Première

CHAPITRE 1

THÈME 1 / Analyse

Suites numériques

Avant de démarrer !

Je fais le point sur ce que j'ai déjà vu : liennathan.fr/ignu5v

Dans ce chapitre, nous utiliserons indifféremment la notation $u(n)$ ou u_n.

Entretenir ses automatismes

Proportion et pourcentage

1. Calculer 15 % de 70 €.

2. Calculer 20 % de 90 % sous forme de pourcentage.

Évolution et variations

3. Augmenter de 7 % revient à multiplier par combien ?

4. Que vaut 25 quand il a augmenté de 35 % ?

5. Quelle évolution a subi une valeur qui est passée de 20 à 15 ?

6. Calculer le taux d'évolution nécessaire pour compenser une baisse de 20 %.

7. Quelle évolution subi une valeur qui augmente de 10% puis de 20 % ?

8. On donne le tableau suivant :

Année	2021	2022	2023
Chiffre d'affaire en milliers d'euros	137	148	
Indice de base 100	100		121

a. Quel est l'indice de base 100 en 2022 ?
b. Quel est le montant du chiffre d'affaires en milliers d'euros en 2023 ?

Calculs numériques et algébriques

9. Calculer sous forme de fraction irréductible $3 \times \frac{7}{6} - 5$

10. Donner l'écriture décimale et fractionnaire de 18×10^{-5}.

11. Écrire $\frac{31}{25}$ sous forme décimale.

12. Convertir 75,7 L en cL.

13. Résoudre $5x - 3 > 2x + 9$.

14. Construire le tableau de signes de $3x - 7$ sur $\mathbb{R}$.

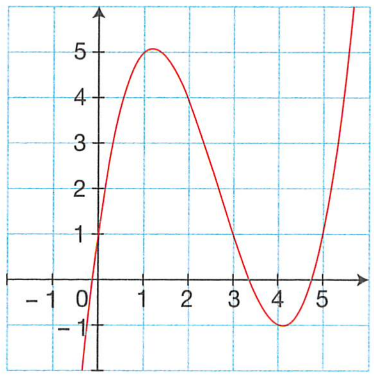
15. On donne PV = NRT. Exprimer T en fonction des autres variables.

16. L'aire d'un disque est donnée par $A = \pi \times R^2$ où R est le rayon du disque et A l'aire du disque.
Donner l'aire d'un disque de rayon 3 cm.

17. Développer et réduire $A = (x - 7)(x + 8) - 3(x + 4)$.

Fonctions et représentations

18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



a. Quelle est l'image de 2 par f ?
b. Quels sont les antécédents de 1 par f ?
c. Résoudre graphiquement $f(x) = 3$.
d. Construire le tableau de variations de f.

19. Construire le tableau de signes de $4(x - 9)(x + 12)$.

20. Le point de coordonnées (–1 ; 5) appartient-il à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 2$?

21. Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = 2x - 1$.

22. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(–2 ; 5) et B(0 ; 1).

1 Modéliser une situation à l'aide d'une suite

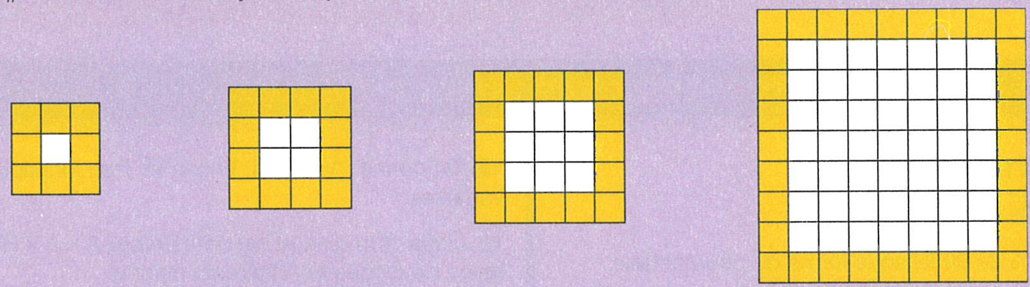
Dans votre programme, modéliser la situation à l'aide d'une suite, c'est traduire la situation décrite par des phrases, des figures, des tableaux à l'aide d'une suite numérique. Pour cela :

- On choisit dans un premier temps une variable que l'on nomme par une lettre (souvent n pour une suite).
- On traduit ensuite toutes les informations à l'aide de la variable n.
- On traduit à l'aide d'une suite de la variable n, la grandeur demandée en fonction de n.

Remarque
Il peut être utile dans un premier temps de commencer par des exemples numériques pour bien comprendre la situation.

Exercice résolu A

Dans la situation suivante, on appelle *Taille* le nombre de carrés qui forme la longueur du carré blanc.
On note u_n le nombre de carrés jaunes qui entourent un carré blanc de taille n.



Carré Taille 1 — Carré Taille 2 — Carré Taille 3 — Carré Taille 7

1 **a.** À l'aide de l'illustration ci-dessus, donner u_1, u_2 et u_3.
b. Déterminer u_4 et u_5.
c. Écrire une relation liant u_1 et u_2 ; u_2 et u_3 et plus généralement u_{n+1} et u_n.

2 **a.** Exprimer directement u_n *en fonction de n.*
b. Déterminer u_{20} et interpréter le résultat dans la cadre de l'exercice.

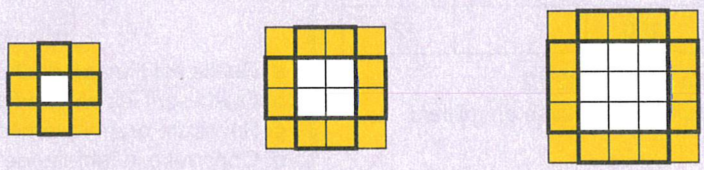
SOLUTION

1. a. À l'aide de l'illustration on voit que $u_1 = 8$; $u_2 = 12$ et $u_3 = 16$.

b. En prenant des illustrations similaires, on peut écrire que $u_4 = 20$ *et* $u_5 = 24$.

c. On remarque que lorsque la taille augmente de 1, le nombre de carrés jaunes augmente de 4.
Nous avons alors :
$u_2 = u_1 + 4$; $u_3 = u_2 + 4$ *et plus généralement* $u_{n+1} = u_n + 4$.

2. a. En utilisant le découpage suivant :



Carré Taille 1 — Carré Taille 2 — Carré Taille 3

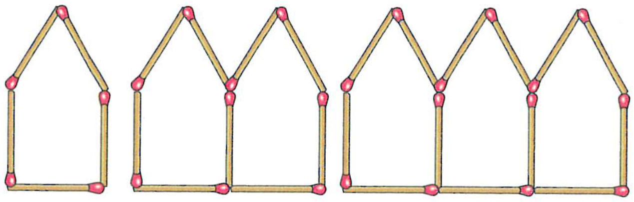
on voit que :
$u_1 = 4 \times 1 + 4$
$u_2 = 4 \times 2 + 4$
$u_3 = 4 \times 3 + 4$
Et plus généralement $u_n = 4 \times n + 4$

b. $u_{20} = 4 \times 20 + 4 = 84$
Cela signifie qu'un carré blanc de taille 20 sera entouré de 84 carrés jaunes.

INFO
Dans cet exercice, nous avons modélisé la situation à l'aide d'une suite de deux manières différentes :
1. par récurrence à l'aide de la formule trouvée dans la question **1.c.**
2. à l'aide d'une formule explicite à l'aide de la formule trouvée en **2.a.**

Exercices d'application directe

1 On réalise des maisons à l'aide d'allumettes.
On note n le numéro de l'étape et u_n le nombre d'allumettes nécessaires.



1. a. À l'aide de l'illustration ci-dessus, donner u_1, u_2 et u_3.

u_1 = ... ; u_2 = ... et u_3 = ...

b. Déterminer u_4 et u_5.

u_4 = ... u_5 = ...

c. Écrire une relation liant u_1 et u_2 ; u_2 et u_3 et plus généralement u_{n+1} et u_n.

....

....

....

....

2. a. Déterminer u_{20}.

....

....

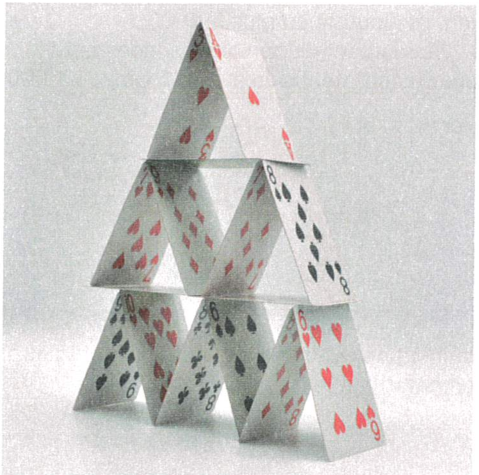
....

