Première

CHAPITRE 2

THÈME 1 / Analyse

Fonctions : généralités

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/oomunz

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Calculer 35 % de 150 €.

2. Calculer $\frac{1}{4}$ de 56 % sous forme fractionnaire.

Évolution et variations

3. Augmenter de 0,9 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 430 quand il a baissé de 40 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 40 à 28 ?

6. Quelle est l'évolution subie par une valeur qui a diminué de 30 % puis de 10 % ?

7. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une hausse de 25 %.

8. Voici le tableau donnant les indices des prix d'un magasin. Indice 100 en 2021.

Année	2021	2022	2023
Indice	100	112	120

a. Quelle est l'évolution des prix en pourcentage entre 2021 et 2023 ?

b. Quelle est l'évolution des prix en pourcentage entre 2022 et 2023 ?

Calculs numériques et algébriques

9. Comparer $\frac{7}{9}$ et $\frac{4}{5}$.

10. Simplifier $B = 5^6 \times 5^5$.

11. Donner l'écriture scientifique de 18 956.

12. Convertir 21,7 m^3 en cm^3.

13. Résoudre $5x^2 - 80 = 0$.

14. L'équation réduite d'une droite (AB) est $y = -5x + 7$. Exprimer x en fonction de y.

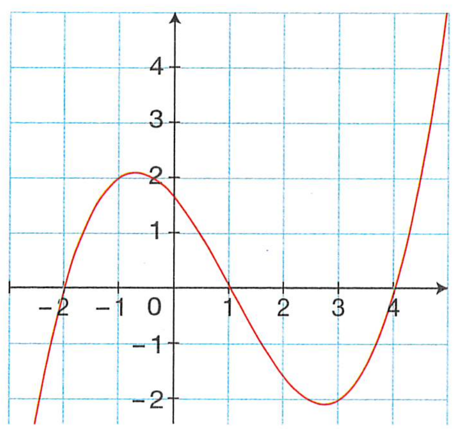
15. Sachant que $x = -3$, calculer y dans la formule précédente.

16. Développer et réduire $B = -2(x + 3)(x - 5)$.

17. Factoriser $C = (x - 3)(x + 7) - 3(x - 3)$.

Fonctions et représentations

18. Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



a. Déterminer $f(-3)$.

b. Déterminer le ou les antécédents de 1 par f.

c. Donner un nombre qui n'a qu'un seul antécédent.

d. Établir sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de f.

19. Construire le tableau de signes de $-5(x + 8)(x - 20)$.

20. Le point A(1 ; 3,5) appartient-il à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x + 2}{x^2 + 1}$?

21. Tracer dans un repère orthonormé la droite (d_1) d'équation $y = -x + 3$.

22. Tracer dans un repère la droite (d_2) passant par le point A(−1 ; 3) et de coefficient directeur $m = -2$.

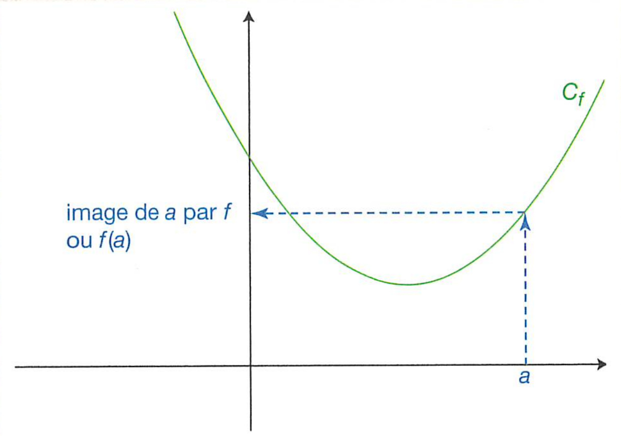
1 Revoir la notion d'images et d'antécédents : méthode graphique

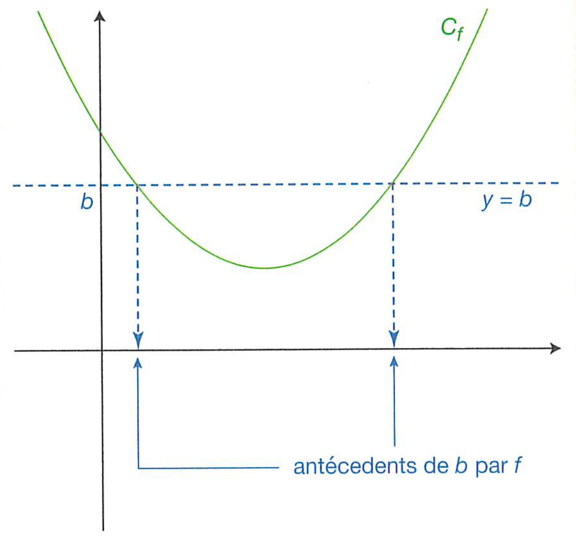
On considère une fonction f dont la représentation graphique est fournie.

- Pour trouver graphiquement l'image d'un nombre a par la fonction f, on repère le point de la courbe représentative de la fonction f dont l'abscisse est a. L'image de a par f, notée $f(a)$, est l'ordonnée de ce point.
- Pour trouver graphiquement le ou les antécédents éventuels d'un nombre b par la fonction f, on repère le ou les points de la courbe représentative de la fonction f d'ordonnée b. Le ou les antécédents de b par f sont le ou les abscisses de ces points s'ils existent.

Attention

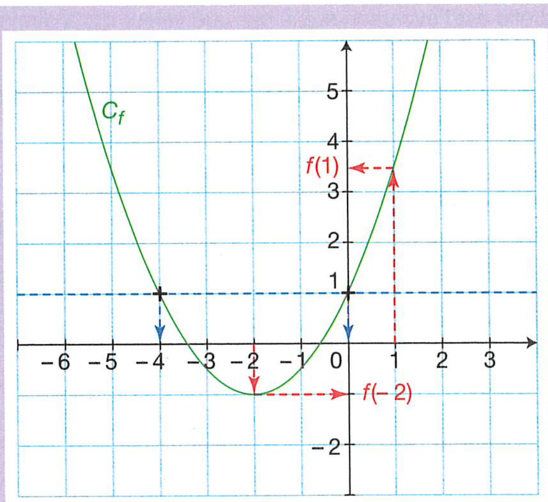
Il se peut qu'il n'y ait aucun point d'ordonnée b. Dans ce cas, b n'a pas d'antécédent par la fonction f.





Exercice résolu A

1. Déterminer l'image de 1 par la fonction f.
2. Déterminer $f(-2)$.
3. Déterminer le ou les antécédents éventuels de 1 par f.
4. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -3 par f.

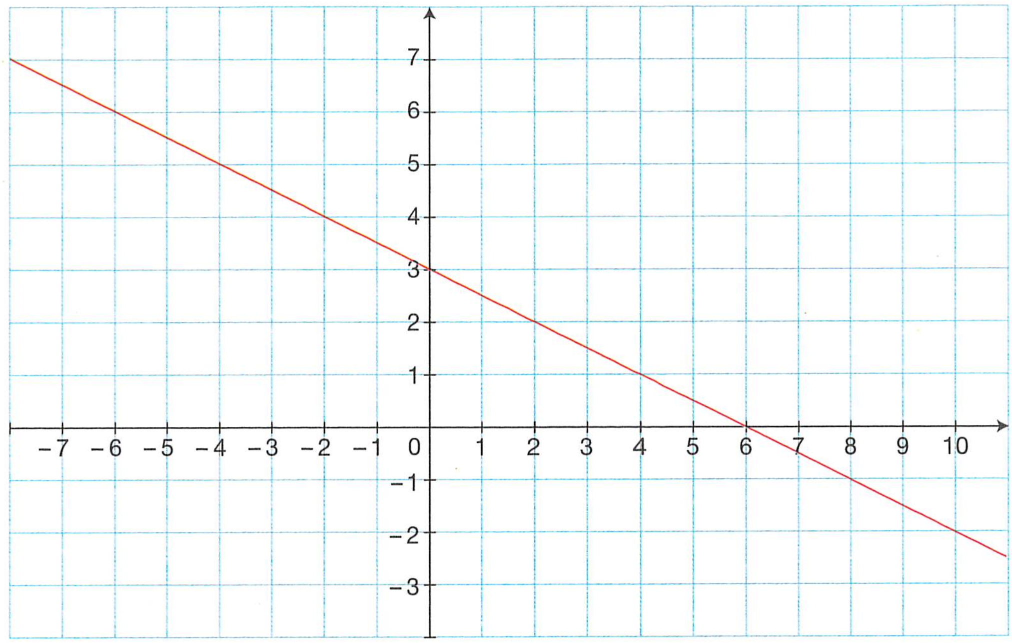


SOLUTION

1. L'image de 1 par f est environ 3,5.
2. $f(-2)$ signifie l'image de -2 par f. On trouve $f(-2) = -1$.
3. 1 a deux antécédents qui sont -4 et 0.
4. -3 n'a pas d'antécédent pas la fonction f. En effet, il n'y a aucun point de la courbe dont l'ordonnée est -3.

