) = -0{,}5x^2 - 1$
c. $f(x) = -3x^2 + 1$
d. $f(x) = -0{,}5x^2 + 1$



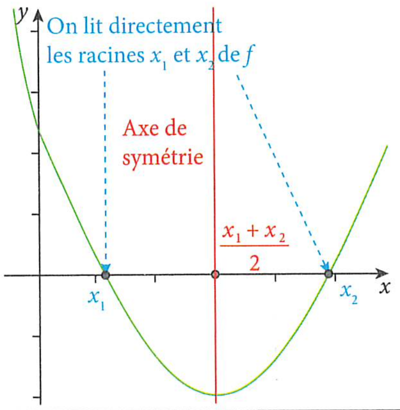
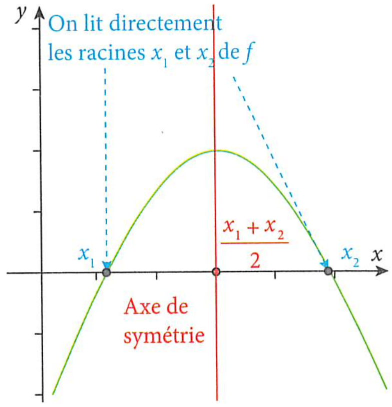
9 Entourer la seule expression possible associée à la courbe représentative de la courbe rouge.

a. $f(x) = 3x^2 - 2$
b. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$
c. $f(x) = -3x^2 + 2$
d. $f(x) = -0{,}5x^2 - 2$



2 Déterminer des caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Pour l'allure de la courbe, on pourra se souvenir du tableau suivant :

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>Courbe</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tableau de signes</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

- L'axe de symétrie de la courbe a pour équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- Les coordonnées du sommet sont $S(\alpha\ ;\ \beta)$ avec $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exercice résolu B

On considère la fonction f définie par $f(x) = -3(x - 5)(x + 2)$.

1. Déterminer l'orientation de la parabole ainsi que ses deux racines.
2. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
3. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

SOLUTION

1. Dans le cours, une telle fonction est écrite $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ici, nous avons $f(x) = -3(x - 5)(x + 2)$ avec un signe « + » entre x et 2. Nous pouvons commencer par transformer l'expression de $f(x)$ en se souvenant que $(x + 2) = (x - (-2))$.

Nous avons alors $f(x) = -3(x - 5)(x - (-2))$. Les deux racines sont donc 5 et −2. La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$ (ici $a = -3$).

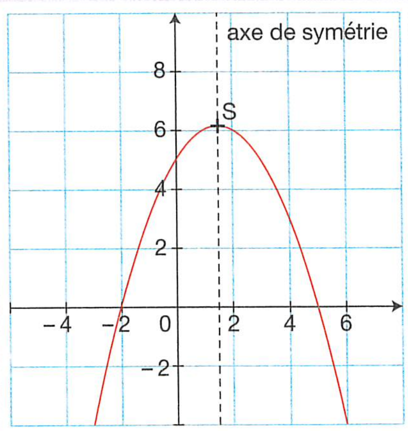
2. La parabole a pour sommet $S(\alpha\ ;\ \beta)$ avec $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.

Nous avons alors $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-2)}{2} = 1{,}5$.

$\beta = f(\alpha) = f(1{,}5) = -3(1{,}5 - 5)(1{,}5 + 2) = 6{,}125$

Les coordonnées du sommet S sont $S(1{,}5\ ;\ 6{,}125)$.

3. L'allure de la courbe est donc la suivante :



Exercices d'application directe

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x - 3)(x - 1).$$

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ». Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

$x_1 =$ ....

$x_2 =$ ....

$a =$ ....

Le signe de a est ....

La parabole est donc tournée vers ....

c. On note S(α ; β) le sommet de la parabole.

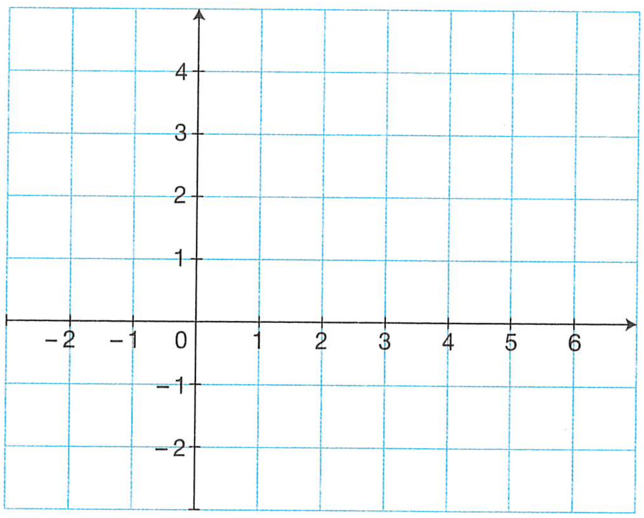
$\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$\beta = f(\alpha) = \ldots\ldots\ldots$

....

Le sommet de la parabole S a pour coordonnées (.............. ; ....).

d. Tracer l'allure de la parabole dans le repère ci-dessous en faisant apparaître x_1, x_2, S et l'axe de symétrie.



11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)(x - 4).$$

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ». Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

$x_1 =$ ....

$x_2 =$ ....

$a =$ ....

Le signe de a est ....

La parabole est donc tournée vers ....

c. On note S(α ; β) le sommet de la parabole.

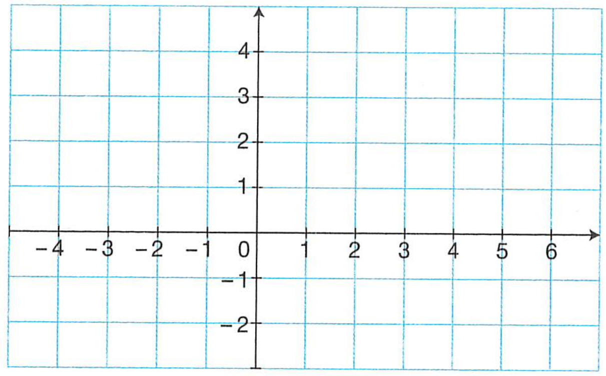
$\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$\beta = f(\alpha) = \ldots\ldots\ldots$

....

Le sommet de la parabole S a pour coordonnées (.............. ; ....).

d. Tracer l'allure de la parabole dans le repère ci-dessous en faisant apparaître x_1, x_2 et S et l'axe de symétrie.



12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2)(x + 4).$$

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ». Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

$x_1 =$ ....

$x_2 =$ ....

$a =$ ....

Le signe de a est ....

La parabole est donc tournée vers ....

c. On note S(α;β) le sommet de la parabole.