....

b. Exprimer u_n en fonction de n.

....

2 On note n le nombre d'étages (n est donc un nombre entier supérieur ou égal à 1) et v_n le nombre de cartes nécessaires à la fabrication d'un château de n étages.



a. Déterminer v_1, v_2 et v_3.

v_1 = ... ; v_2 = ... et v_3 ....

b. Déterminer v_4 = ...

c. Écrire une relation liant v_1 et v_2 ; v_2 et v_3 et plus généralement v_{n+1} et v_n.

....

....

....

3 On considère une suite (u_n) avec $u_0 = 1$; $u_1 = 1$.
On sait que pour calculer un terme de la suite, on doit faire la somme des deux termes précédents.

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

u_2 = ...

u_3 = ...

u_4 = ...

b. Déterminer une relation liant u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.

....

....

....

4 Une entreprise entre en bourse. Le cours d'une de ses actions le jour de l'introduction est fixé à 120 €.
On estime que le cours de l'action augmente chaque jour de 0,5 %.
On note u_n le cours de l'action en euros n jours après l'introduction. Nous avons donc $u_0 = 120$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

....

....

....

....

b. Déterminer une relation liant u_1 et u_2 ; u_2 et u_3 et plus généralement u_{n+1} et u_n.

....

....

....

c. Déterminer une formule donnant directement u_n en fonction de n.

....

5 Nora crée sa chaîne Youtube consacrée aux mathématiques. En moyenne, elle gagne 105 abonnés par mois.
On note u_n le nombre d'abonnés à la chaîne de Nora n mois après son ouverture. Nous avons donc $u_0 = 0$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

....

....

....

....

b. Déterminer une relation liant u_1 et u_2 ; u_2 et u_3 et plus généralement u_{n+1} et u_n.

c. Déterminer une formule donnant directement u_n en fonction de n.

d. Dans combien de mois le nombre d'abonnés de la chaîne de Nora dépassera-t-il les 10 000 abonnés ?

6 Mélina crée également une chaîne Youtube consacrée aux mathématiques. Elle a dès l'ouverture 40 abonnés. Ensuite, elle augmente en moyenne son nombre d'abonnés de 2 %.
On note v_n le nombre d'abonnés à la chaine de Mélina n mois après son ouverture. Nous avons donc $v_0 = 40$.

a. Calculer v_1, v_2 et v_3.

b. Déterminer une relation liant v_1 et v_2 ; v_2 et v_3 et plus généralement v_{n+1} et v_n.

c. Déterminer une formule donnant directement v_n en fonction de n.

d. Dans combien de mois le nombre d'abonnés de la chaîne de Mélina dépassera-t-il les 10 000 abonnés ?

7 En moyenne, les cheveux d'un être humain poussent de 0,03 cm par jour.
Fanny a des cheveux qui mesurent 45 cm. Après être passée chez le coiffeur, ses cheveux mesurent 35 cm.
On note u_n la taille des cheveux de Fanny en centimètre n jours après son passage chez le coiffeur. Nous avons donc $u_0 = 35$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Déterminer une relation liant u_1 et u_2 ; u_2 et u_3 et plus généralement u_{n+1} et u_n.

c. Déterminer une formule donnant directement u_n en fonction de n.

d. Combien de jours après son passage chez le coiffeur, Fanny va-t-elle retrouver une longueur de cheveux de 45 cm ?

8 À la naissance de Bastien, ses parents ont placé 1 000 € sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. Tous les ans, à l'anniversaire de Bastien, ils ajoutent en plus 500 €.
On note v_n le montant disponible n années après l'ouverture du compte. Nous avons donc $v_0 = 1\,000$.

a. Calculer v_1, v_2 et v_3.

b. Déterminer une relation liant v_1 et v_2 ; v_2 et v_3 et plus généralement v_{n+1} et v_n.

2 Calculer un terme de rang donné d'une suite

1. Si la suite (u_n) est définie explicitement, on remplace n par 0 pour calculer u_0, puis on remplace n par 1 pour calculer u_1 et ainsi de suite.

2. Si la suite (v_n) est définie par une relation de récurrence de premier terme connu, v_0 par exemple :
- pour calculer v_1 : on remplace n par 0 dans la relation de récurrence et on utilise v_0 ;
- pour calculer v_2 : on remplace n par 1 dans la relation de récurrence et on utilise v_1 ;
- et ainsi de suite.

Exercice résolu B

Avec une formule explicite :
On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = 3n - 5$.
Calculer $u(0)$, $u(1)$ et $u(2)$.

SOLUTION
- Si $n = 0$ alors $u(0) = 3 \times 0 - 5 = -5$.
- Si $n = 1$ alors $u(1) = 3 \times 1 - 5 = -2$.
- Si $n = 2$ alors $u(2) = 3 \times 2 - 5 = 1$.

Exercice résolu C

Avec une relation de récurrence :
On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 3v_n - 1$.
Calculer v_1, v_2 et v_3.

SOLUTION
Dans l'expression $v_{n+1} = 3v_n - 1$, on va remplacer n par 0, puis 1, puis 2.
- Si $n = 0$, l'expression s'écrit $v_1 = 3v_0 - 1$.
Comme $v_0 = 1$ alors $v_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$.
- Si $n = 1$, l'expression s'écrit $v_2 = 3v_1 - 1$.
Comme $v_1 = 2$ alors $v_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$.
- Si $n = 2$, l'expression s'écrit $v_3 = 3v_2 - 1$.
Comme $v_2 = 5$ alors $v_3 = 3 \times 5 - 1 = 14$.

Exercices d'application directe

9 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 1$.

a. La suite (u_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

....

b. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

$u_0 =$ ....

$u_1 =$ ....

$u_2 =$ ....

$u_3 =$ ....

10 Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3n + 5$.

a. La suite (v_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

....

b. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

$v_0 =$ ....

$v_1 =$ ....

$v_2 =$ ....

$v_3 =$ ....

11 Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

a. La suite (w_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3. Donner le résultat sous forme fractionnaire.

$w_0 =$

$w_1 =$

$w_2 =$

$w_3 =$

12 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n - 2$ et $u_0 = 2$.

a. La suite (u_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

13 Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -2v_n + 1$ et $v_0 = 3$.

a. La suite (v_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer v_1, v_2 et v_3.

$v_1 =$

$v_2 =$

$v_3 =$

14 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{4+u_n}{2+u_n}$ et $u_0 = 0$.

a. La suite (u_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer u_1, u_2 et u_3. Donner le résultat sous forme fractionnaire.

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

15 Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 2w_n - n + 1$ et $w_0 = 1$.

a. La suite (w_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer w_1, w_2 et w_3. Donner le résultat sous forme fractionnaire.

$w_1 =$

$w_2 =$

$w_3 =$

16 Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.

a. La suite (v_n) est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?

b. Calculer v_2, v_3, v_4 et v_5.

$v_2 =$

$v_3 =$

$v_4 =$

$v_5 =$

17 TABLEUR On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u(n) = -3n + 1$ d'une part et $v(0) = 1$
et $v(n+1) = 2v(n) - n$ d'autre part.

On utilise un tableur pour calculer les termes des deux suites :

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	0	1	1
3	1		
4	2		

a. Compléter le contenu des cellules B3, B4, C3 et C4. Justifier.

b. On veut utiliser une formule dans la cellule A3 qui, une fois étirée vers le bas, permette de compléter la colonne A. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

`=A2+1` `=A1+1` `=$A2+1` `=1`

c. On veut utiliser une formule dans la cellule B3 qui, une fois étirée vers le bas, permette de compléter la colonne B. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

`-3*A3+1` `=-3*B1+1` `=-3*B$1+1` `=-3*$B1+1`

d. On veut utiliser une formule dans la cellule C3 qui, une fois étirée vers le bas, permette de compléter la colonne C. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

`=2*C1-A1` `=2*C2-A2` `=2*C2-A3` `=C2`

18 PYTHON À chacune des deux suites suivantes correspond une et une seule fonction en langage Python permettant de calculer le terme de rang n.
Préciser laquelle.