Exercices d'application directe

1 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



À l'aide du graphique, compléter les phrases suivantes. (On laissera les traces sur le graphique.)

a. L'image de 1 par la fonction f est ....

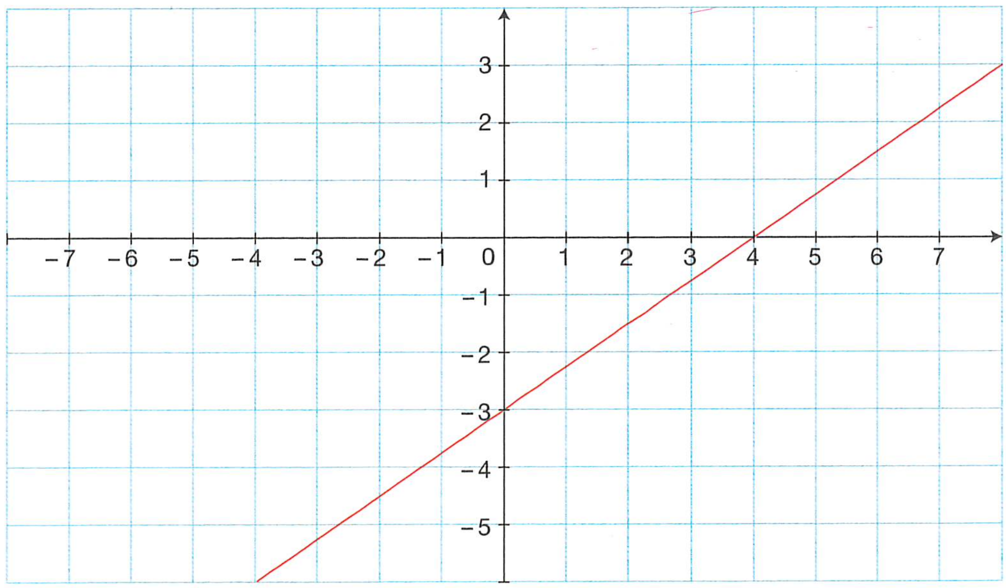
L'image de –4 par la fonction f est ....

b. $f(-2)$ = ... et $f(6)$ = ...

c. Le ou les antécédents éventuels de 2 par la fonction f sont : ....

Le ou les antécédents éventuels de –1 par la fonction f sont : ....

2 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g.



À l'aide du graphique, compléter les phrases suivantes. (On laissera les traces sur le graphique.)

a. L'image de –2 par la fonction g est ....

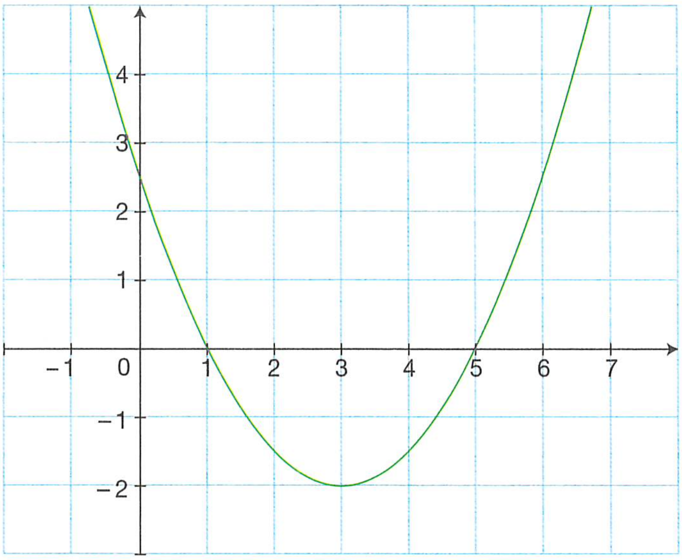
L'image de 3 par la fonction g est ....

b. $g(4)$ = ... et $g(-1)$ = ...

c. Le ou les antécédents éventuels de –2 par la fonction g sont : ....

Le ou les antécédents éventuels de 1 par la fonction g sont : ....

3 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction h.



À l'aide du graphique, compléter les phrases suivantes. (On laissera les traces sur le graphique.)

a. L'image de 0 par la fonction h est ……………………

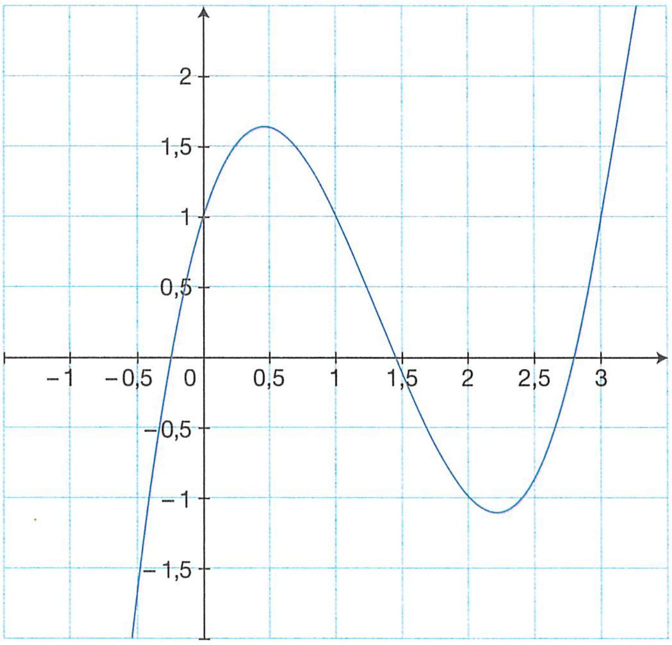
L'image de 5 par la fonction h est ……………………

b. $h(1) =$ …………………… et $h(3) =$ ……………………

c. Le ou les antécédents éventuels de –3 par la fonction h sont : ……………………

Le ou les antécédents éventuels de 2 par la fonction h sont : ……………………

3 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



À l'aide du graphique, compléter les phrases suivantes. (On laissera les traces sur le graphique.)

a. L'image de 0,5 par la fonction f est ……………………

L'image de 3 par la fonction f est ……………………

b. $f(-0,5) =$ …………………… et $f(0) =$ ……………………

c. Le ou les antécédents éventuels de –1 par la fonction f sont : ……………………

Le ou les antécédents éventuels de 1,5 par la fonction f sont : ……………………

d. Un nombre qui n'a pas d'antécédent peut être : ……………………

2 Revoir la notion d'images et d'antécédents : méthode numérique

On considère une fonction f définie sur un ensemble D de la variable x.

1. Pour calculer l'image d'un nombre a par la fonction f, on calcule $f(a)$. Il suffit donc de remplacer x par a dans l'expression $f(x)$.

2. Pour calculer un antécédent éventuel d'un nombre b par la fonction f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = b$. Pour cela, on remplace $f(x)$ par son expression numérique, puis on résout l'équation.

Exercice résolu B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 6$.