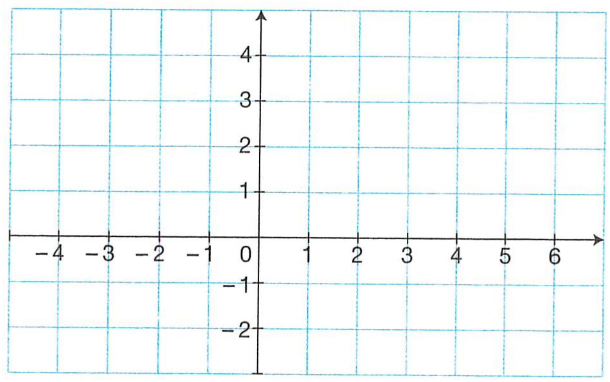
$\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots$

$\beta = f(\alpha) = \ldots\ldots\ldots$

....

Le sommet de la parabole S a pour coordonnées (..............;..............).

d. Tracer l'allure de la parabole dans le repère ci-dessous en faisant apparaître x_1, x_2, S et l'axe de symétrie.



3 Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2 ou 3

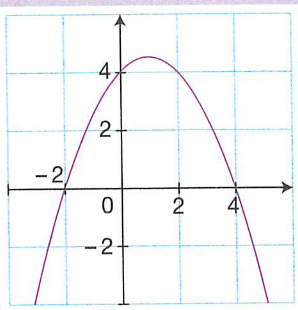
On considère le polynôme P du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Pour montrer que le nombre x_1 est une racine du polynôme, il suffit de montrer que $P(x_1) = 0$.

Exercice résolu C

On considère la fonction f définie par $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}015x + 4{,}02$.

Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre.



1 Conjecturer graphiquement les racines de la fonction f.

2 Vérifier par le calcul la conjecture émise à la question **1**.

SOLUTION

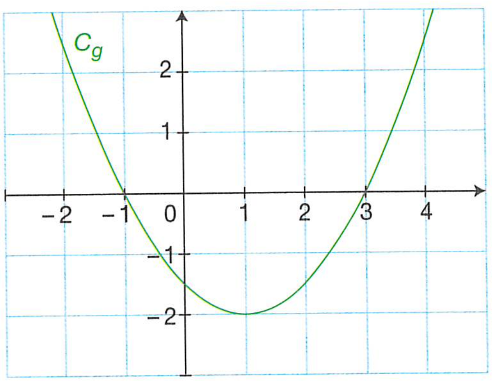
1. La courbe coupe l'axe des abscisses en −2 et 4. On conjecture donc que −2 et 4 sont les deux racines de la fonction du second degré.

2. Calculons $f(-2)$ et $f(4)$.
$f(-2) = -0{,}5 \times (-2)^2 + 1{,}015 \times (-2) + 4{,}02 \approx 0{,}03$
$f(4) = -0{,}5 \times 4^2 + 1{,}015 \times 4 + 4{,}02 = 0$
On en déduit que 4 est bien une racine de f car $f(4) = 0$.
En revanche, $f(-2) \neq 0$. −2 n'est donc pas une racine de f.

Attention
On ne peut montrer qu'un nombre est une racine d'une fonction qu'en effectuant le calcul. Une lecture graphique reste toujours imprécise.

Exercices d'application directe

13 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5$. Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous.



a. Conjecturer graphiquement les racines de la fonction g.

b. Vérifier par le calcul la conjecture émise à la question **a**.

14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^2 + 0{,}9995x - 2{,}001.$$
On donne ci-dessous un tableau de valeurs obtenu avec un tableur. Les résultats de la ligne 2 sont arrondis à 0,01 près.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$	-4,00	0,00	2,00	2,00	0,00	-4,00	-10,00

a. À l'aide du tableau, conjecturer les racines de la fonction f.

b. Vérifier par le calcul la conjecture émise à la question **a**.

15 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 - 1{,}01x^2 - 4{,}01x + 4{,}02.$$

À l'aide du logiciel Python, on a trouvé l'image de certains nombres dont les résultats ont été arrondis à 0,1 près.

```
from math import *

def f1(x):
    return x*x*x-1.01*x*x-4.01*x+4.02

for i in range(-2,4):
    print("f(",i,")=",int(10*f1(i))/10)
```

```
In [5]: runfile('C:
f( -2 )= 0.0
f( -1 )= 6.0
f( 0 )= 4.0
f( 1 )= 0.0
f( 2 )= 0.0
f( 3 )= 9.9
```

a. À l'aide de l'affichage de la console Python, conjecturer les racines de la fonction f.

....

....

....

b. Vérifier par le calcul la conjecture émise à la question **a**.

....

....

....

....

....

....

16 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. À l'aide d'un tableur, on a fait un tableau de valeurs de cette fonction entre $x = -2$ et $x = 4$ avec un pas de 1.

B2 | =0,25*B1^2-0,75*B1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2	-1	0	1	2	3	4
2	f(x)	2,5	1	0	-0,5	-0,5	0	1

a. En observant la feuille de calculs, déterminer l'expression de $f(x)$.

$f(x) =$ ....

b. Conjecturer les racines de f.

$x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

c. Vérifier par le calcul votre conjecture.

....

....

....

....

....

....

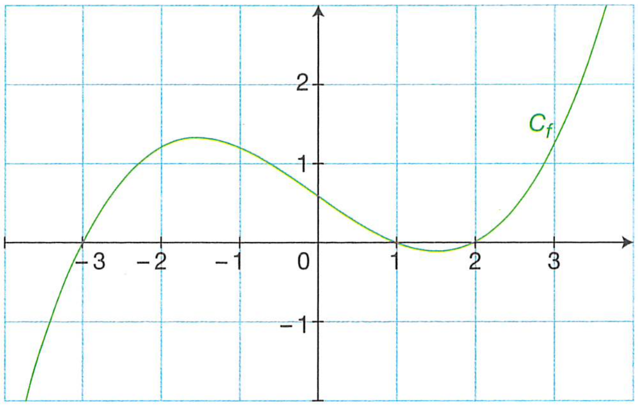
17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}7x + 0{,}6.$$

Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous.

a. Conjecturer graphiquement les racines de la fonction f.

b. Vérifier par le calcul la conjecture émise à la question **a**.



a. Conjecturer graphiquement les racines de la fonction f.

....

....

....

b. Vérifier par le calcul votre conjecture.

....

....

....

....

....

....

....

18 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 5x - 3.$$

Sur votre calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.
Conjecturer les valeurs des deux racines de g et vérifier les résultats.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4 Factoriser une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines

Pour déterminer graphiquement la forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2 :

1. On détermine si possible les racines x_1 et x_2 de f.

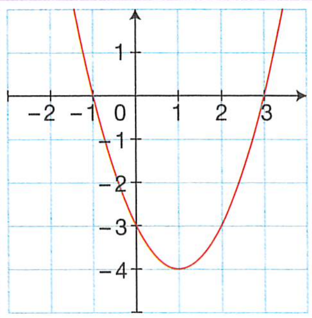
2. On écrit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ lorsque l'équation admet deux racines x_1 et x_2.