Suite n° 1
$u(n) = 2n - 1$, $n \geq 0$

Suite n° 2
$u(0) = 7$;
$u(n + 1) = 2u(n) - 1$, $n \geq 0$

A
```python
def u(n):
    u = 7
    return 2*u - 1
```

B
```python
def u(n):
    u = 7
    for i in range(n):
        u = 2*u - 1
    return u
```

C
```python
def u(n):
    for i in range(n):
        u = 2*n - 1
    return u
```

D
```python
def u(n):
    return 2*n - 1
```

19 PYTHON **1.** On considère la suite u définie pour tout entier n par $u(n) = 3n - 5$.

a. On considère l'algorithme suivant :

```
Pour n allant de 0 à 5 :
    u ← 3 * n - 5
    Afficher u
```

Que fait cet algorithme ? Combien affiche-t-il de termes ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

b. Écrire un programme en langage Python pour afficher les seize premiers termes de la suite u.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2. On considère la suite v définie par son premier terme $v(0) = 2$ et la relation de récurrence $v(n + 1) = 3v(n) - 5$.

a. On considère l'algorithme suivant :

```
v ← 2
Afficher v
Pour n allant de 1 à 5 :
    v ← 3 * v - 5
    Afficher v
```

Que fait cet algorithme ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

b. Écrire un programme en langage Python pour afficher les seize premiers termes de la suite v.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

3 Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite

1. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Pour réaliser la représentation graphique des termes de la suite (u_n), il suffit :
- de déterminer u_0, u_1, u_2, u_3, etc. ;
- de placer dans un repère les points de coordonnées $(0 ; u_0)$, $(1 ; u_1)$, $(2 ; u_2)$, $(3 ; u_3)$, etc.

2. Si l'on connaît la représentation graphique d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, alors :
- u_0 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 0 ;
- u_1 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 1 ;
- u_2 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 2 ;
- u_n est l'ordonnée du point dont l'abscisse est n.

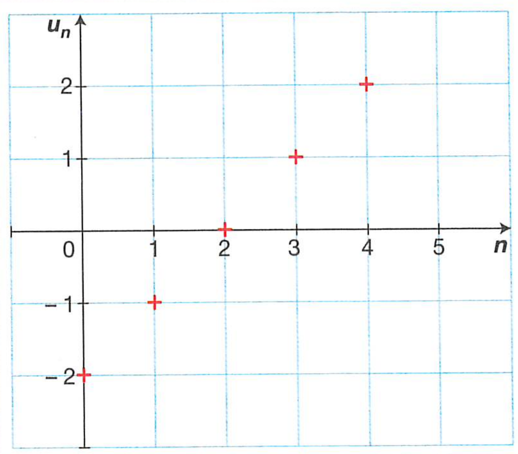
Exercice résolu D

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.
Représenter dans un repère les 5 premiers termes de la suite.

SOLUTION

Calculons u_1, u_2, u_3 et u_4 :
- Si $n = 0$ alors $u_1 = u_0 + 1 = -2 + 1 = -1$.
On va placer le point de coordonnées $(1 ; u_1)$ soit $(1 ; -1)$.
- Si $n = 1$ alors $u_2 = u_1 + 1 = -1 + 1 = 0$.
On va placer le point de coordonnées $(2 ; u_2)$ soit $(2 ; 0)$.
- Si $n = 2$ alors $u_3 = u_2 + 1 = 0 + 1 = 1$.
On va placer le point de coordonnées $(3 ; u_3)$ soit $(3 ; 1)$.
- Si $n = 3$ alors $u_4 = u_3 + 1 = 1 + 1 = 2$.
On va placer le point de coordonnées $(4 ; u_4)$ soit $(4 ; 2)$.

On n'oublie pas les coordonnées $(0 ; u_0)$ soit $(0 ; -2)$.

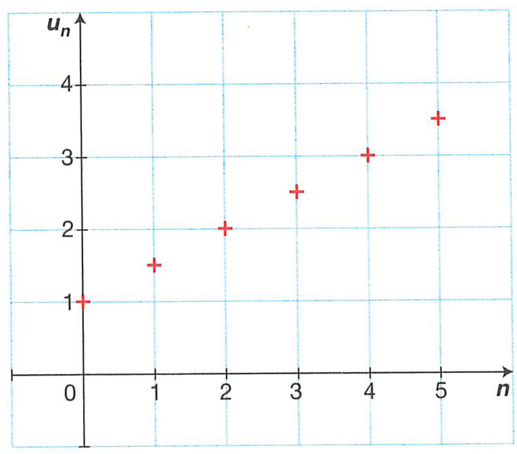


Exercice résolu E

Voici la représentation graphique de plusieurs termes d'une suite (u_n).
Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.

SOLUTION

- u_0 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 0 donc $u_0 = 1$.
- u_1 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 1 donc $u_1 = 1{,}5$.
- u_2 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 2 donc $u_2 = 2$.
- u_3 est l'ordonnée du point dont l'abscisse est 3 donc $u_3 = 2{,}5$.



Exercices d'application directe

20 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 2n + 4$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

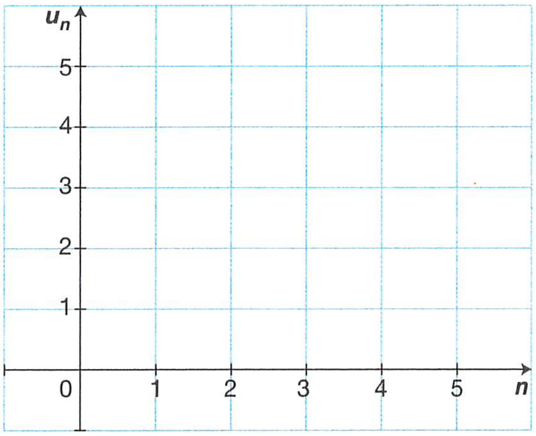
$u_0 =$ ……………………

$u_1 =$ ……………………

$u_2 =$ ……………………

$u_3 =$ ……………………

b. Placer dans le graphique ci-dessous les 4 premiers points de la suite.



21 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

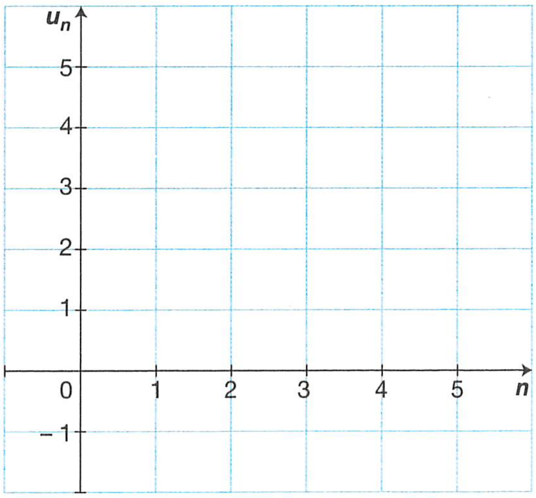
$u_0 =$ ……………………

$u_1 =$ ……………………

$u_2 =$ ……………………

$u_3 =$ ……………………

b. Placer dans le graphique les 4 premiers points de la suite.



22 Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 0{,}5w_n$ et $w_0 = 6$.

a. Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 et w_5.

$w_1 =$ ……………………

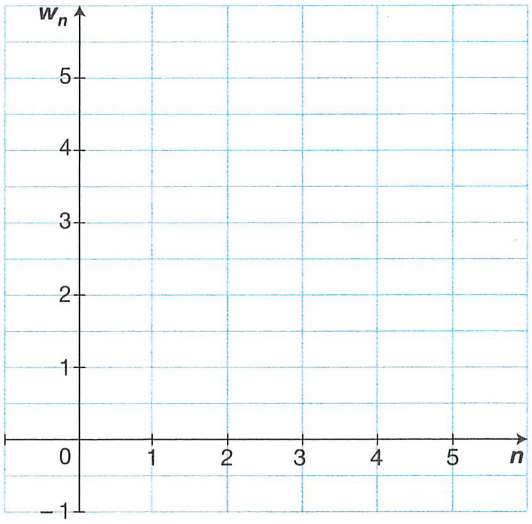
$w_2 =$ ……………………

$w_3 =$ ……………………

$w_4 =$ ……………………

$w_5 =$ ……………………

b. Placer dans le graphique les 6 premiers points de la suite.



23 Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 3w_n - 3n - 1$ et $w_0 = 1$.

a. Calculer w_1, w_2 et w_3.

$w_1 =$ ……………………

……………………

……………………

$w_2 =$ ……………………

……………………

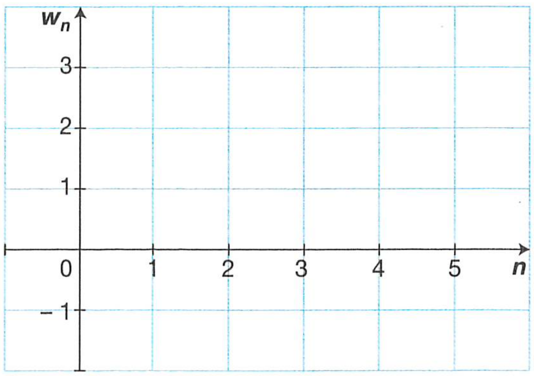
……………………

$w_3 =$ ……………………

……………………

……………………

b. Placer dans le graphique les 4 premiers points de la suite.