1 Calculer l'image de -3 par f.

2 Déterminer le ou les antécédents éventuels de 7 par f.

SOLUTION

1. L'image de -3 par f est $f(-3)$.
Dans l'expression $f(x) = -5x + 6$, remplaçons x par -3.
$f(-3) = -5 \times (-3) + 6 = 21$
L'image de -3 par f est 21.

2. Pour trouver le ou les antécédents éventuels de 7 par f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = 7$.

$$\begin{aligned} f(x) = 7 &\Leftrightarrow -5x + 6 = 7 \\ &\Leftrightarrow -5x + 6 - 6 = 7 - 6 \\ &\Leftrightarrow -5x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} = \frac{1}{-5} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

7 admet un antécédent par la fonction f qui est $-\frac{1}{5}$.

Exercices d'application directe

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x - 5$.

a. Déterminer $f(3)$ et $f(-4)$.

$f(3) =$ ……………………………………

$f(-4) =$ ……………………………………

b. Déterminer les images de -1 et de 0 par f.

Calcul : ……………………………………

L'image de -1 par f est ……………………

Calcul : ……………………………………

L'image de 0 par f est ……………………

c. Déterminer un antécédent éventuel de 2 par la fonction f.

Calcul : ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

L'antécédent de 2 par la fonction f est ……………………

d. Déterminer un antécédent éventuel de -7 par la fonction f.

Calcul : ……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

L'antécédent de -7 par la fonction f est ……………………

6 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -4x + 3.$$

a. Déterminer $g(0,5)$ et $g(-2)$.

$g(0,5) =$ ……

$g(-2) =$ ……

b. Déterminer les images de $-1{,}5$ et de 3 par g.

Calcul : ……

L'image de $-1{,}5$ par g est ……

Calcul : ……

L'image de 3 par g est ……

c. Déterminer un antécédent éventuel de 2 par la fonction g.

Calcul : ……

L'antécédent de 2 par la fonction g est ……

d. Déterminer un antécédent éventuel de -6 par la fonction g.

Calcul : ……

L'antécédent de -6 par la fonction g est ……

7 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{3}x - 5.$$

a. Déterminer $h(6)$ et $h(0)$.

$h(6) =$ ……

$h(0) =$ ……

b. Déterminer les images de -3 et de 2 par h.

Calcul : ……

L'image de -3 par h est ……

Calcul : ……

L'image de 2 par h est ……

c. Déterminer un antécédent éventuel de -7 par la fonction h.

Calcul : ……

L'antécédent de -7 par la fonction h est ……

d. Déterminer un antécédent éventuel de 0 par la fonction h.

Calcul : ……

L'antécédent de 0 par la fonction h est ……

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = (x - 3)(x + 2)$.

……

b. Déterminer $f(1)$ et $f(-2)$.

$f(1) =$ ……

$f(-2) =$ ……

c. Déterminer les images de -1 et de 0 par f.

Calcul : ……

L'image de -1 par f est ……

Calcul : ……

L'image de 0 par f est ……

d. Déterminer un antécédent éventuel de 0 par la fonction f.

Calcul : ……

L'antécédent de 0 par la fonction f est ……

3 Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction

Dans votre programme, modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction, c'est traduire la situation décrite par des phrases, des figures… par une fonction d'une variable.

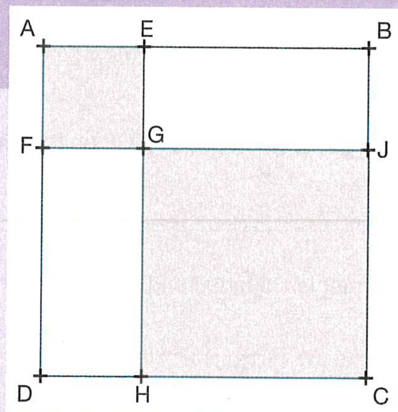
Pour cela :
- on choisit une variable que l'on nomme par une lettre (souvent x, mais toute autre lettre est acceptée) ;
- ensuite, on traduit toutes les informations à l'aide de la variable x ;
- enfin, on traduit, à l'aide d'une fonction de la variable x, la grandeur demandée en fonction de x.

Exercice résolu C

ABCD est un carré de côté 8 cm. Sur la figure ci-contre, AEGF et GJCH sont deux carrés. E est un point mobile du segment [AB]. On pose x = AE.

On note $f(x)$ l'aire de la partie grisée. Le but de l'exercice est d'exprimer $f(x)$ en fonction de x.

1. Quelles sont les différentes valeurs prises par x ?
2. Exprimer l'aire du carré AEGF en fonction de x.
3. a. Exprimer la longueur EB en fonction de x.
   b. En déduire l'aire du carré GJCH en fonction de x.
4. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.



SOLUTION

1. On sait que AB = 8 cm. x peut prendre toutes les longueurs comprises entre 0 et 8 cm. On écrit en mathématiques : $x \in [0 ; 8]$.

2. Aire_{AEGF} = côté × côté = $x \times x = x^2$

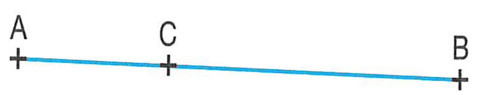
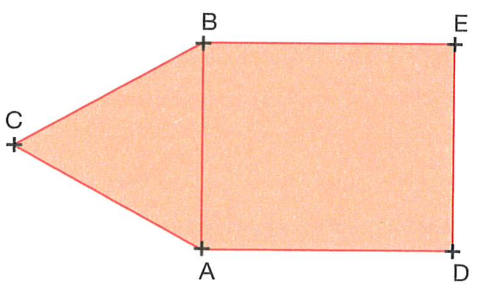
3. a. EB = AB – AE = $8 - x$. En effet, les points A, E et B sont alignés dans cet ordre.

b. On remarque que EB = GJ = $8 - x$.
Aire_{GJCH} = côté × côté = $(8 - x) \times (8 - x) = (8 - x)^2$

4. Nous avons : $f(x) = \text{Aire}_{AEGF} + \text{Aire}_{GJCH} = x^2 + (8 - x)^2$

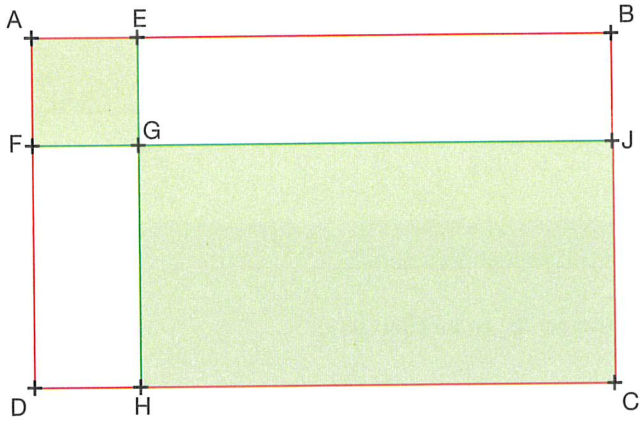
Exercices d'application directe

9

	**a.** AB = 10 cm et CB = x Exprimer AC en fonction de x. AC = ...
	**b.** AC = 3 cm et CB = x Exprimer AB en fonction de x. AB = ...
	**c.** ABC est un triangle équilatéral et BEDA un rectangle. On note BC = x. De plus, BE = 5 cm. Exprimer le périmètre de ACBED en fonction de x. ....

10 ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 6 cm. Sur la figure ci-dessous, AEGF est un carré et GJCH est un rectangle. E est un point mobile du segment [AD]. On pose x = AE.

On note $f(x)$ l'aire de la partie en vert. Le but de l'exercice est d'exprimer $f(x)$ en fonction de x.



a. Quelles sont les différentes valeurs prises par x ?

b. Exprimer l'aire du carré AEGF en fonction de x.

c. Exprimer les longueurs FD et HC en fonction de x.

d. En déduire l'aire du rectangle GJCH en fonction de x.

e. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

f. À l'aide de la partie graphique de votre calculatrice ou de la fonction tableau de valeurs, déterminer une valeur approchée de x pour que l'aire verte soit la plus petite possible.