3. On détermine le coefficient a :
– si l'expression développée de f est donnée, on lit la valeur de a ;
– sinon il faut repérer sur la parabole l'image $f(x_0)$ d'un point x_0 différent de x_1 et de x_2 et résoudre $f(x_0) = a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ pour déterminer ensuite la valeur de a.

4. On conclut en écrivant la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice résolu D

On considère la parabole f ci-contre rapportée à un repère orthogonal.
Déterminer la forme factorisée de cette fonction.



SOLUTION

La lecture graphique indique que les abscisses −1 et 3 sont des racines (abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses), ce qui donne la forme factorisée de f : $f(x) = a(x - (-1))(x - 3) = a(x + 1)(x - 3)$.
La lecture graphique indique que $f(1) = -4$, c'est-à-dire $a(1 + 1)(1 - 3) = -4$, ce qui équivaut à $a(2)(-2) = -4$, ce qui équivaut aussi à $-4a = -4$, ce qui donne $a = 1$, d'où la forme factorisée de f : $f(x) = (x + 1)(x - 3)$.

Exercices d'application directe

19 Soit f une fonction polynôme du second degré.
Son expression développée est $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$.

a. À l'aide du tableau de valeurs suivant, déterminer deux racines de f.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	-1	0	1	2	3	4	5	6
2	f(x)	48	30	16	6	0	-2	0	6

Les racines de f sont x_1 = ... et x_2 = ...

Vérification : ....

....

....

....

....

....

....

b. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

....

....

20 Soit f une fonction polynôme du second degré.
Son expression développée est $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$.

a. À l'aide d'une calculatrice, remplir le tableau de valeurs suivant :

x	−1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$								

b. Déterminer deux racines de f.

Les racines de f sont x_1 = ... et x_2 = ...

Vérification : ....

....

....

....

....

....

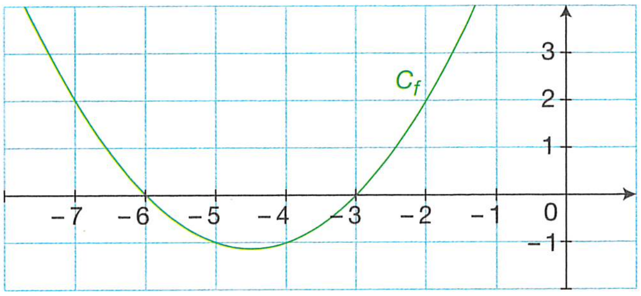
....

c. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

21 Soit f une fonction polynôme du second degré.
Son expression développée est $f(x) = 0{,}5x^2 + 4{,}5x + 9$.

a. À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer deux racines de f.



Les racines de f sont x_1 = ... et x_2 = ...

Vérification : ....

....

....

....

....

....

....

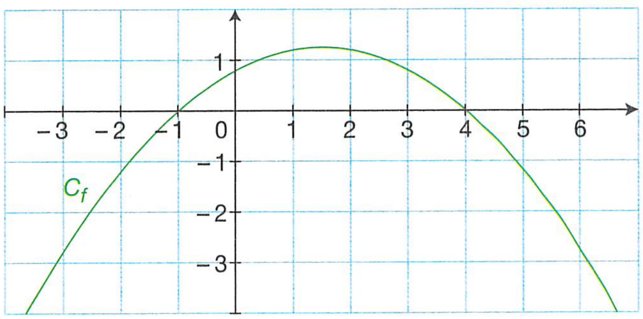
....

b. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

22 Soit f une fonction polynôme du second degré.
Son expression développée est $f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}6x + 0{,}8$.

a. À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer deux racines de f.



Les racines de f sont x_1 = ... et x_2 = ...

Vérification : ....

....

....

....

....

....

....

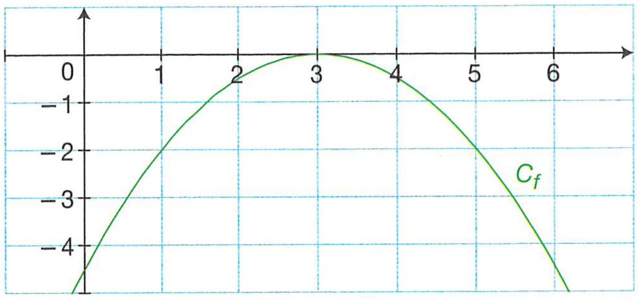
....

b. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

23 Soit f une fonction polynôme du second degré.
Son expression développée est $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$.

a. À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer deux racines de f.



Les racines de f sont x_1 = ... et x_2 = ...

Vérification : ....

....

....

....

....

....

b. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

24 Soit f une fonction polynôme du second degré qui possède deux racines distinctes.
Sa forme développée est $f(x) = 4x^2 - 32x - 80$.

On donne le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	f(x)	52	0	-44	-80	-108	-128	-140	-144

a. Une des racines de f est x_1 = ...
On notera x_2 la racine inconnue.

Vérification : ....

....

....

....

....

....

b. Justifier que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = 4(x + 2)(x - x_2).$$

....

....

c. Grâce au tableau de valeurs, on constate que $f(0) = -80$.

Justifier que x_2 vérifie l'équation : $-8 \times x_2 = -80$.

....

....

....

....

d. Résoudre l'équation et en déduire la forme factorisée de $f(x)$.

25 Soit f une fonction polynôme du second degré qui possède deux racines distinctes. Sa forme développée est inconnue.

On donne le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	f(x)	0	-2	-3	-3	-2	0	3	7

a. Les racines de f sont x_1 = …………… et x_2 = ……………

Vérification : ……………

b. Justifier que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = a(x + 3)(x - 2).$$

c. Grâce au tableau de valeurs, on constate que $f(4) = 7$.
Justifier que a vérifie l'équation : $14 \times a = 7$.

d. Résoudre l'équation et en déduire la forme factorisée de $f(x)$.

26 Soit f une fonction polynôme du second degré qui possède deux racines distinctes. On a écrit un programme Python pour calculer l'image de quelques nombres.
Voici le programme et l'affichage lors de l'exécution du programme :

```
from math import *

def f1(x):
    return 2*x*x - 16*x + 24

for i in range(8):
    print("f(",i,")=",f1(i))
```

```
In [3]: runfile(
f( 0 )= 24
f( 1 )= 10
f( 2 )= 0
f( 3 )= -6
f( 4 )= -8
f( 5 )= -6
f( 6 )= 0
f( 7 )= 10
```

a. Les racines de f sont x_1 = …………… et x_2 = ……………

Vérification : ……………

b. Justifier que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = a(x - 2)(x - 6).$$

c. Grâce au tableau de valeurs, on constate que $f(7)$ = ………

Justifier que a vérifie l'équation : $5 \times a = 10$.

d. Résoudre l'équation et en déduire la forme factorisée de $f(x)$.

5 Utiliser la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 pour étudier son signe

La forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

x_1 et x_2 représentent alors les racines du polynôme, c'est-à-dire que $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Le tableau de signes de la fonction f est alors le suivant.