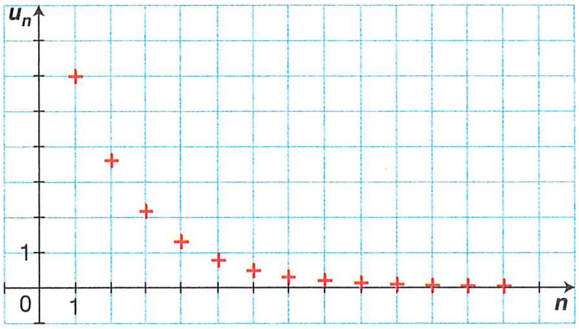


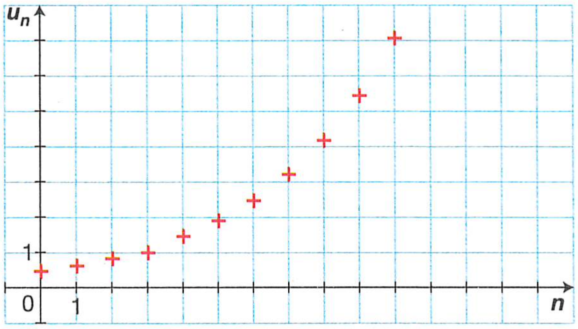
4 Conjecturer graphiquement la nature d'une suite

1. Si les points de la représentation graphique d'une suite semblent alignés, on peut conjecturer que la suite est arithmétique. En revanche, si les points ne sont pas alignés, on peut affirmer que la suite n'est pas arithmétique.

2. Si les points de la représentation graphique d'une suite sont dans l'une des deux situations ci-dessous, on peut conjecturer que la suite est géométrique. En revanche, si les points ne ressemblent pas à l'une de ces deux situations, on peut affirmer que la suite n'est pas géométrique (dans le cas d'une suite géométrique positive)

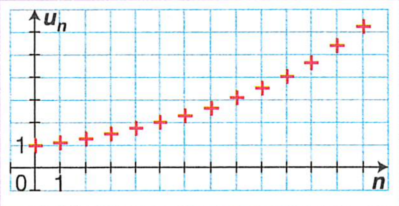
Attention
Le graphique permet de faire une conjecture uniquement. Il faudra ensuite prouver par un calcul la nature de la suite. (Voir point méthode suivant.)



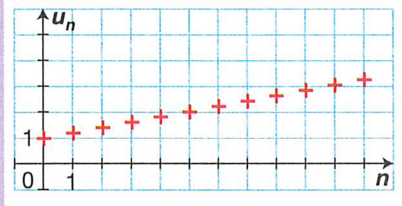


Exercice résolu F

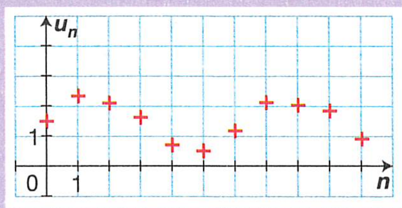
Dans les graphiques ci-dessous, sont représentées trois suites numériques.
Conjecturer, pour chaque suite, si elle semble arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.



Graphique 1



Graphique 2



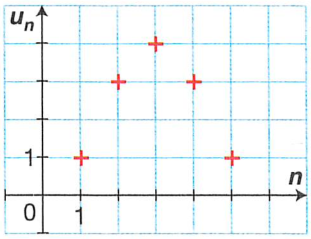
Graphique 3

SOLUTION

- On conjecture que la suite du graphique 1 est géométrique car le nuage de points ressemble à l'un de ceux présentés dans le point méthode.
- On conjecture que la suite du graphique 2 est arithmétique car les points semblent alignés.
- Les points du graphique 3 ne semblent correspondre à aucun cas du point méthode.
On peut affirmer que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Exercices d'application directe

24 Voici la représentation graphique d'une suite.



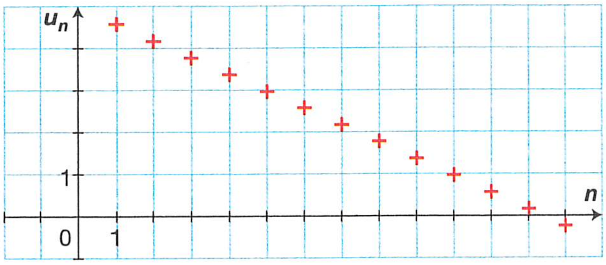
a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

25 Voici la représentation graphique d'une suite.



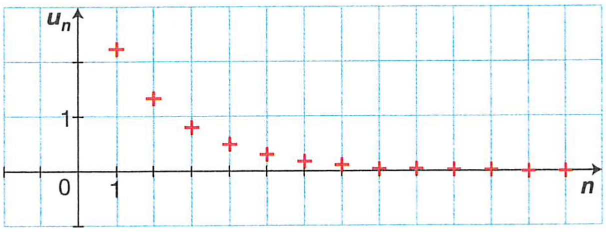
a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

26 Voici la représentation graphique d'une suite.



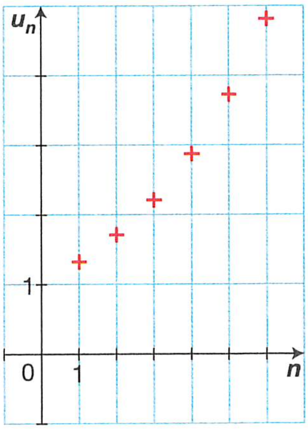
a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

27 Voici la représentation graphique d'une suite.



a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

....

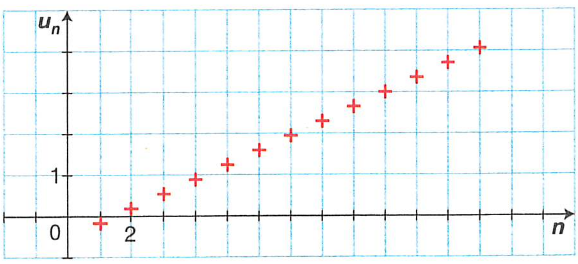
b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

....

....

28 Voici la représentation graphique d'une suite.



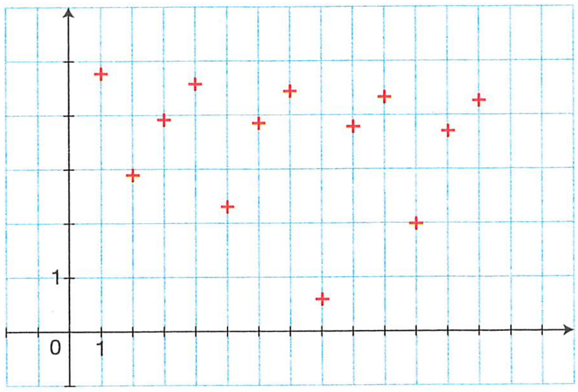
a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

29 Voici la représentation graphique d'une suite.



a. La suite peut-elle être arithmétique ?

....

b. La suite peut-elle être géométrique ?

....

30 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 5 - 0{,}3n$.

a. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

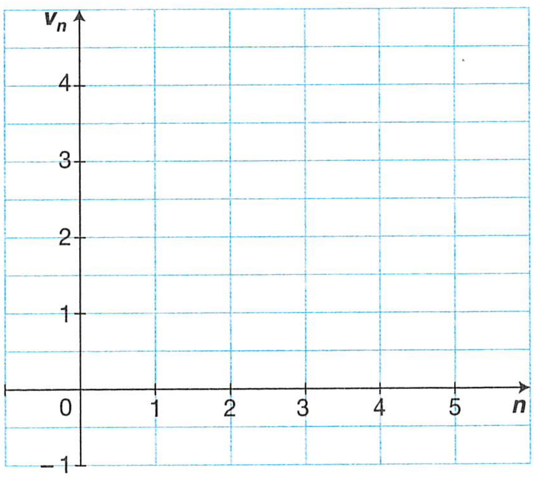
$v_0 =$ ....

$v_1 =$ ....

$v_2 =$ ....

$v_3 =$ ....

b. Placer dans le graphique les 4 premiers points de la suite.



c. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

....

....

....

....

31 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 5 \times 0{,}8^n.$$

a. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

$u_0 =$ ……

$u_1 =$ ……

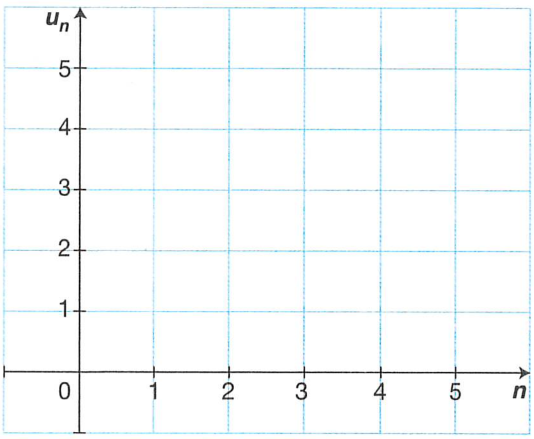
$u_2 =$ ……

$u_3 =$ ……

$u_4 =$ ……

$u_5 =$ ……

b. Placer dans le graphique les 6 premiers points de la suite.



c. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

……

32 On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_{n+1} = 0{,}5 \times w_n \text{ et } w_0 = 4.$$

a. Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 et w_5.