11 **a.** Le prix d'un article coûtant x euros augmente de 15 %. Exprimer le nouveau prix $p(x)$ en fonction de x.

b. Le prix d'un article coûtant x euros diminue de 22 %. Exprimer le nouveau prix $p(x)$ en fonction de x.

c. Après une hausse de 17 %, un article coûte désormais x euros. Exprimer l'ancien prix $a(x)$ en fonction de x.

d. Après une baisse de 32 %, un article coûte désormais x euros. Exprimer l'ancien prix $a(x)$ en fonction de x.

e. Un article coûte x euros. Il subit une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 %. Exprimer le nouveau prix $p(x)$ en fonction de x.

12 Roméo et Juliette veulent louer un vélo électrique pour la journée pour visiter Paris.

Il existe trois tarifs de location :
- Tarif 1 : 60 euros la journée, temps d'utilisation illimité
- Tarif 2 : 8 euros de l'heure
- Tarif 3 : 30 euros de frais de dossier plus 4 euros de l'heure

On note x le nombre d'heures de location d'un vélo électrique pour une journée.

a. On note T_1 le tarif 1 pour x heures de location. Exprimer T_1 en fonction de x.

b. On note T_2 le tarif 2 pour x heures de location. Exprimer T_2 en fonction de x.

c. On note T_3 le tarif 3 pour x heures de location. Exprimer T_3 en fonction de x.

d. Sur une calculatrice, représenter les fonctions T_1, T_2 et T_3. Donner alors le tarif le plus avantageux en fonction de x.

13 Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0 ; 50]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en milliers euros, est donné par la fonction $C(x) = x^2 - 40x + 500$. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 18 euros.

a. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$ exprimée en milliers d'euros.

b. Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné par la fonction $B(x) = -x^2 + 58x - 500$.

c. Tracer sur une calculatrice la courbe représentative de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 50]$. Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

14 Lors d'un concert de hip-hop, un groupe a vendu 420 places.

Deux tarifs différents étaient proposés :
- Tarif 1 : 17 euros pour une place « assise »
- Tarif 2 : 12 euros pour une place « debout »

On note x le nombre de places assises vendues et $R(x)$ la recette de cette soirée.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

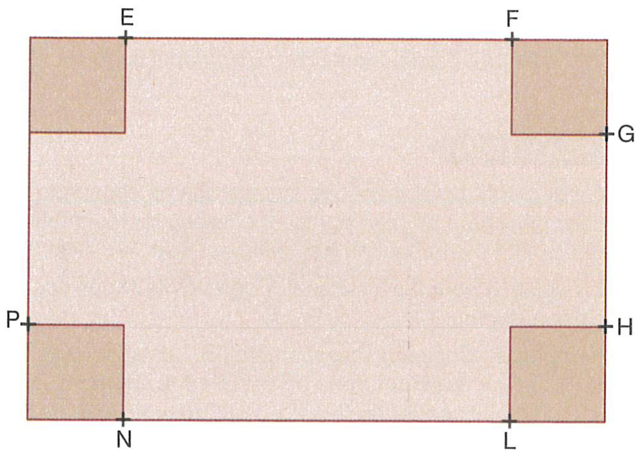
b. Exprimer en fonction de x la recette fournie par la vente des places « assises ».

c. Exprimer le nombre de places « debout » vendues en fonction de x.

d. En déduire la recette générée par la vente des places « debout » en fonction de x.

e. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

15 On dispose d'une feuille rectangulaire cartonnée de dimensions 30 cm de long et 20 cm de large.



Pour former une boîte par pliage, on enlève dans chaque angle un carré de côté x cm.

On rappelle que le volume V d'un pavé droit est donné par la formule $V = L \times \ell \times h$ où L, ℓ et h représentent respectivement la longueur, la largeur et la hauteur du pavé.

a. La longueur L de la boîte est la longueur EF. Exprimer L en fonction de x.

L = ...

b. La largeur ℓ de la boîte est la longueur GH. Exprimer ℓ en fonction de x.

ℓ = ...

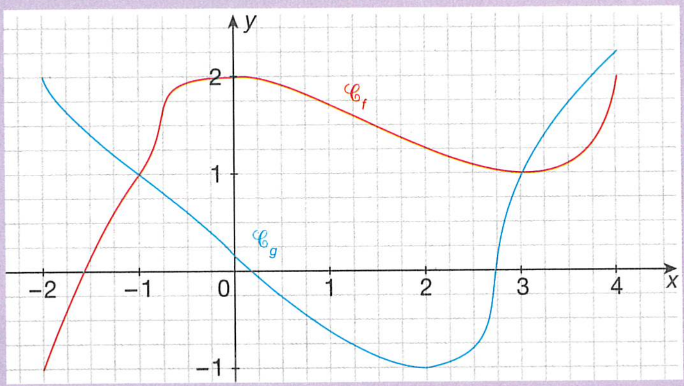
c. En déduire l'expression de V en fonction de x.

4 Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

- Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, on cherche les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$, on cherche **l'intervalle ou les intervalles** des abscisses x des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice résolu D

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur [–2 ; 4].



1 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

SOLUTION

1. f et g sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition $D_f = D_g = [-2 ; 4]$, représentées dans un repère du plan par leurs courbes représentatives respectives. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: –1 et 3.

2. $f(x) < g(x)$ pour les abscisses x des points situés sur l'intervalle [–2 ; –1[ou sur l'intervalle]3 ; 4], c'est-à-dire sur [–2 ; –1[$\leqslant$]3 ; 4].

Remarque : l'inégalité ici est stricte (<). Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, $x = -1$ et $x = 3$ ne font donc pas partie des solutions (crochets ouverts en –1 et 3).
À l'inverse, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ autoriserait les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Les solutions seraient alors l'ensemble des réels de $[-2 ; -1] \cup [3 ; 4]$ (crochets fermés en –1 et 3).

Exercices d'application directe

16 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-contre.

a. Tracer la droite d'équation $y = 1$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $h(x) = 1$.

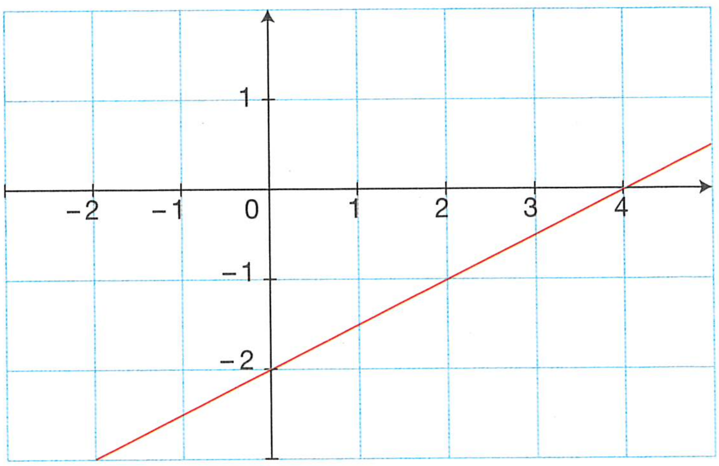
....

c. Déterminer les solutions de l'inéquation $h(x) < 1$.

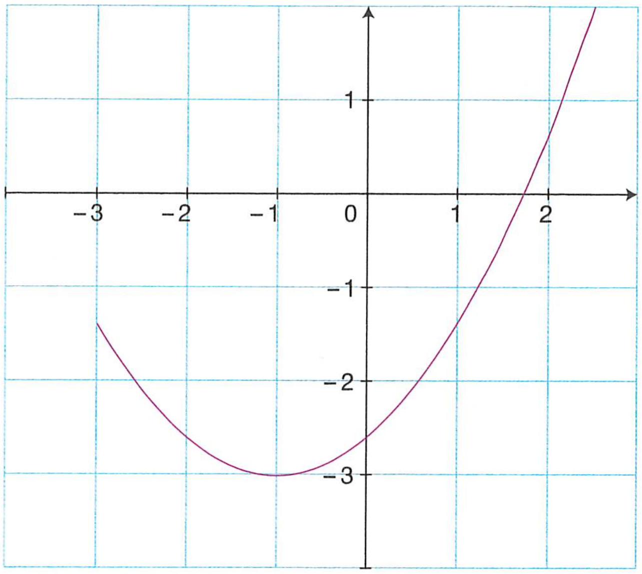
....

d. Déterminer les solutions de l'inéquation $h(x) \geqslant 1$.