Remarque : il faut mettre x_1 et x_2 dans l'ordre croissant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Opposé du signe de a	0	Signe de a	

Exercice résolu E

Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)(x - 1)$.

SOLUTION

On reconnaît bien la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$.

Devant les parenthèses, on ne voit pas de nombre. Implicitement, $a = 1$.

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	
		Signe de a		Opposé du signe de a		Signe de a	

Exercice résolu F

Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de la fonction g définie par $g(x) = -3(x + 2)(x - 5)$.

SOLUTION

Dans la forme factorisée $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, il y a dans les parenthèses deux signes « – ».
On va donc réécrire $g(x)$ en faisant apparaître ces deux signes « – ».

$g(x) = -3(x - (-2))(x - 5)$. En effet, $+ 2 = - (-2)$.

Nous avons alors $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ et $a = -3$.

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Signe de $g(x)$		−	0	+	0	−	
		Signe de a		Opposé du signe de a		Signe de a	

Exercices d'application directe

27 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3(x - 6)(x - 7).$$

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	0	

28 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = (x + 3)(x - 1).$$

a. Réécrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
Signe de $g(x)$		0	0	

29 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -(x + 10)(x + 6).$$

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	0	

30 On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = -65(x - 4)(x - 1).$$

a. Réécrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ en faisant bien apparaître les deux signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
Signe de $g(x)$		0	0	

31 PYTHON On considère une fonction f. Le programme Python suivant affiche les images de certains nombres par la fonction f. Ces images sont arrondies à l'entier le plus proche.

```python
from math import*

def fonctionf(x):
    return -2*x**2-8*x-6

for i in range(6):
    print("f(",i-4,")=",fonctionf(i-4))
```

```
In [5]: runfile
f( -4 )= -6
f( -3 )= 0
f( -2 )= 2
f( -1 )= 0
f( 0 )= -6
f( 1 )= -16
```

a. En observant le programme Python, donner l'expression de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

b. Conjecturer les racines x_1 et x_2 de la fonction f.

x_1 = ... x_2 = ...

Vérification :

....

....

....

....

....

....

....

....

c. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

$f(x)$ = ...

d. En déduire le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	....	....	$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	0	

6 Utiliser la forme factorisée d'un polynôme de degré 3 pour étudier son signe

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
Pour obtenir le tableau de signes de ce type de fonction, on considère x_1 ; x_2 et x_3 les trois racines de f telles que $x_1 < x_2 < x_3$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$	
Signe de a										On met le signe de a sur toute la ligne.
Signe de $(x - x_1)$		−	0	+		+		+		On met des − jusqu'à x_1.
Signe de $(x - x_2)$		−		−	0	+		+		On met des − jusqu'à x_2.
Signe de $(x - x_3)$		−		−		−	0	+		On met des − jusqu'à x_3.
Signe de $f(x)$										On applique la règle des signes.

Exercice résolu G — Déterminer le signe d'une fonction admettant deux racines

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 1)(x + 6)(x - 2{,}5)$.
Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de la fonction f.

SOLUTION

Dans le cours, la fonction est écrite sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec des signes « – » qui permettent de bien repérer les racines.
Réécrivons $f(x)$ de cette manière-là : $f(x) = -3(x - 1)(x - (-6))(x - 2{,}5)$.
En effet $(x + 6) = (x - (-6))$.
Nous voyons donc qu'il y a 3 racines $x_1 = 1$; $x_2 = -6$ et $x_3 = 2{,}5$.
Dans le tableau de signes, nous prévoyons une ligne pour chaque facteur : -3 ; $(x - 1)$; $(x - (-6))$ et $(x - 2{,}5)$.
Nous écrivons bien les racines dans l'ordre croissant.
Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$		-6		1		$2{,}5$		$+\infty$
Signe de a		−		−		−		−	
Signe de $x - 1$		−		−	0	+		+	
Signe de $x - (-6)$		−	0	+		+		+	
Signe de $x - 2{,}5$		−		−		−	0	+	
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Exercices d'application directe

32 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2(x - 2)(x - 3)(x - 5)$.

a. Réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ en faisant bien apparaître les trois signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2, x_3 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ... x_3 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Attention
Mettre x_1, x_2 et x_3 dans l'ordre croissant dans le tableau, ainsi que les 0 sur les barres aux endroits adéquats.

x	$-\infty$	....	....	.... $+\infty$
Signe de a				
Signe de $x - 2$				
Signe de $x - 3$				
Signe de $x - 5$				
Signe de $f(x)$				

33 On considère la fonction $g$définie par $g(x) = -3x(x - 4)(x - 6)$.

a. Réécrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ en faisant bien apparaître les trois signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

Indication : on peut écrire x sous la forme $(x - 0)$.

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2, x_3 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ... x_3 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

Attention
Mettre x_1, x_2 et x_3 dans l'ordre croissant dans le tableau, ainsi que les 0 sur les barres aux endroits adéquats.

x	$-\infty$	....	....	.... $+\infty$
Signe de a				
Signe de x				
Signe de $x - 4$				
Signe de $x - 6$				
Signe de $g(x)$				

34 On considère la fonction h définie par $h(x) = -5(x + 3)(x - 2)(x + 7)$.

a. Réécrire $h(x)$ sous la forme $h(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ en faisant bien apparaître les trois signes « – ».
Si ce n'est pas nécessaire, le préciser.

....

b. Identifier les valeurs de x_1, x_2, x_3 et a en précisant son signe.

x_1 = ... x_2 = ... x_3 = ...

a = ... Le signe de a est ....

c. En déduire le tableau de signes de h sur $\mathbb{R}$.

Attention
Mettre x_1, x_2 et x_3 dans l'ordre croissant dans le tableau, ainsi que les 0 sur les barres aux endroits adéquats.

x	$-\infty$	....	....	.... $+\infty$
Signe de a				
Signe de $x + 3$				
Signe de $x - 2$				
Signe de $x + 7$				
Signe de $h(x)$				

7 Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ et $x^3 = c$, avec c positif

1. On considère l'équation $x^2 = c$ où c est un nombre réel.
- Si $c < 0$, l'équation $x^2 = c$ n'admet pas de solution car le carré d'un nombre n'est jamais négatif.
- Si $c = 0$, l'équation $x^2 = c$ admet une unique solution qui est $x = 0$.
- Si $c > 0$, l'équation $x^2 = c$ admet deux solutions distinctes qui sont $x = \sqrt{c}$ et $x = -\sqrt{c}$.

2. On considère l'équation $x^3 = c$ où c est un nombre réel.
L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution, qui est $x = \sqrt[3]{c}$.
On trouvera la touche $\sqrt[3]{}$ sur la calculatrice.