$w_0 = 4$

$w_1 =$ ……

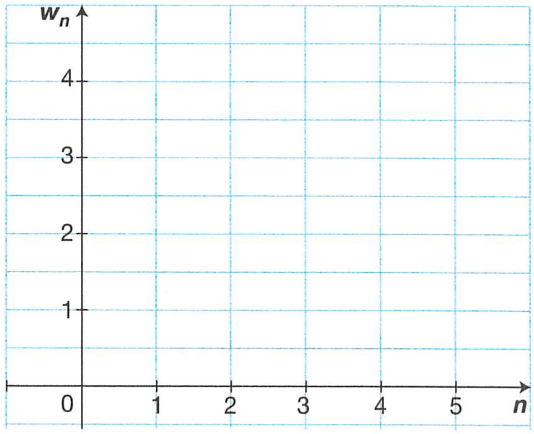
$w_2 =$ ……

$w_3 =$ ……

$w_4 =$ ……

$w_5 =$ ……

b. Placer dans le graphique les 6 premiers points de la suite.



c. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

……

33 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = 0{,}5 \times u_n + 1 \text{ et } u_0 = 1.$$

a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

$u_1 =$ ……

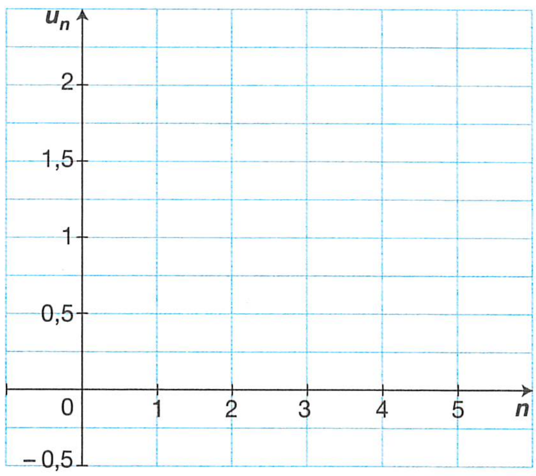
$u_2 =$ ……

$u_3 =$ ……

$u_4 =$ ……

$u_5 =$ ……

b. Placer dans le graphique les 6 premiers points de la suite.



c. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

……

5 Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

Vocabulaire
- Lorsque la croissance d'une quantité correspond à une suite arithmétique, on parle alors de croissance linéaire.
- Lorsque la croissance d'une quantité correspond à une suite géométrique, on parle alors de croissance exponentielle.

Exercice résolu G — Prouver qu'une suite n'est pas arithmétique

Soit u la suite définie par : $u(n) = (n + 2)^2 + n$ pour $n \geqslant 0$.

1 Calculer puis représenter $u(0)$; $u(1)$; $u(2)$. La suite u semble-t-elle arithmétique ?

2 Calculer les différences $u(1) - u(0)$ et $u(2) - u(1)$. En déduire que u **n'est pas** arithmétique.

SOLUTION

1. $u(0) = (0 + 2)^2 + 0 = 4$; $u(1) = (1 + 2)^2 + 1 = 10$; $u(2) = (2 + 2)^2 + 2 = 18$.

Les trois premiers points du nuage ne sont pas alignés, donc u ne semble pas arithmétique.

2. $u(1) - u(0) = 6$ et $u(2) - u(1) = 8$, donc u **n'est pas** arithmétique.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique :

1. On calcule la différence entre 3 termes consécutifs : $u(2) - u(1)$ et $u(1) - u(0)$ par exemple.

2. Si cette différence n'est pas la même, alors la suite u n'est pas arithmétique.

Exercice résolu H — Prouver qu'une suite est arithmétique

Soit v la suite définie par : $v(n) = 2n + 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

1 Calculer puis représenter $v(0)$; $v(1)$; $v(2)$. La suite v semble-t-elle arithmétique ?

2 Calculer les différences $v(1) - v(0)$ puis $v(2) - v(1)$.

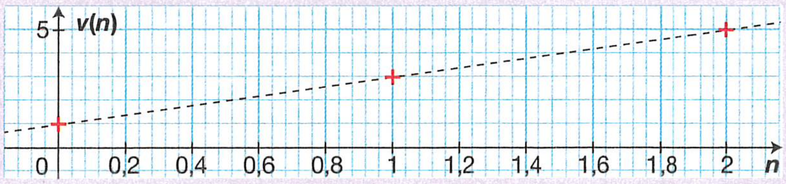
3 Pourquoi cela ne suffit-il pas à prouver que v est arithmétique ?

4 Pour tout n, calculer $v(n + 1)$ (en gardant n dans le calcul), puis la différence $v(n + 1) - v(n)$.

5 En déduire que la suite v **est** arithmétique. Préciser sa raison et son sens de variation.

SOLUTION

1. $v(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$; $v(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$; $v(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$.



Les trois premiers points du nuage sont alignés, donc v semble arithmétique.

2. $v(1) - v(0) = 3 - 1 = 2$; $v(2) - v(1) = 5 - 3 = 2$.

3. Cela ne suffit pas à prouver que v est arithmétique, car on a montré qu'on passait d'un terme à l'autre en ajoutant la même valeur, **mais seulement pour les trois premiers termes.**

4. Pour tout n, $v(n + 1) = 2(n + 1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3$.
Pour tout n, $v(n + 1) - v(n) = (2n + 3) - (2n + 1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2$.

5. On a bien prouvé que la différence entre deux termes consécutifs était **toujours** la même, **et pas seulement pour les trois premiers termes,** donc qu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même valeur : 1. Donc la suite v est bien arithmétique **de raison.** 2. Elle est **croissante** car sa raison 2 est positive.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une suite est arithmétique :

1. On calcule la différence entre les termes consécutifs : $u(n + 1) - u(n)$ pour tout n **en ne remplaçant pas n par un nombre.**

2. Si cette différence est une constante r indépendante de n, alors la suite u est arithmétique.

Cours et méthodes

Exercice résolu I — Prouver qu'une suite n'est pas géométrique

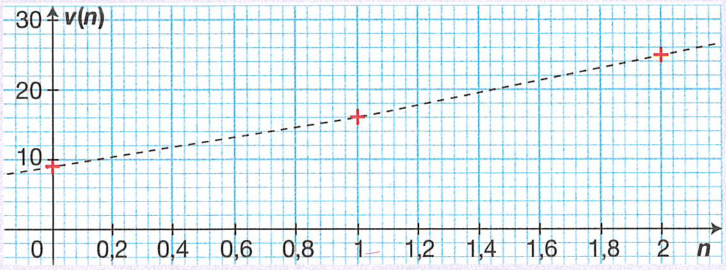
Soit u la suite définie par : $u(n) = (n + 3)^2$ pour $n \geqslant 0$.

1 Calculer puis représenter $u(0)$; $u(1)$; $u(2)$. La suite u semble-t-elle géométrique ?

2 Calculer les quotients $\dfrac{u(1)}{u(0)}$ et $\dfrac{u(2)}{u(1)}$. En déduire que u **n'est pas** géométrique.

SOLUTION

1. $u(0) = (0 + 3)^2 = 9$; $u(1) = (1 + 3)^2 = 16$; $u(2) = (2 + 3)^2 = 25$.



Les trois premiers points semblent former un nuage exponentiel ; u **semble** géométrique.

2. $\dfrac{u(1)}{u(0)} = \dfrac{16}{9} \approx 1{,}78$ et $\dfrac{u(2)}{u(1)} = \dfrac{25}{16} = 1{,}5625$.

Le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas toujours le même, donc on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur, donc la suite u n'est pas géométrique.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une suite n'est pas géométrique :

1. On calcule le quotient entre 3 termes consécutifs : $\dfrac{u(2)}{u(1)}$ et $\dfrac{u(1)}{u(0)}$ par exemple.

2. Si ce quotient n'est pas le même, alors la suite u n'est pas géométrique.

Exercice résolu J — Prouver qu'une suite est géométrique

Soit v la suite définie par : $v(n) = 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

1 Calculer puis représenter $v(0)$; $v(1)$; $v(2)$. La suite v semble-t-elle géométrique ?

2 Calculer les quotients $\dfrac{v(1)}{v(0)}$ puis $\dfrac{v(2)}{v(1)}$.

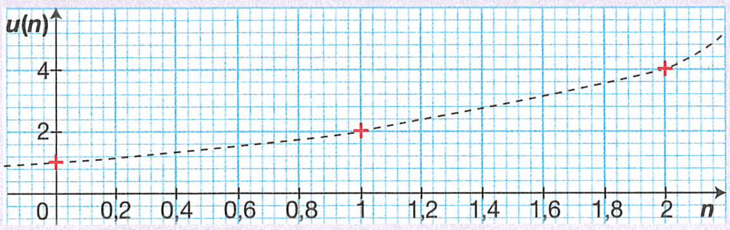
3 Pourquoi cela ne suffit-il pas à prouver que v est géométrique ?