....



17 On considère une fonction f définie sur l'intervalle [–3 ; 2,5]. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Tracer la droite d'équation $y = -1$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -1$.

....

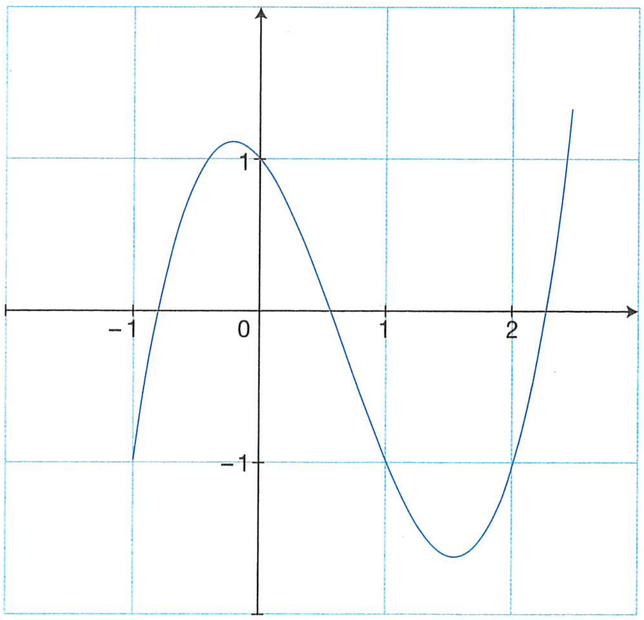
c. Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) < -1$.

....

d. Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant -1$.

....

18 On considère une fonction g définie sur l'intervalle [–1 ; 2,5]. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Tracer la droite d'équation $y = 1$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $g(x) = 1$.

....

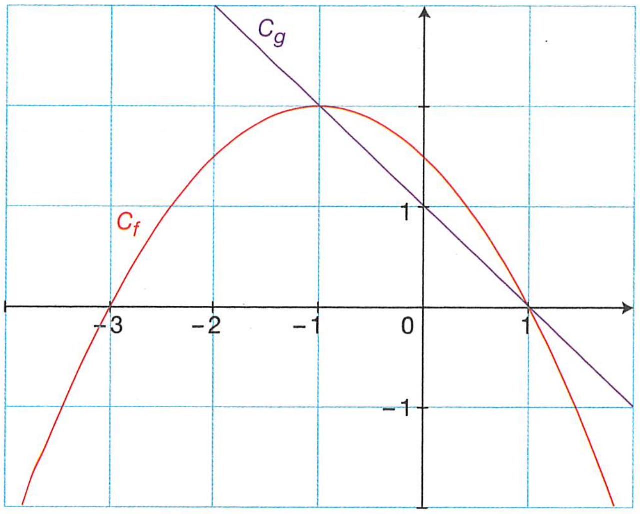
c. Déterminer les solutions de l'inéquation $g(x) < 1$.

....

d. Déterminer les solutions de l'inéquation $g(x) \geqslant 1$.

....

19 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. Leurs courbes représentatives sont données ci-dessous.



a. Résoudre $f(x) = g(x)$.

....

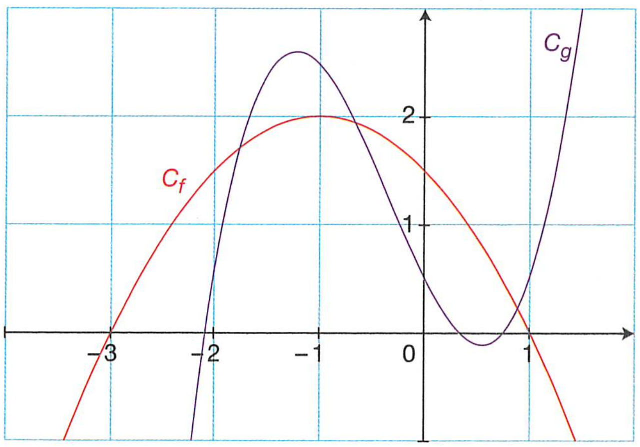
b. Résoudre $f(x) < g(x)$.

....

c. Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$.

....

20 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. Leurs courbes représentatives sont données ci-dessous.



a. Résoudre $f(x) = g(x)$.

....

b. Résoudre $f(x) < g(x)$.

....

c. Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$.

....

5 Interpréter le taux de variation comme pente d'une sécante à la courbe

1. Le taux de variation T entre a et b est donné par la formule : $T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ou $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

2. Le taux de variation entre a et b correspond graphiquement au coefficient directeur (ou pente) de la droite passant par les points de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ et $(b\ ;\ f(b))$.

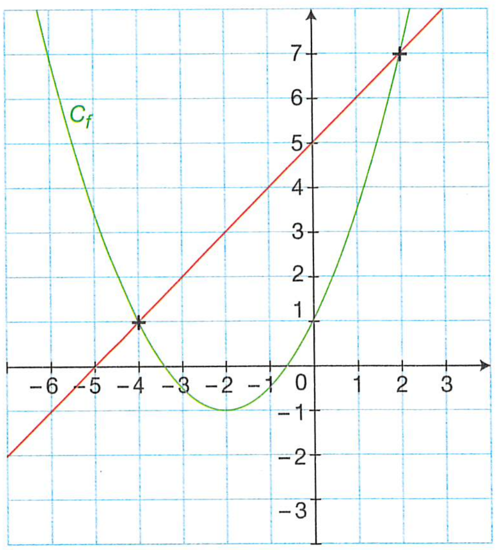
On rappelle que le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ est le point de la courbe représentative de la fonction f dont l'abscisse est a.

Exercice résolu E

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie par : $f(x) = 0{,}5(x + 2)^2 - 1$.

1 Déterminer le taux de variation de f entre –4 et 2.

2 Interpréter graphiquement ce taux de variation.



SOLUTION

1. On peut déterminer ici ce taux de variation par le calcul.

Par exemple : $T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Remplaçons b par –4 et a par 2 (ou inversement).

Nous avons alors : $T = \frac{f(-4) - f(2)}{-4 - 2}$.

Comme $f(-4) = 0{,}5(-4 + 2)^2 - 1 = 1$ et $f(2) = 0{,}5(2 + 2)^2 - 1 = 7$,

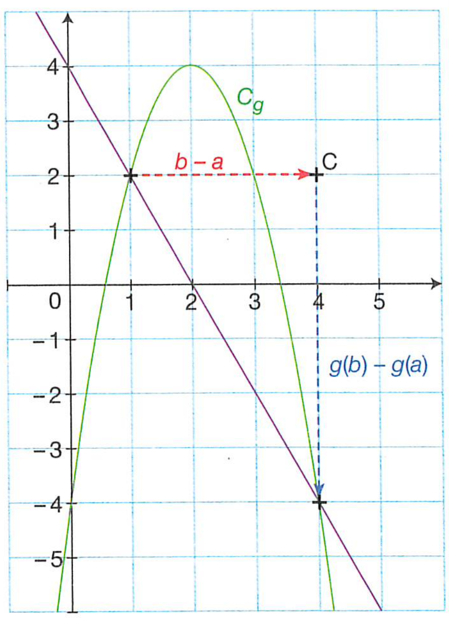
nous avons : $T = \frac{f(-4) - f(2)}{-4 - 2} = \frac{1 - 7}{-4 - 2} = \frac{-6}{-6} = 1$.

2. Le taux de variation de f entre –4 et 2 correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(-4\ ;\ f(-4))$ et $(2\ ;\ f(2))$, c'est-à-dire au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe représentative de la fonction f dont les abscisses sont –4 et 2 (la droite est tracée en rouge).

Exercice résolu F

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction g.

Déterminer le taux de variation de g entre 1 et 4.



SOLUTION

On sait que le taux de variation de g entre 1 et 4 correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe représentative de la fonction g dont les abscisses sont 1 et 4.