Exercice résolu H

Résoudre les équations suivantes.
a. $x^2 = -6$ **b.** $5x^2 = 25$ **c.** $6x^2 = 0$

SOLUTION

a. Un carré ne pouvant être négatif, l'équation $x^2 = -6$ n'a pas de solution.
b. On cherche d'abord à écrire l'équation sous la forme standard $x^2 = c$.
$5x^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{5} = \frac{25}{5} \Leftrightarrow x^2 = 5$
Nous sommes dans le cas où $c > 0$. Il y a deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.
Remarque : on laisse les solutions sous la forme $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$ sauf si, dans l'énoncé, on demande une valeur approchée. Dans ce cas, on utilise sa calculatrice.
c. De la même manière, $6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$, donc l'équation admet une unique solution qui est $x = 0$.

Exercice résolu I

Résoudre les équations suivantes.
a. $x^3 = 343$ **b.** $2x^3 + 5 = 59$

SOLUTION

a. L'équation est sous la forme $x^3 = c$. La seule solution est $x = \sqrt[3]{343} = 7$.
b. L'équation n'est pas sous la forme standard $x^3 = c$. Nous allons d'abord la transformer.

$2x^3 + 5 = 59 \Leftrightarrow 2x^3 + 5 - 5 = 59 - 5$
$\Leftrightarrow 2x^3 = 54$
$\Leftrightarrow \frac{2x^3}{2} = \frac{54}{2}$
$\Leftrightarrow x^3 = 27$ L'équation est sous la forme standard. Nous pouvons appliquer la règle.
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

Exercices d'application directe

35 Résoudre les équations suivantes.

a. $x^3 = 1$ La solution est $x =$ ....

b. $x^3 = -1\,331$ La solution est $x =$ ....

c. $x^3 = 1{,}157625$ La solution est $x =$ ....

36 On veut résoudre l'équation $2x^3 = 250$.

a. Écrire l'équation sous la forme standard $x^3 = c$.

b. Résoudre l'équation.

37 On veut résoudre l'équation $4x^3 - 6 = 250$.

a. Écrire l'équation sous la forme standard $x^3 = c$.

b. Résoudre l'équation.

38 On veut résoudre l'équation $2x^3 + 3 = 5{,}662$.

a. Écrire l'équation sous la forme standard $x^3 = c$.

b. Résoudre l'équation.

39 Après 3 hausses successives et identiques, le prix d'un article passe de 50 € à 66,55 €.

a. Déterminer le taux d'évolution en pourcentage du prix de cet article après les 3 hausses.

b. En déduire le coefficient multiplicateur permettant de passer d'un prix de 50 € à un prix de 66,55 €.

c. Si on note x le coefficient multiplicateur associé à l'une des hausses, expliquer pourquoi nous avons $x^3 = 1{,}331$.

d. Déterminer la valeur de x.

e. En déduire le taux d'évolution en pourcentage associé à une seule hausse.

40 Après 3 baisses successives et identiques, le prix d'un article passe de 600 € à 437,40 €.

a. Déterminer le taux d'évolution en pourcentage du prix de cet article après les 3 baisses.

b. En déduire le coefficient multiplicateur permettant de passer d'un prix de 600 € à un prix de 437,40 €.

c. Si on note x le coefficient multiplicateur associé à l'une des hausses, expliquer pourquoi nous avons $x^3 = 0{,}729$.

d. Déterminer la valeur de x.

e. En déduire le taux d'évolution en pourcentage associé à une seule baisse.

Exercices d'approfondissement

41 Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a. Vérifier que $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

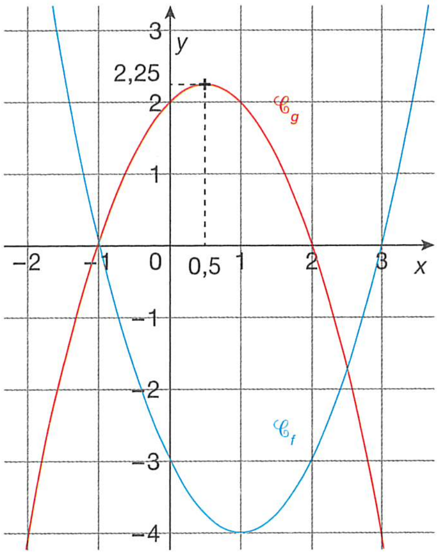
b. Trouver algébriquement quelques caractéristiques (racines, coordonnées de sommet, équation de l'axe de symétrie) de la fonction f puis tracer l'allure générale de sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

42 PYTHON Soit f le polynôme défini par $f(x) = 2x^2 - 20x - 78$. On admet que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions entières comprises entre –20 et 20.

a. Écrire un programme, en langage Python, capable de calculer les images de tous les entiers compris entre –20 et 20 afin de déterminer les valeurs de ces deux solutions.

b. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

43 Soit f et g deux fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ et représentées par leurs paraboles dans le plan rapporté à un repère ci-dessous.



a. Trouver les coordonnées des points particuliers de ces deux courbes (sommet, intersection avec l'axe des ordonnées, racines des fonctions f et g).

b. En déduire la forme factorisée de f et g.

44 Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 0,5)(x + 9)$. Étudier le signe de f.

45 Étudier dans $\mathbb{R}$ le signe de la fonction $f(x) = 7(x + 1)(x - 3)$. En déduire les solutions de $7(x + 1)(x - 3) > 0$.

46 Soit f une fonction polynôme du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 18$.

a. Déterminer $f(-3)$.

b. Factoriser f.

c. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

47 Soit f une fonction polynôme du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - b$, avec b réel.

a. Déterminer la valeur du nombre b vérifiant $2x^2 - b = 2(x -5)(x + 5)$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$.

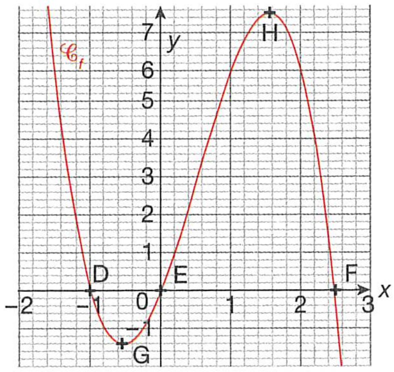
48 On considère la fonction P définie par $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ où k est un nombre réel.

a. Déterminer la valeur du réel k pour que $x = 4$ soit une racine de P.

b. Sachant que 1 est une racine double, factoriser $P(x)$.

c. Résoudre $P(x) > 0$.

49 Soit $f(x) = -2x(x + 1)(x - 2,5)$ un polynôme de degré 3 défini sur [–1,5 ; 4] représenté dans le plan sur un repère par la courbe ci-dessous.



a. Résoudre graphiquement $f(x) = 6$.

b. Conjecturer le signe de la fonction f sur [–1,5 ; 4].