4 Pour tout n, calculer $v(n + 1)$ (en gardant n dans le calcul), puis le quotient $\dfrac{v(n+1)}{v(n)}$.

5 En déduire que la suite v **est** géométrique. Préciser sa raison et son sens de variation.

SOLUTION

1. $v(0) = 2^0 = 1$; $v(1) = 2^1 = 2$; $v(2) = 2^2 = 4$.



Les trois premiers points semblent former un nuage exponentiel ; v **semble** géométrique.

2. $\dfrac{v(1)}{v(0)} = \dfrac{2}{1} = 2$ et $\dfrac{v(2)}{v(1)} = \dfrac{4}{2} = 2$.

3. Cela ne suffit pas à prouver que v est géométrique, car on a montré qu'on passait d'un terme à l'autre en multipliant par la même valeur, **mais seulement pour les trois premiers termes.**

4. Pour tout n, $v(n + 1) = 2^{n+1}$ puis $\dfrac{v(n+1)}{v(n)} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2$.

5. On a bien prouvé que le quotient entre deux termes consécutifs était **toujours** le même, **et pas seulement pour les trois premiers termes,** donc qu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur : 2. Donc la suite v est bien géométrique **de raison 2.** Elle est **croissante** car sa raison $2 > 1$.

MÉTHODE

Pour prouver qu'une suite est géométrique :

1. On calcule le quotient entre deux termes consécutifs : $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$ pour tout n sans remplacer n par un nombre.

2. Si ce quotient est une constante q **indépendante de** n, alors la suite u est géométrique de raison q.

Exercices d'application directe

34 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n \text{ et } v_0 = 4.$$

a. Calculer v_1, v_2 et v_3.

$v_1 =$ ……

$v_2 =$ ……

$v_3 =$ ……

b. Calculer $v_1 - v_0$ et $v_2 - v_1$.

$v_1 - v_0 =$ ……

$=$ ……

$v_2 - v_1 =$ ……

$=$ ……

c. Calculer $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$.

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

d. Que peut-on conjecturer pour la suite (v_n) ?

……

e. Prouver cette conjecture et préciser la raison de la suite.

……

35 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 1 \text{ et } u_0 = 2.$$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 =$ ……

$u_2 =$ ……

$u_3 =$ ……

b. Calculer $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$.

$u_1 - u_0 =$ ……

$=$ ……

$u_2 - u_1 =$ ……

$=$ ……

c. Calculer $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

d. Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

……

36 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

a. Calculer u_0, u_1 et u_2.

$u_0 =$ ……

$u_1 =$ ……

$u_2 =$ ……

b. Calculer $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$.

$u_1 - u_0 =$ ……

$=$ ……

$u_2 - u_1 =$ ……

$=$ ……

c. Calculer $\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\dots}{\dots} =$ ……

d. Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

……

e. Prouver votre conjecture et préciser la raison de la suite.

……

37 TABLEUR On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = (n + 2)^2 - n^2.$$

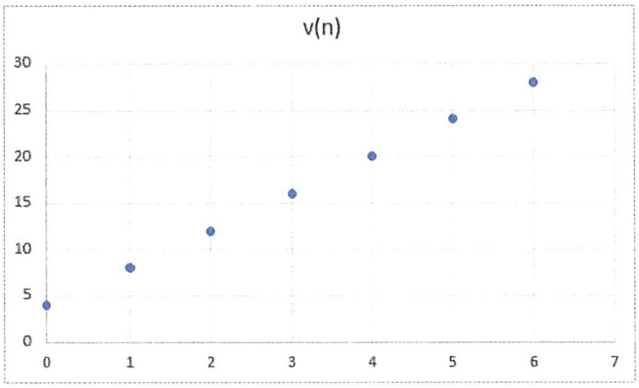
Voici une copie d'un tableur calculant les premiers termes de la suite.

	A	B
1	n	v(n)
2	0	4
3	1	8
4	2	12
5	3	16
6	4	20
7	5	24
8	6	28

a. Quelle formule destinée à être étirée a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

....

b. À l'aide du tableur, on a représenté graphiquement les premiers termes de la suite.



Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite ?

....

....

....

c. Prouver cette conjecture et préciser la raison de la suite.

....

....

....

....

....

....

....

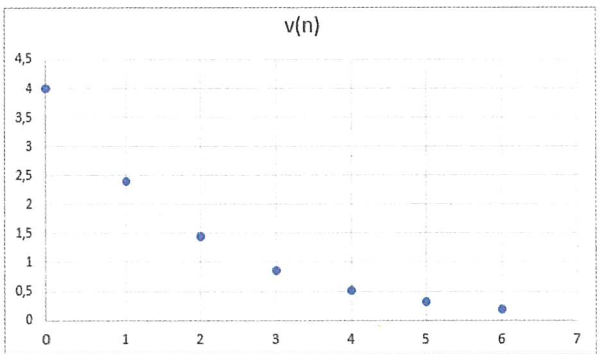
38 TABLEUR On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 \times 0{,}8^n$.
Voici une copie d'un tableur calculant les premiers termes de la suite.

	A	B
1	n	v(n)
2	0	4
3	1	2,4
4	2	1,44
5	3	0,864
6	4	0,5184

a. Quelle formule destinée à être étirée a-t-on saisie dans la cellule B2 ?

....

b. À l'aide du tableur, on a représenté graphiquement les premiers termes de la suite.



Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite ?

....

....

c. Prouver cette conjecture et préciser la raison de la suite.

....

....

....

....

....

....

39 PYTHON Dans le programme Python suivant, u représente la liste des 6 premiers termes d'une suite (u_n).

```
1   from math import *
2
3   u = [4*3**i for i in range(6) ]
4
5   r = u[1]-u[0]
6   for i in range (1,len(u)-1):
7       print(u[i+1]-u[i] )
8
9   print("autres calculs")
10  for i in range (1,len(u)-1):
11      print(u[i+1]/u[i] )
12
```

a. En observant la ligne 3, donner l'expression de u_n en fonction de n.

$u_n =$ ....

b. Lorsque l'on exécute le programme, voici l'affichage :

```
24
72
216
648
autres calculs
3.0
3.0
3.0
3.0
```

Quelle conjecture peut-on émettre sur la suite (u_n) ?

....

....

c. Prouver cette conjecture et préciser la raison de la suite.

....

....

....

....

....

....

....

Exercices d'approfondissement

40 Soit w la suite définie par $w(n) = 4n + 5$.

a. Calculer les trois premiers termes de la suite w.

b. Représenter graphiquement les premiers termes de w.

c. D'après la représentation graphique, la suite w semble-t-elle arithmétique ? Justifier.

d. Démontrer que w est arithmétique. Préciser sa raison.

e. Préciser le sens de variation de w.

41 PYTHON Soit u la suite arithmétique de premier terme $u(0) = 17$ et de raison $r = -1,5$.

a. Que vaut u à la fin de l'algorithme ci-dessous ? Que représente cette valeur ?

```
u ← 17
Pour i allant de 1 à 10
    u ← u - 1,5
```

b. Écrire un programme en Python pour calculer $u(15)$.

42 TABLEUR Sur un tableur, on a créé une feuille de calculs permettant de déterminer les 20 premiers termes d'une suite arithmétique.

La cellule B1 contiendra le premier terme $w(0)$ et la cellule D1 la raison r.

On veut automatiser le calcul des termes de cette suite.

	A	B	C
1	w(0)=		q=
2			
3	n	w(n)	
4	1		
5			

a. Quelle formule peut-on écrire en A5 et étirer vers le bas pour compléter la colonne A ?

b. Quelle formule peut-on écrire en B4 pour calculer $w(1)$?

c. Quelle formule peut-on écrire en B5 et étirer vers le bas pour compléter la colonne B ?

43 PYTHON Compléter la fonction suivante afin qu'elle retourne `True` si la liste u est le début d'une suite arithmétique et `False` dans le cas contraire.

```python
def est_arithmetique(u):
    r = u[1]-u[0]
    for i in range(1,len(u)-1):
        if u[i+1]-u[i] != ........:
            return ........
    return ........
```

44 Soit t la suite définie par $t(n) = 3^n$.

a. Calculer les trois premiers termes de la suite t.

b. Représenter graphiquement les trois premiers termes de t.

c. D'après la représentation graphique, la suite t semble-t-elle géométrique ? Justifier.

d. Démontrer que t est géométrique. Préciser sa raison.

e. Préciser le sens de variation de t.

45 TABLEUR Sur un tableur, on a créé une feuille de calculs permettant de déterminer les 20 premiers termes d'une suite géométrique v.