Ne connaissant pas l'expression numérique de la fonction g, nous allons déterminer ce taux à l'aide du graphique.

$T = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différence des abscisses}}$

On lit : $g(b) - g(a) = -6$ et $b - a = 3$.

Finalement : $T = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{3}{-6} = -0{,}5$

Exercices d'application directe

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -3x + 8.$$
Montrer que le taux de variation de la fonction f entre 1 et 5 est égal à -3.

22 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2x - 5.$$
Montrer que le taux de variation de la fonction g entre -2 et 3 est égal à 2.

23 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = x^2 - 3x + 1.$$
On appelle C_h la courbe représentative de h dans un repère du plan.

a. Calculer le taux de variation de la fonction h entre -1 et 4.

b. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a**.

24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2.$$
On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

a. Calculer le taux de variation de la fonction f entre -3 et 0.

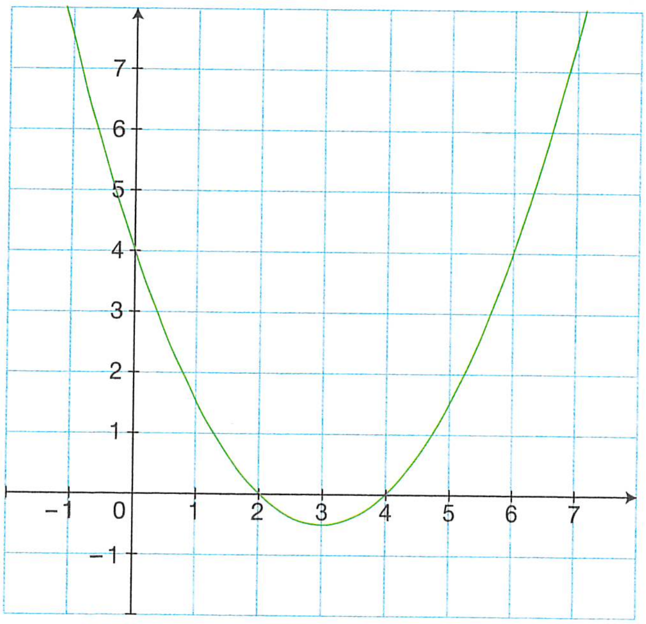
b. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a**.

25 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 2x^3 - x + 3.$$
On appelle C_h la courbe représentative de h dans un repère du plan.

a. Calculer le taux de variation de la fonction h entre -2 et 3.

b. Donner une interprétation graphique du résultat de la question **a**.

26 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.

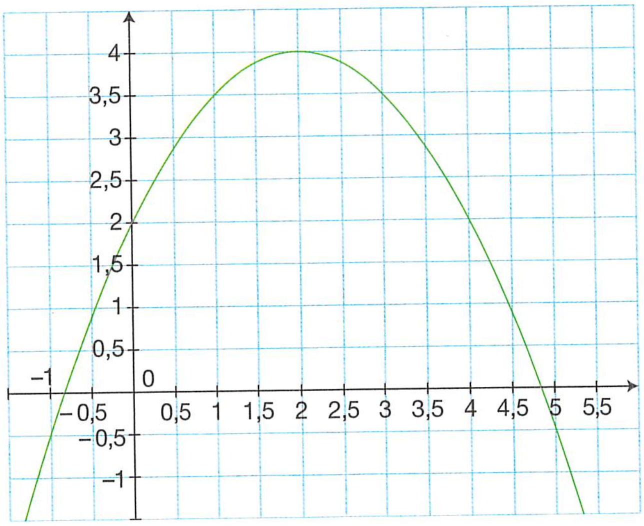


On souhaite déterminer le taux de variation de la fonction f entre 0 et 2.

a. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.

b. À l'aide du graphique, déterminer ce taux de variation.

27 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative C_g est donnée ci-dessous.

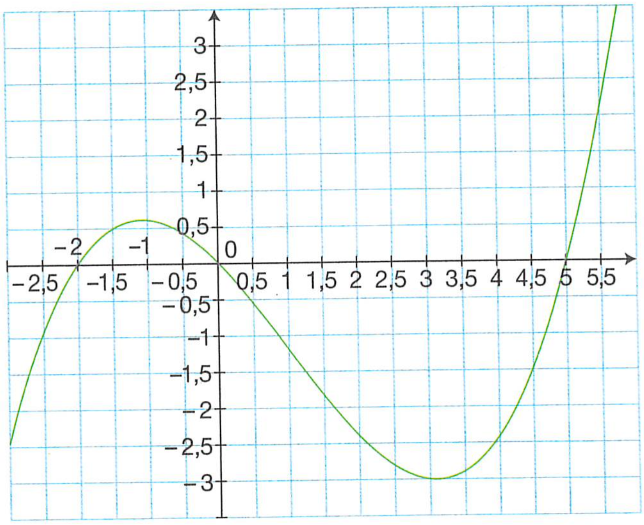


On souhaite déterminer le taux de variation de la fonction g entre 1 et 4.

a. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.

b. À l'aide du graphique, déterminer ce taux de variation.

28 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative C_h est donnée ci-dessous.



On souhaite déterminer le taux de variation de la fonction h entre –2 et 5,5.

a. Donner l'interprétation graphique de ce taux de variation.

b. À l'aide du graphique, déterminer ce taux de variation.

6 Faire le lien entre taux de variation et fonction monotone sur un intervalle

- Pour montrer qu'une fonction *f* est strictement croissante sur un intervalle I, on peut montrer que pour tous réels $x_1 \neq x_2$ de l'intervalle I, le taux de variation entre x_1 et x_2 est strictement positif.
- Pour montrer qu'une fonction *f* est strictement décroissante sur un intervalle I, on peut montrer que pour tous réels $x_1 \neq x_2$ de l'intervalle I, le taux de variation entre x_1 et x_2 est strictement négatif.
- Pour montrer qu'une fonction *f* est strictement constante sur un intervalle I, on peut montrer que pour tous réels $x_1 \neq x_2$ de l'intervalle I, le taux de variation entre x_1 et x_2 est égal à zéro.

Exercice résolu G

Soit *f* la fonction définie sur $[3 ; +\infty[$ par $f(x) = 2(x-5)(x-1)$.

1 À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, conjecturer le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$.

2 **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2(x-3)^2 - 8$.

b. Soit x_1 et x_2, deux réels vérifiant $3 \leqslant x_1 < x_2$.
Montrer que le taux de variation entre x_1 et x_2 peut s'écrire $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 2(x_1 + x_2 - 6)$.

c. Quel est le signe de ce taux de variation ? Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$?

SOLUTION

1. À l'aide d'une calculatrice, la fonction *f* semble croissante sur $[3 ; +\infty[$.

2. a. $2(x-3)^2 - 8 = 2(x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2) - 8 = 2x^2 - 12x + 10$.
$2(x-5)(x-1) = 2(x^2 - x - 5x + 5) = 2x^2 - 12x + 10$.
$f(x)$ et $2(x-3)^2 - 8$ ont la même forme développée. Ces deux expressions sont égales.

b.
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(2(x_2-3)^2 - 8) - (2(x_1-3)^2 - 8)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{2(x_2-3)^2 - 2(x_1-3)^2}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{2\cancel{(x_2 - x_1)}(x_1 + x_2 - 6)}{\cancel{x_2 - x_1}}$$
$$= 2(x_1 + x_2 - 6)$$

c. Comme x_1 et x_2 sont tous deux supérieurs ou égaux à 3, alors $x_1 + x_1 - 6$ est positif ou nul.
On en déduit que $2(x_1 + x_2 - 6) \geqslant 0$ si $3 \leqslant x_1 < x_2$.
Le taux de variation étant positif pour tous réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[3 ; +\infty[$, on en déduit que la fonction *f* est croissante sur $[3 ; +\infty[$.

Exercices d'application directe

29 On considère une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3(2 - x) - 2x + 1.$$

a. On prend deux réels *a* et *b* quelconques avec $a \neq b$.
Montrer que le taux de variation de la fonction *f* entre *a* et *b* est égal à –5.