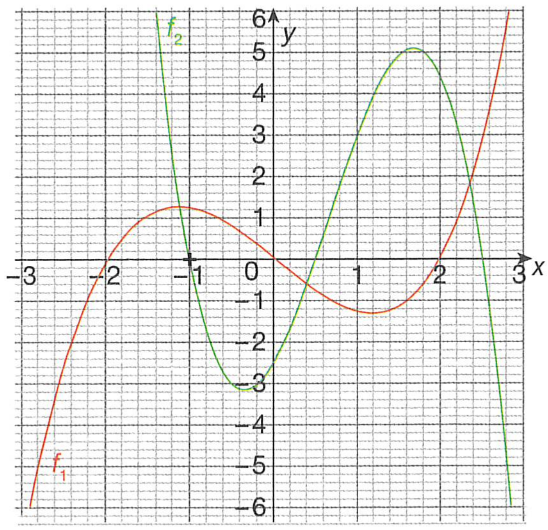
c. Déterminer graphiquement les racines de f. Vérifier algébriquement les conjectures émises.

d. Étudier algébriquement le signe de $-2x(x + 1)(x - 2,5)$. Vérifier la cohérence des résultats obtenus à l'aide du graphique.

50 Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,8(x + 3)(x - 5)(x - 7)$.

51 Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9(x + 12)(x + 7)(x - 11)$.

52 Soit f_1 et f_2 deux fonctions polynômes de degré trois.

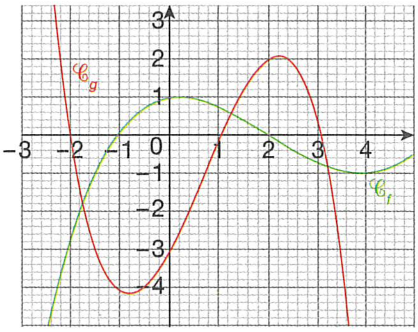


a. Déterminer graphiquement les racines des fonctions f_3 et f_4.

b. En déduire les expressions factorisées des fonctions polynômes f_3 et f_4.

Exercices d'approfondissement

53 Soit f et g deux fonctions du troisième degré définies sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous leurs courbes représentatives.



Déterminer les expressions factorisées de f et de g.

54 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$.

a. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)$.

b. En déduire les racines de f sur $\mathbb{R}$.

c. Étudier le signe de la fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

55 Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $f(x) = (x - 1)^3$.

b. Le nombre 1 est-il une racine de f ?

c. Déterminer algébriquement le signe de $(x - 1)^3$.
En déduire les solutions de $(x - 1)^3 < 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

56 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$f(x)$
–1,5	0
–1	0,3
–0,5	0
0	–0,45
0,5	–0,6
1	0

a. À partir du tableau de valeurs ci-dessus, déterminer la forme factorisée de f.

b. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

c. Résoudre $f(x) < 0$ puis $f(x) \leqslant 0$.

57 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}4x^3 + 2{,}4x^2 - 3{,}6x - 5{,}6.$$
Voici un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ avec un pas de 1.

x	$f(x)$
–2	8
–1	0
0	–5,6
1	–6,4
2	0
3	16

a. Déterminer la forme factorisée de f.

b. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

58 Soit la fonction $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $f(x) = -2x(x + 1)(x - 2{,}5)$.

b. Quelles sont alors les racines de f ?

c. Déterminer le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire les solutions de $-2x(x + 1)(x - 2{,}5) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

59 PYTHON On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 18x^3 - 1326x^2 - 1810x + 750$.
On admet que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions de la forme $\dfrac{n}{3}$ où n est un entier relatif compris entre –300 et 300.

a. Écrire un programme en Python qui permette de trouver les trois solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b. Faire fonctionner le programme Python et donner les trois solutions trouvées.

c. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

60 Soit la forme développée du polynôme du second degré $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.
Déterminer la forme factorisée de f en connaissant une de ses racines, le nombre 1.

61 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $-9x^2 - 3x = 0$.

b. $(x + 2)(3x - 7) = 0$.

c. $9x(x - 3) = 0$.

62 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a. $-3x^2 - 9 = 0$.

b. $5x^2 - 25 = 0$.

c. $2x^2 + 32 = 0$.

63 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a. $x^2 = 36$.

b. $2x^2 + 3 = 0$.

c. $(x - 3)(x + 3) = 0$.

d. $(x - 7)(x - 1) = 0$.

e. $x^2 = 625$.

f. $x^2 = \dfrac{1}{100}$.

g. $4x^2 - 100 = 0$.

h. $-x^2 = -7$.

i. $2x^2 - 5x = 0$.

j. $-3x^2 + 11x = 0$.

64 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a. $x^2 - 39 = -3$.

b. $(x - 5)(x + 5) + 9 = 9$.

c. $(x - 7)(x - 1) = 0$.

d. $x^2 = 10000$.

e. $x^2 = \dfrac{1}{100}$.

f. $x^2 - 81 = 0$.

g. $x^3 = 64$.

h. $(x - 7)(x + 2)(x - 3) = 0$.

65 Un peu d'économie

Une entreprise de céramique artisanale produit entre 5 et 40 pots résistant au gel par jour. Le coût journalier de production de x pots, en euros, est donné par :
$C(x) = x^2 - 20x + 400$, pour $5 \leqslant x \leqslant 40$.
Le prix de vente unitaire d'un pot, est, en moyenne, de 30 €.
On suppose que chaque pot produit est vendu.

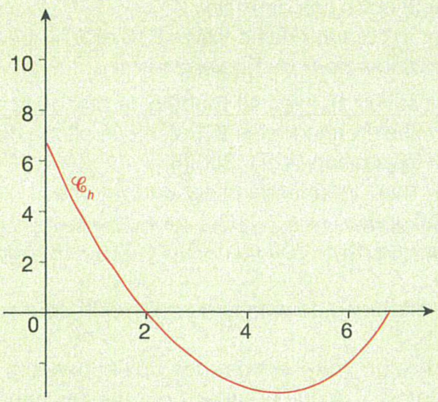
1. a. Quel est le coût de fabrication de 20 pots par jour ?
b. Quelle est la recette associée ?
c. L'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ?
Si oui, donner leur montant.
Si non, donner le montant des pertes.

2. Soit x le nombre de pots fabriqués et vendus par jour.
a. Calculer la recette en fonction de x.
b. Justifier que le bénéfice journalier réalisé par la fabrication et la vente de x pots est :
$$B(x) = -x^2 + 50x - 400.$$
c. Calculer $B(10)$ et $B(40)$.
d. Factoriser $B(x)$.
e. L'entreprise réalise-t-elle toujours des bénéfices ?
f. Pourquoi l'entreprise ne fabrique-t-elle pas plus de 40 pots ?

66 Le plongeon de l'amoureux

Raisonner – Communiquer

Un jeune homme voulant impressionner sa fiancée décide de sauter du haut d'un pont et de rejoindre l'autre côté de la rive située à 10 m du bas du pont.
Soit x la distance horizontale séparant le jeune homme du bas du pont et $h(x)$ la hauteur du jeune homme par rapport au niveau du fleuve (cette hauteur peut se trouver au-dessus ou en dessous du niveau de l'eau).
La fonction h est définie par $h(x) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 7$ pour $x \in [0 ; 7]$ et représentée ci-dessous.