La cellule B1 contiendra le premier terme $v(1)$ et la cellule D1 la raison q.

On veut automatiser le calcul des termes de cette suite.

	A	B	C
1	v(1)=		q=
2			
3	n	v(n)	
4	2		
5			

a. Quelle formule peut-on écrire en A5 et étirer vers le bas pour compléter la colonne A ?

b. Quelle formule peut-on écrire en B4 pour calculer $v(2)$?

c. Quelle formule peut-on écrire en B5 et étirer vers le bas pour compléter la colonne B ?

46 Une suite arithmétique w est telle que $w(9) = 15$ et $w(13) = 25$.

a. Calculer sa raison r.

b. Calculer son terme initial $w(0)$.

47 Soit la suite x telle que $x(7) = 18$ et $x(15) = 202$.

a. Calculer sa raison r.

b. Calculer son terme initial $x(0)$.

c. Donner l'indice du premier terme supérieur à 10.

48 PYTHON Un article coûte 17 €. Son prix augmente chaque année de 2,5 %. On note $P(n)$ le prix de cet article en euros après n années.

a. Démontrer que P est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Écrire un programme en langage Python permettant de connaître $P(10)$, le prix de cet article au bout de dix ans.

c. Écrire un programme en Python permettant de savoir dans combien d'années ce prix aura doublé.

49 Soit p une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $p(1) = 7$ et $p(3) = 175$.

a. Calculer sa raison q.

b. Calculer $p(0)$.

50 Soit a la suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $a(4) = 18$ et $a(7) = 144$.

a. Calculer sa raison q.

b. Calculer $a(0)$.

51 Soit g la suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $g(2) = 10$ et $g(5) = 1,25$.

a. Calculer sa raison q.

b. Calculer $g(0)$.

Exercices d'approfondissement

52 Espérance de vie masculine

Calculer – Modéliser

En France, l'espérance de vie d'un homme est passée de 64,4 ans en 1952 à 85,4 ans en 2017 (source : Insee).
On fait l'approximation que l'espérance de vie a progressé chaque année de façon arithmétique.

a. Calculer la raison de cette suite arithmétique, arrondie à une décimale.

b. Interpréter dans le contexte de l'énoncé.

c. Si cette tendance se maintient, quelle sera l'espérance de vie d'un homme en France en 2030 ?

53 Espérance de vie féminine

Calculer – Modéliser

En France, l'espérance de vie d'une femme est passée de 69,2 ans en 1950 à 85,4 ans en 2017 (source : Insee).
On fait l'approximation que l'espérance de vie a progressé chaque année de façon arithmétique.

a. Calculer la raison de cette suite arithmétique, arrondie à une décimale.

b. Interpréter dans le contexte de l'énoncé.

c. Si cette tendance se maintient, quelle sera l'espérance de vie d'une femme en France en 2030 ?

54 Placement à intérêts simples

Calculer – Modéliser

On place un capital de 3 000 € à 2 % par an, à intérêts simples. On rappelle le principe du placement à intérêts simples : à la fin de chaque année, les intérêts sont calculés uniquement sur le capital initialement placé.
On modélise le capital acquis tous les ans par une suite C. Ainsi on pose : $C(0) = 3\,000$.

a. Calculer le capital $C(1)$ acquis à la fin de la 1re année, et $C(2)$ à la fin de la 2e année.

b. Démontrer que la suite C modélisant le capital est arithmétique. On précisera sa raison.

c. Écrire une formule de récurrence permettant de calculer $C(n + 1)$ en fonction de $C(n)$.

d. Calculer $C(10)$. Que représente cette valeur ?

e. Calculer $C(1) + C(2) + C(3) + \ldots + C(9) + C(10)$. Que représente cette somme ?

55 PYTHON Calculer et comparer des sommes

Modéliser – Calculer

Un étudiant loue une chambre pour 300 € par mois pendant 2 ans. Chaque mois, son loyer augmente de 1 %. On note $L(n)$ le montant du loyer le n-ième mois en euros. On a donc $L(1) = 300$.

a. Calculer le montant du loyer le 2e mois $L(2)$ ainsi que celui du mois suivant $L(3)$.

b. Démontrer que la suite L est géométrique et préciser sa raison.

c. Écrire un programme en langage Python permettant de calculer $L(24)$, le montant du loyer au bout des deux ans.

d. Écrire un programme en Python permettant de calculer la somme totale payée pendant les deux ans.

56 Placement à intérêts composés

Calculer – Modéliser

Un capital de 4 000 € est placé à 2 % par an, à intérêts composés. On rappelle le principe du placement à intérêts composés : à la fin de chaque année, les intérêts sont intégrés à l'ancien capital et génèrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.
On modélise le capital acquis tous les ans par une suite. Ainsi on pose : $V(0) = 4\,000$.

a. Calculer le capital acquis à la fin de la 1re année, puis de la 2e année.

b. Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.

c. Compléter la phrase suivante : « Augmenter une quantité de 2 % revient à la multiplier par… ».

d. En déduire que la suite V est géométrique et préciser sa raison.

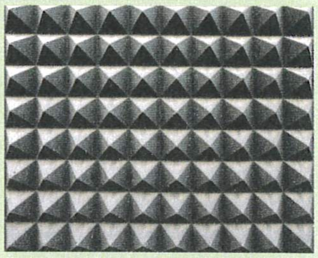
e. Écrire une formule de récurrence permettant de calculer $V(n + 1)$ en fonction de $V(n)$.

f. Calculer et interpréter $V(5)$.

g. Calculer et interpréter $V(1) + V(2) + V(3) + V(4) + V(5)$.

57 Isolation phonique

Représenter – Calculer



Une source sonore émet un son d'intensité de 1 000 décibels.
Une plaque d'isolation phonique en absorbe 37 %.
On note $U(n)$ l'intensité du son, mesurée en décibels, après la traversée de n plaques. Ainsi : $U(0) = 1\,000$.

a. Calculer et représenter graphiquement $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$.

b. Démontrer que la suite U n'est pas en progression arithmétique.

c. Compléter la phrase suivante : « Diminuer une quantité de 37 % revient à la multiplier par… ».

d. En déduire que la suite U est géométrique et préciser sa raison.

e. Quel est le sens de variation de la suite U ? Interpréter dans le contexte de l'énoncé.

58 Démographie d'une ville

Chercher – Communiquer

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2019, elle était de 8 000 habitants.
On désigne par $u(n)$ le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2019 + n)$. On a donc $u(0) = 8\,000$.

a. Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

b. Donner la nature et la raison de la suite u.

c. Écrire la relation de récurrence reliant les termes $u(n + 1)$ et $u(n)$.

d. Calculer le nombre d'habitants prévus pour 2026.

e. Déterminer en quelle année la population aura doublé.

f. Soit $v(n)$ l'augmentation du nombre d'habitants constatée l'année $(2019 + n)$, par rapport à l'année précédente. On a donc : $v(n) = u(n + 1) - u(n)$.

Calculer $v(1)$, $v(2)$ et $v(3)$.

g. La suite v est-elle arithmétique ? Géométrique ? Le démontrer.

h. Calculer la somme :

$$v(1) + v(2) + v(3) + v(4) + v(5) + v(6) + v(7).$$

Quel résultat retrouve-t-on ? Expliquer.

59 TABLEUR Droit social

Chercher – Modéliser – Communiquer

Suite à la loi de 2005 relative au handicap, tout employeur de plus de 20 salariés est soumis à l'obligation d'emploi de travailleurs handicapés : il est tenu d'employer des travailleurs handicapés, dans une proportion d'au moins 6 % de l'effectif total du personnel.

Le tableau suivant donne, de 2015 à 2017, le nombre total de salariés ainsi que le nombre de salariés handicapés d'une entreprise privée.

Année	2015	2016	2017
Nombre total de salariés	1 764	1 771	1 805
Nombre de salariés handicapés	60	62	65

a. Calculer le taux d'évolution de 2016 à 2017 du nombre de salariés handicapés dans cette entreprise.
On arrondira le résultat à 0,1 % près.

b. À partir de 2017, on modélise le nombre de salariés handicapés dans cette entreprise, à l'aide d'une suite u :
– on pose $u(0) = 65$ le nombre de salariés handicapés dans l'entreprise pour l'année 2017 ;
– on note $u(1)$ une estimation du nombre de salariés handicapés pour l'année 2018 ;
– on note $u(2)$ une estimation du nombre de salariés handicapés pour l'année 2019, etc. ;
– et plus généralement on note $u(n)$ une estimation du nombre de salariés handicapés pour l'année $(2017 + n)$.
On suppose qu'à partir de 2017, le nombre de salariés handicapés augmente de 5 % par an.
Indiquer la nature de la suite u. Préciser sa raison.

c. On utilise une feuille de calculs automatisée pour obtenir les termes de la suite u.
Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C2 qui, étirée vers la droite, permet de remplir le tableau ci-dessous ?