....

....

....

....

....

....

b. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$?

....

....

....

....

....

....

....

....

30 On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = -(3 - x) + 3x - 4.$$

a. On prend deux réels a et b quelconques avec $a \neq b$.
Montrer que le taux de variation de la fonction g entre a et b est égal à 4.

b. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$?

31 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = 3(x - 2)^2 - 12.$$

a. On prend deux réels a et b de l'intervalle $]-\infty ; 2]$ avec $a < b$.
Montrer que le taux de variation de la fonction h entre a et b est égal à $3(a + b - 4)$.

b. Justifier que $a + b - 4 \leqslant 0$ lorsque $a < b \leqslant 2$.
Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$?

32 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = -2(x + 3)^2 - 5.$$

a. On prend deux réels a et b de l'intervalle $]-\infty ; -3]$ avec $a < b$.
Montrer que le taux de variation de la fonction h entre a et b est égal à $-2(a + b + 6)$.

b. Justifier que $a + b - 6 \leqslant 0$ lorsque $a < b \leqslant -3$.
Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty ; -3]$?

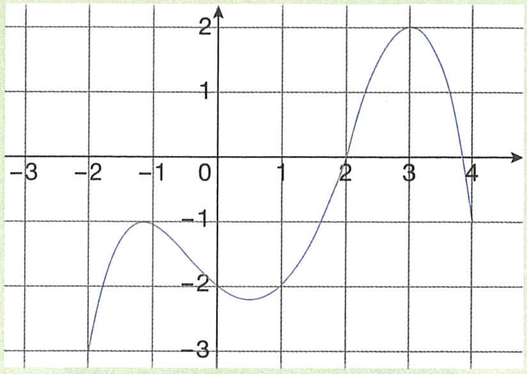
33 On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{x + 2}{x}.$$

a. On prend deux réels a et b de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ avec $a < b$.
Montrer que le taux de variation de la fonction h entre a et b est égal à $\dfrac{-2}{ab}$.

b. Justifier que $\dfrac{-2}{ab} \leqslant 0$ lorsque $0 < a < b$.
Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$?

Exercices d'approfondissement

34 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$.



a. Déterminer l'image de 3 par f.

b. Déterminer le nombre d'antécédents de 0 par f.

c. Résoudre graphiquement $f(x) = -1$.

d. Donner la valeur de $f(0)$.

e. Quel(s) nombre(s) a (ont) pour antécédent 1 ?

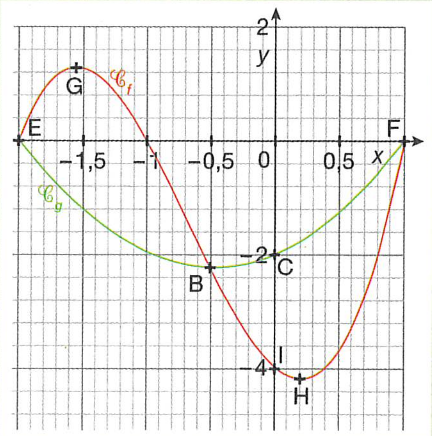
f. Quels nombres ont pour image −2 ?

g. Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 3.

h. Construire le tableau de variations de f sur $[-2\ ;\ 4]$.

i. Construire le tableau de valeurs de f sur $[-2\ ;\ 4]$ avec un pas de 1.

35 Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-2\ ;\ 1]$ dans le plan rapporté à un repère.



a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ puis l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

36 On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ 9]$. On sait que $f(0) = 5$ et on donne le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux de variation de $f(x)$ entre x et $x+1$	−2	−1	0	1	3	−1	1	0	−2

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.

37 TABLEUR **Label rouge**

Représenter – Communiquer

Un producteur utilise la levure G50 dans la fabrication de son fromage. Au début du processus, il y a 1 million de cellules par gramme de fromage. Ces cellules se développent sur plusieurs semaines d'affinage.

Lorsque la concentration des cellules de cette levure atteint 10 millions de cellules par gramme de fromage, le fromage est prêt à être vendu. On peut bien entendu l'affiner plus longtemps. Pour obtenir un label rouge, la concentration de levure G50 doit être supérieure ou égale à 10,5 millions de cellules par gramme de fromage.

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ 720]$ par :

$$f(t) = \frac{10{,}654t}{t+5}.$$

t représente le nombre de jours d'affinage et $f(t)$ modélise la quantité de cellules de levure par gramme de fromage au bout de t jours exprimée en millions.

Pour connaître l'évolution du nombre de cellules de levure par gramme de fromage, on a préparé la feuille de calculs suivante.

	A	B
1	Nombre de jours d'affinage t	$f(t)$
2		
3	1	1,7757
4	2	3,0440
5	3	3,9953
6	4	4,7351
7	5	5,3270
8	6	5,8113

a. Indiquer la formule à utiliser en cellule B3 pour automatiser ensuite les calculs de la colonne B.

b. Lire $f(10)$ et $f(20)$ puis interpréter le résultat.

c. Au bout de combien de jours d'affinage le fromage peut-il être commercialisé ?

d. Au bout de combien de jours d'affinage le fromage peut-il prétendre au label rouge ?

Exercices d'approfondissement

38 PYTHON Photocopies

Chercher – raisonner

Dans un centre commercial, une photocopie coûte 0,06 € sans abonnement. Avec un abonnement annuel à 25 €, on peut faire 600 photocopies puis chaque page au-delà de la 600e coûte 0,08 €.

Partie A

a. Donner le prix à payer $f(x)$, exprimé en euros, pour x photocopies réalisées sans abonnement.

b. Donner le prix à payer $g(x)$, exprimé en euros pour x photocopies réalisées avec abonnement.

c. À partir de combien de photocopies est-il judicieux de s'abonner ?

Partie B

Le responsable souhaite concevoir un algorithme qui affiche le prix à payer par un nouveau client pour N copies. Il doit commencer par indiquer si le client souhaite s'abonner ($T = 1$) ou non ($T = 2$).