1. À quelle hauteur le jeune homme commence-t-il son plongeon ?

2. Comment se nomme la représentation graphique de la fonction h ?

3. a. Calculer $h(2)$ et $h(7)$.
b. En déduire la forme factorisée de la fonction h.
c. Résoudre $h(x) < 0$.
d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. a. Quelles sont les coordonnées du sommet de la fonction h sur $[0 ; 7]$?
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $[0 ; 7]$.

6. Soit x_1 et x_2 deux réels appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$ vérifiant $x_1 < x_2$. Que peut-on déduire de la question précédente pour $h(x_1)$ et $h(x_2)$?

7. Combien de mètres doit faire le jeune homme pour rejoindre la rive ?

67 TABLEUR Vive les gadgets !

Représenter – Raisonner

Monsieur Colet fabrique des gadgets informatiques.
Il demande à son service marketing de faire une étude de marché pour son produit phare : le ventilateur USB.
Pour un prix unitaire de x euros, compris entre 2 et 20, le nombre de produits demandés en milliers d'euros est :
$$d(x) = 0{,}4x^2 - 17x + 190.$$
Pour un prix unitaire de x euros, compris entre 2 et 20, le nombre de produits disponibles (l'offre) est :
$$o(x) = 20 + 5x.$$
On souhaite reproduire la feuille de calculs suivante.

	A	B	C	D
1	x	Demande d(x) en milliers	Offre o(x) en milliers	Chiffre d'affaires
2	2	157,6	20	
3	3	142,6	25	
4	4	128,4	30	

1. Quelles formules destinées à être étirées vers le bas pour automatiser les calculs des cellules B et C peuvent être saisies dans les cellules B2 et C2 ?

2. Réaliser alors la feuille de calculs pour un prix compris entre 2 et 20 €.

3. a. À l'aide du tableur, déterminer $o(5)$ et $d(5)$. Interpréter le résultat. Pourquoi y a-t-il autant d'écart entre l'offre et la demande ?
b. À l'aide du tableur, déterminer $o(20)$ et $d(20)$. Interpréter le résultat. Pourquoi, à votre avis, y a-t-il autant d'écart entre l'offre et la demande ?

4. On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
a. Déterminer ce prix d'équilibre.
b. Déterminer le chiffre d'affaires correspondant.

5. Le prix de revient d'un ventilateur est de 3 €. À l'aide du tableur, déterminer le prix de vente du ventilateur pour obtenir le bénéfice maximal.

Aide
Lorsque l'offre dépasse la demande, une partie des produits n'est pas vendue, ce qui représente une perte.

Exercices d'approfondissement

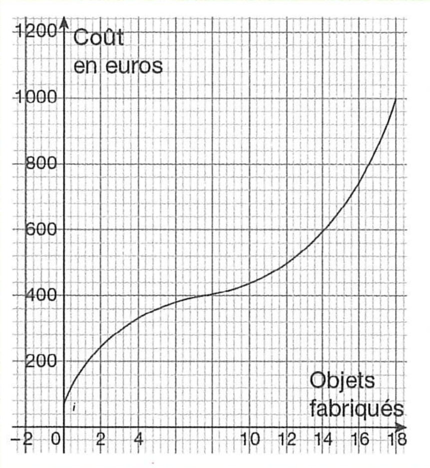
68 De l'économie et des graphiques

Représenter – Communiquer

Une entreprise familiale fabrique des objets en bois. On suppose qu'elle vend tous les objets qu'elle fabrique.
La fabrication peut varier entre 0 et 18 objets. On appelle x le nombre d'objets fabriqués et vendus par l'entreprise.
Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets, est donné par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105{,}5x + 68,$$

dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.



A. Étude des coûts de fabrication

a. Quels sont les coûts fixes de l'entreprise ?

b. Donner le coût de fabrication de 6 objets.

c. Pour combien d'objets produits le coût de fabrication est-il de 400 € ?

B. Étude de la recette

Chaque objet fabriqué est vendu en moyenne 50 €.

a. Donner l'équation de la fonction recette $g(x)$.

b. Tracer la droite D, courbe représentative de la fonction recette dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier la réponse.

C. Étude du bénéfice

On considère la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 12x^2 - 55{,}5x - 68$.

b. Que représente la fonction h étudiée dans cette partie ?

c. Calculer $h(8)$, $h(-1)$ et $h(17)$.

d. En déduire une factorisation de h.

e. Donner le tableau de signes de $h(x)$ sur $[0\ ;\ 18]$.

f. Pour combien d'objets fabriqués, l'entreprise est-elle rentable ?

69 Être prévoyant

TABLEUR M. Rosier dirige une biscuiterie artisanale.
Il achète depuis l'année 2006 le blé nécessaire à la fabrication de ses biscuits auprès du même fournisseur avec qui il a lié de solides relations commerciales.
Durant quelques années, il a dû tout de même payer plus de 300 € la tonne de blé et son entreprise s'est retrouvée en difficulté.

Afin de prévoir, il a demandé à un cabinet d'étude de modéliser le prix de la tonne de blé à partir des prix pratiqués entre l'année 2006 et l'année 2018.
Le cabinet a alors fourni la formule suivante :
$p(x) = x^3 - 24x^2 + 140x + 108$ où x est le réel positif représentant l'année 2006 + x et $p(x)$ le prix de la tonne de blé associé. $p(0)$ modélise donc le prix de la tonne de blé en 2006, $p(1)$ celui de la tonne de blé en 2007, etc.
D'après le cabinet, la formule est fiable pour x allant de 0 à 20.

	A	B	C	D	E
1	Année	Rang de l'année	Prix de la tonne de blé	Modélisation par f(x)	Différence en pourcentage
2	2006	0	99	108	9,090909091
3	2007	1	216	225	4,166666667
4	2008	2	314	300	-4,458598726
5	2009	3	352	339	-3,693181818
6	2010	4	321	348	8,411214953
7	2011	5	332	333	0,301204819
8	2012	6	321	330	-6,542056075
9	2013	7	232	255	9,913793103
10	2014	8	198	204	3,03030303
11	2015	9	160	153	-4,375
12	2016	10	123	117	-4,87804878
13	2017	11	79	75	
14	2018	12	66	60	
15	2019				

1. a. Quelle formule destinée à être étirée vers le bas peut être saisie dans la cellule D2 ?
b. Quel sera le contenu de la cellule D16 ?

2. a. Pour que le modèle soit acceptable, M. Rosier souhaite qu'il y ait moins de 10 % d'écart entre le prix réel et le prix modélisé $p(x)$. Quelle formule le cabinet a-t-il pu saisir dans la cellule E2 pour connaître l'écart en pourcentage entre ces deux prix ?
b. Calculer le contenu des cellules E13 et E14. Le modèle est-il acceptable pour M. Rosier ?

3. On veut savoir si, avec ce modèle, le prix de la tonne de blé dépassera encore les 300 €. Nous allons donc résoudre l'inéquation $p(x) \geqslant 300$ (I).
a. Montrer que l'inéquation (I) est équivalente à $p(x) - 300 \geqslant 0$.
b. Montrer que $p(x) - 300 = (x - 2)(x - 6)(x - 16)$ pour tout réel $x \geqslant 0$.
c. Établir le tableau de signes de $p(x) - 300$ pour x variant de 0 à 20.
d. Le modèle prévoit-il encore des prix supérieurs à 300 € la tonne de blé ? Si oui, préciser pour quelles années.

TABLEUR

1 Optimiser ses recettes

SITUATION Une entreprise artisanale fabrique des chaises de salon. Elle peut en fabriquer au maximum 25 par jour. Le coût total de fabrication de x chaises est donné par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 25] par :

$$C(x) = 0{,}2x^3 - 5{,}05x^2 + 48{,}6x + 13{,}8.$$

La recette de la vente de ces x chaises est modélisée par la fonction R définie sur [0 ; 30] par $R(x) = 40x - 0{,}05x^2$.

⇨ **Quelle est la quantité d'objets à produire et à vendre pour réaliser un bénéfice ?**

A Étude à l'aide d'un tableur

On veut réaliser la feuille de calculs suivante.

	A	B	C	D
1	quantité x	cout de production c(x)	recette r(x)	
2	0	13,8	0	
3	1	57,55	39,95	
4	2	92,4	79,8	
5	3	119,55	119,55	

Feuille de calculs
liennathan.fr/xv2bnl

1 Préparer la feuille de calculs ci-dessus pour une quantité variant de 0 à 25 chaises.
Préciser les formules entrées dans les cellules B2 et C2 qui, étirées vers le bas, permettent de compléter automatiquement les colonnes B et C.

2 **a.** Sélectionner les colonnes A, B et C, et insérer un graphique pour représenter les courbes représentatives des fonctions C et R.

Aide
Utiliser nuage de points.

b. Déterminer graphiquement le nombre de chaises produites et vendues pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

c. Déterminer graphiquement la quantité de chaises à produire et à vendre pour réaliser un bénéfice maximum. Avec la précision permise par le graphique, donner approximativement ce bénéfice maximum.

3 **a.** Pour vérifier les résultats de la question précédente, ajouter une colonne *Bénéfice* dans la colonne D. Quelle formule peut-on utiliser en D2 qui, une fois étirée vers le bas, permet d'automatiser les calculs de la colonne D ?

b. Retrouver alors le bénéfice maximal espéré. Pour quelle quantité de chaises produites ce bénéfice est-il réalisé ?

B Étude théorique

1 Justifier que le bénéfice $B(x)$ réalisé pour la production et la vente de x chaises est :
$B(x) = -0{,}2x^3 + 5x^2 - 8{,}6x - 13{,}8$.

2 **a.** Calculer $B(-1)$. Que peut-on en déduire ?

b. À l'aide du tableur, chercher deux autres solutions de l'équation $B(x) = 0$.

c. En déduire que $B(x)$ peut s'écrire sous la forme $B(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec des valeurs de a, x_1, x_2 et x_3 que l'on précisera.

3 **a.** Établir le tableau de signes de l'expression $B(x)$ pour x variant de 0 à 25.

b. Résoudre $B(x) \geqslant 0$. Quel(s) résultat(s) de la partie A retrouve-t-on ?

Remarque
Pour retrouver le bénéfice maximal, il faudra attendre d'avoir traité le chapitre sur la dérivation.

Travaux pratiques

PYTHON 2 Approcher une solution par balayage

SITUATION Le cours d'une action en bourse a subi une hausse de t % puis une baisse deux fois plus forte (de $2t$ %), puis une nouvelle hausse trois fois plus forte que la première (de $3t$ %).

⇨ **Est-il possible que le cours soit revenu à sa valeur initiale après ces trois évolutions, à part pour $t = 0$? Si oui, quel est, à 0,1 % près, le taux de la première augmentation ?**

A Vers une solution algorithmique

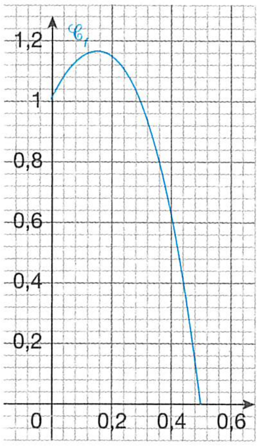
On souhaite trouver une approximation aussi précise que possible de la solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de balayage. On note a le taux de la première évolution.

1 Justifier que a est un nombre solution de l'équation $(1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x) = 1$ dans l'intervalle $[0 ; 0{,}5]$.

2 On a représenté ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $[0 ; 0{,}5]$ par :

$f(x) = (1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x)$.

Par lecture graphique, donner un intervalle d'amplitude 0,2 contenant a et sur lequel la fonction f est décroissante.



3 On propose l'algorithme suivant pour répondre à la question posée.

```
x ← 0,2
Tant que f(x)>1 faire:
    x ← x+0,001
Fin Tant que
Afficher x
```

a. Justifier cet algorithme en utilisant le sens de variation de f.

b. Avant d'implémenter cet algorithme dans un éditeur Python, on a besoin de définir la fonction f en langage Python. Nous utiliserons la structure de fonction introduite par `de f` comme ci-dessous.

```
def f(x):
  return(1+x)*(1-2*x)*(1+3*x)
```

On dira que la fonction f **prend en argument** un nombre x et **renvoie** le nombre $(1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x)$.Dans un éditeur Python, définir la fonction f puis l'algorithme de balayage, puis exécuter le programme et en déduire une réponse au problème posé.
Combien de fois la boucle `Tant que` a-t-elle été exécutée pour parvenir au résultat ?

4 On propose maintenant l'algorithme suivant.

```
x ← 0,2
pas ← 0,1
Tant que pas>=0,001:
   Tant que f(x)>1 faire:
      x ← x+pas
   Fin Tant que
   x ← x-pas
   pas ← pas/10
Fin Tant que
Afficher x
```

À l'aide d'un tableau et d'une calculatrice, exécuter cet algorithme. Combien de calculs de $f(x)$ ont été nécessaires pour parvenir au résultat ? Implémenter cet algorithme en Python.

B Pour aller plus loin

Une fonction, en algorithmique, ne se résume pas forcément en l'exécution d'un seul calcul. Le code suivant définit une fonction qui prend en argument un nombre p égal à la précision voulue pour la solution du problème et renvoie une valeur approchée de la solution à la précision p indiquée.

Tester et commenter ce code. Que signifient les résultats affichés ?

```
def f(x):
  return(1+x)*(1-2*x)*(1+3*x)
def approximation(p):
  x=0.2
  pas=0.1
  while pas>=p:
    while f(x)>1:
      x=x+pas
    x=x-pas
    pas=pas/10
  return(x)
print(approximation(0.1))
print(approximation(0.01))
print(approximation(0.001))
print(approximation(0.0001))
```