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Fonction prix (T, N)
   Si T = 1, alors
             Si N ≤ 600, alors
                  P ← _________
             Sinon
                  P ←_____________
   Sinon
        ___________________
   Retourner P
```

2. Programmer cet algorithme sous Python et déterminer quel sera le prix à payer pour :

a. Un nouveau client qui ne s'abonne pas et fait 800 photocopies.

b. Un nouveau client qui s'abonne et fait 200 photocopies.

c. Un nouveau client qui s'abonne et fait 800 photocopies.

Partie C

Un étudiant prévoit de faire 1 230 photocopies sur 2 ans. On note y le nombre de photocopies qu'il fera la première année.
Écrire un programme en langage Python qui, lorsqu'on saisit une valeur de y, retourne le prix minimal que l'étudiant devra payer pour ses photocopies.

39 Cultiver ses légumes

Modéliser – Calculer

Chaque semaine, Gaëlle achète des légumes. Son panier moyen est de 54 €.

Elle décide de faire son propre potager et cherche à savoir au bout de combien de temps sa culture lui permettra de faire des économies. Elle prévoit les achats suivants :
– un motoculteur pour un coût de 849 € ;
– des semences pour un coût annuel de 64 € ;
– un panier moyen hebdomadaire de légumes (qu'elle ne peut pas cultiver dans son potager) de 24 €

Répondre au problème que se pose Gaëlle.

40 Le meilleur tarif ?

Raisonner – Communiquer

Naïm désire regarder des vidéos à la demande. Il étudie les trois offres provenant du même opérateur :
– offre 1 : un abonnement mensuel à 13,99 € par mois. Le nombre de titres visionnés est illimité ;
– offre 2 : un abonnement mensuel de 5 € auquel s'ajoute 0,30 € par titre visionné ;
– offre 3 : pas d'abonnement à payer. Chaque titre visionné est facturé 0,70 €.

Quelle offre doit choisir Naïm ?

41 Vive les promotions !

Modéliser – Raisonner

Une compagnie aérienne reliant les îles françaises « Belle-Île-en-Mer » et « Marie Galante » étudie des stratégies de vente des billets d'avion pour continuer à se développer et fidéliser ses clients.
La compagnie propose de baisser le prix d'un billet, par tranche d'un même montant, plusieurs fois.
Les observations ont montré que lorsqu'un billet coûte 1 000 €, sans baisse de prix, cette compagnie peut compter jusqu'à 50 000 passagers chaque année et chaque baisse de 50 € permet la vente de 100 nouveaux billets.
On souhaite savoir combien la compagnie doit faire payer un billet d'avion pour avoir une recette maximale.
Pour cela, on pose x le nombre de fois que le prix initial est baissé.

1. Calculer le prix de revient du billet d'avion et le nombre maximum des passagers annuel si la compagnie baisse 4 fois de suite le prix initial.

2. On note $f(x)$ le chiffre d'affaires, en euros, pour la vente des billets ayant subi x baisses de 50 €. Parmi les expressions suivantes, laquelle peut correspondre à $f(x)$?
a. $(1\,000 + 50x)(50\,000 + 100x)$.
b. $(1\,000 - 50x)(50\,000 + 100x)$.
c. $(1\,000 + 50x)(50\,000 - 100x)$.
d. $(1\,000 - 50x)(50\,000 - 100x)$.

3. Préciser l'ensemble de définition de la fonction choisie.

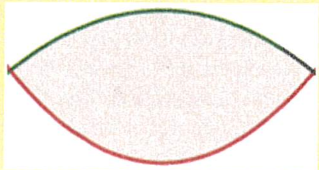
4. Indiquer les variations de la fonction choisie.

5. Résoudre le problème posé.

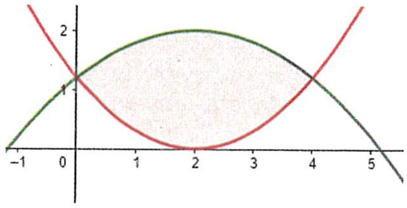
PYTHON 1 Approximation à l'aide d'un programme

SITUATION L'entreprise *Beau Sourire* commande une enseigne lumineuse pour son nouveau siège social. L'enseigne à la forme ci-contre :
Le prix de l'enseigne dépend de l'aire de celle-ci. 1 m² d'enseigne étant facturé 800 € pour la fabrication auquel s'ajoute 500 € pour la pose.

⇨ **Quel prix va payer l'entreprise « Beau Sourire » pour cette nouvelle enseigne ?**



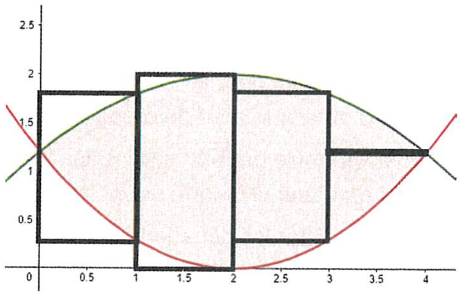
1 Un mathématicien a modélisé l'enseigne grâce à deux fonction f et g définie sur l'intervalle [6 ;10] par $f(x) = -0{,}2(x-2)^2 + 2$ et $g(x) = 0{,}3(x-2)^2$. x, $f(x)$ et $g(x)$ étant exprimées en mètres.
Avec un logiciel de géométrie dynamique, il a obtenu la figure ci-contre.
Calculer $f(2)$ et $g(2)$. En déduire la couleur de la courbe associée à la fonction f et la couleur de la courbe associée à la fonction g.



2 Pour connaître une valeur approchée de l'aire, on décide d'approcher l'aire de l'enseigne par l'aire de 4 rectangles comme sur l'illustration ci-contre.
On admet que la largeur d'un rectangle est égale à 1 et que les hauteurs sont respectivement $f(1) - g(1)$; $f(2) - g(2)$, etc.

On propose le programme ci-dessous.

```
8   from math import*
9
10
11  def fonctionf(x):
12      return ....
13
14  def fonctiong(x):
15      return ....
16
17  def aireapprochee():
18      aire  = 0
19      for i in range(1,.....):
20          aire = aire + 1*(fonctionf(i)-fonctiong(i))
21      return aire
22
23  def devis(aire):
24      return ......
25
26  print(devis(aireapprochee(....)))
```



Fichier Python
liennathan.fr/61alc0

a. Compléter les lignes 12 et 15 pour que les fonctions *fonctionf* et *fonctiong* retournent les valeurs de $f(x)$ et de $g(x)$.

b. Compléter la ligne 19 pour que la fonction *aireapprochee* calcule la somme de l'aire des 4 rectangles.

c. Compléter la ligne 24 pour que la fonction devis retourne le prix de l'enseigne posée.

d. Écrire le programme avec Python et donner le prix du devis. Penser à compléter la ligne 26.

3 Le mathématicien n'est pas très satisfait de cette approximation, il veut utiliser beaucoup plus que 4 rectangles.
On admet que si l'on partage l'enseigne avec n rectangles (n étant un entier supérieur à 1), la largeur de chaque rectangle est $\frac{4}{n}$ et la largeur $(f(6 + i \times \frac{4}{n}) - g(6 + i \times \frac{4}{n}))$ pour i variant de 1 à n.

On va modifier uniquement la fonction *aireapprochée*.

```
17  def aireapprochee(n):
18      aire  = 0
19      for i in range(1,n):
20          aire = aire + (4/n)*(fonctionf(......)-fonctiong(.......))
21      return aire
```

a. Modifier la ligne 20 pour pouvoir augmenter le nombre de rectangle.

b. Tester le programme avec $n = 10$; $n = 100$ et $n = 1000$.

c. Proposer un devis pour cette enseigne.

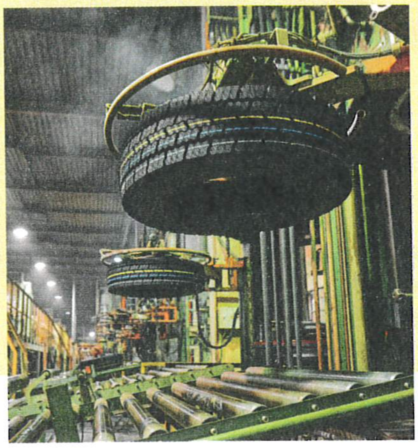
Travaux pratiques

TABLEUR 2 Déterminer une production optimale

SITUATION Une entreprise française commercialise des pneus. La production mensuelle maximale est de 30 000 pneus. On suppose que la totalité de la production mensuelle est vendue chaque mois.
Les charges de production, en milliers d'euros, pour x milliers de pneus vendus sont données par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 30] par :

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 574.$$

L'entreprise fixe le prix de vente d'un pneu à 130 euros.
La recette, en milliers d'euros, pour la vente de x milliers de pneus est donnée par la fonction $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $R(x) = 130x$.
⇨ **Pour quelle production mensuelle, le bénéfice de l'entreprise est-il maximal ?**



1 a. Sur un tableur, reproduire la feuille ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
2	C(x)	574															
3	R(x)	0															

b. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2, qui une fois étirée vers la droite permet d'obtenir le coût de production pour chaque colonne ?

c. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3, qui une fois étirée vers la droite permet d'obtenir la recette pour chaque colonne ?

d. Écrire et étirer les deux formules dans le tableur.

e. Insérer un graphique permettant d'obtenir les courbes représentatives des fonctions R et C.

Feuille de calculs
liennathan.fr/vc98yd

2 En utilisant une méthode au choix, répondre aux questions suivantes :

a. Quelles sont les charges de production pour 12 000 pneus ?

b. Combien faut-il produire de pneus pour avoir une recette de 2 500 000 € ?

3 On s'intéresse désormais au bénéfice réalisé.

a. Dans le tableur, insérer une ligne bénéfice sur la ligne 4.
Quelle formule peut-on saisir en B4, qui une fois étirée vers la droite permet de calculer le bénéfice pour chaque colonne ?

b. Insérer dans un nouveau graphique, la fonction bénéfice.

c. Pour quelle production de pneus, l'entreprise fait-elle un bénéfice ?

d. Pour quelle production de pneus, l'entreprise fait-elle un bénéfice maximal ?