	A	B	C	D	E
1	**Année**	2017	2018	2019	2020
2	**Nombre de salariés handicapés**	65			

d. Calculer u_3 (arrondir le résultat à l'unité). Interpréter le résultat.

e. Selon ce modèle, sachant que l'entreprise s'est fixé comme perspective d'employer au total 1 850 salariés en 2020, peut-on penser que l'obligation d'emploi des travailleurs handicapés sera respectée en 2020 ?

60 Datation des fossiles au carbone 14

Chercher – Raisonner

Cet exercice étudie la désintégration du carbone 14 et son utilisation pour la datation des fossiles.

Soit $v(0)$, $v(1)$, $v(n)$, le nombre d'atomes de carbone 14 respectivement à l'instant $t = 0$; 1 siècle après ; n siècles après.
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement, d'environ 1,24 % par siècle.
Les rayons cosmiques produisent dans l'atmosphère du carbone 14, qui s'y désintègre très lentement.
Le taux de carbone 14 dans l'atmosphère de la Terre est donc constant.
Les tissus animaux et végétaux vivants contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère.
À leur mort, l'assimilation en carbone 14 cesse. Celui-ci se désintègre dans les conditions vues ci-dessus.

a. Quelle est la nature (arithmétique ou géométrique) de la suite v ? Préciser sa raison.

b. Un squelette d'homme préhistorique contient 5 % du C_{14} initial. Justifier que son âge est environ 24 000 ans.

61 Scintigraphie cardiaque

La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du cœur par les artères coronaires. Lors de cet examen, on injecte au patient un échantillon d'un isotope de thallium d'activité radioactive 60 MBq (Méga Becquerel).
On appelle demi-vie le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité.
Ainsi, après une demi-vie, l'activité radioactive de cet échantillon de thallium est de 30 MBq.
Puis, après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 15 MBq.
On note $u(0)$ l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) à l'injection.
On note $u(n)$ l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) après n demi-vies, avec n entier naturel.

a. Donner les valeurs de $u(0)$; $u(1)$; $u(2)$; $u(3)$.

b. Exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$.

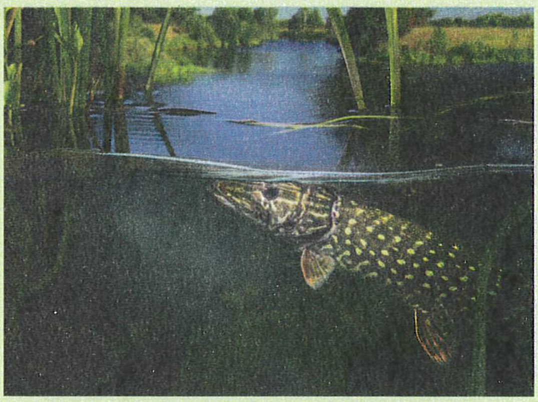
c. En déduire la nature de la suite u.

d. Déterminer l'activité radioactive de cet échantillon après 5 demi-vies.

e. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u(n) < 0,25$.

f. Sachant que la demi-vie de cet isotope de thallium est d'environ 3 jours, déterminer le nombre de jours au bout desquels on est certain que l'activité radioactive de cet échantillon est strictement inférieure à 0,25 MBq.

62 TABLEUR Équilibre écologique



L'étang Nathan, en Eure-et-Loire, est réputé pour ses brochets, qui y vivent en grand nombre, puisqu'ils sont estimés à 36 000 en 2017. De nombreux concours de pêche y sont organisés et la population décline de 15 % par an. L'équilibre écologique de l'étang n'est pas menacé tant que le nombre de brochets présents est supérieur ou égal à 30 000 individus. Ainsi, le propriétaire réintroduit chaque année un certain nombre de brochets.
On considère la suite (u_n) qui donne le nombre de brochets présents dans l'étang l'année $(2017 + n)$.
Nous avons donc $u_0 = 36\,000$.

1. Le propriétaire souhaite réintroduire chaque année 4 000 brochets pour limiter les pertes.
a. Calculer u_1 et u_2.
b. La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ? Géométrique ?
c. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Pour pouvoir faire des prévisions sur le long terme, le propriétaire utilise un tableur. Il souhaite pouvoir faire plusieurs simulations. Il veut donc pouvoir modifier le contenu de la cellule B1 en automatisant le reste des calculs.

	A	B
1	Nombre de brochets réintroduits chaque année	4000
2		
3	Année 2017+n	Nombre de brochets un
4	0	36000
5	1	34600
6	2	33410

a. Quelle formule peut-on saisir en B4 qui, étirée vers le bas, permet d'automatiser les calculs de la colonne B ?
b. Créer cette feuille de calculs et regarder l'évolution sur 40 ans.
c. L'équilibre écologique de l'étang est-il menacé ?
d. Si oui, en quelle année ?

3. En changeant le contenu de la cellule B1, déterminer le nombre minimum de poissons à réintroduire chaque année pour que l'équilibre écologique ne soit pas menacé sur les 40 prochaines années.

63 TABLEUR Exode rural

Chercher – Communiquer

Dans une région comportant 96 000 habitants en 2017, 64 000 habitent à la campagne et 32 000 à la ville.

On suppose que la population de la région restera stable à 96 000 habitants sur le long terme.
On constate dans cette région que tous les ans 16 % des habitants de la campagne partent s'installer en ville et que 4 % des citadins partent vivre à la campagne.
Le préfet de région est inquiet car il pense que, sur le long terme, toute la population de cette région sera installée en ville.
On note (c_n) le nombre d'habitants vivant à la campagne dans cette région l'année $(2017 + n)$ et (v_n) le nombre d'habitants vivant en ville l'année $(2017 + n)$.

1. Donner les valeurs de v_0 et c_0.
2. Calculer v_1, c_1, v_2 ainsi que c_2. Arrondir à l'unité.
3. Les suites (c_n) et (v_n) peuvent-elles être géométriques ? Arithmétiques ?
4. À partir des données des trois premières années, le préfet a-t-il des raisons de s'inquiéter ?
5. Pour en avoir le cœur net, il commande une étude portant sur les 100 prochaines années.
Le bureau d'étude utilise un tableau pour prévoir les évolutions de population.
a. Reproduire la feuille de calculs suivante.

	A	B	C
1		vn	cn
2	0	32000	64000
3	1	40960	55040
4	2	48128	47872

Aide
→ Pour les colonnes B et C, indiquer dans *Format de cellule* : *nombre*, nombre de décimales : 0 pour pouvoir arrondir à l'unité.

b. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 qui, une fois étirée vers le bas, permet d'automatiser les calculs de la colonne B ?
c. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3 qui, une fois étirée vers le bas, permet d'automatiser les calculs de la colonne C ?
d. En observant l'évolution des deux populations, les craintes du préfet sont-elles justifiées ?

6. Lorsque la population citadine atteint 76 800 habitants, comment expliquer que les deux populations restent stables ?

TABLEUR 1 Déterminer une production optimale

SITUATION Aminata vient d'acheter un appartement. Elle doit emprunter la somme de 150 000 €. Une banque lui propose un prêt de 2,4 % annuel, ce qui revient approximativement à un taux mensuel de 0,198 %.

⇨ **Aminata peut rembourser 900 € à la banque chaque mois, quelle sera alors la durée de son prêt ?**

A Tableau d'amotissement

La feuille de calculs suivante représente le tableau d'amortissement lié au prêt d'Aminata.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Mois	Montant de la dette en début de mois	Interêts	Mensualités	Montant de la dette en fin de mois	Amortissement		Montant de l'emprunt	150000
2	1	150 000,00 €	297,00 €	900,00 €	149 397,00 €	603,00 €		taux mensuel	0,198
3	2	149 397,00 €	295,81 €	900,00 €	148 792,81 €	604,19 €			
4	3	148 792,81 €	294,61 €	900,00 €	148 187,42 €	605,39 €			
5	4	148 187,42 €	293,41 €	900,00 €	147 580,83 €	606,59 €			

Les différentes cellules comprenant des euros sont au format monétaire.
Chaque mois, les intérêts représentent 0,198 % du montant de la dette de début de mois.
L'amortissement correspond à la part du capital remboursé pendant le mois.

Feuille de calculs liennathan.fr/cx7bjl

1 Justifier le contenu des cellules C2, E2 et F2.

2 On voudrait automatiser la feuille de calculs. Pour cela, on place dans les cellules B3, C3, D3, E3 et F3 des formules qui pourront être étirées vers le bas. Quelles formules peut-on utiliser dans ces différentes cellules ?

3 Étirer ensuite vers le bas les cinq cellules de la question précédente. Quand faut-il s'arrêter ? Pourquoi ?

4 Combien de mois faudra-t-il à Aminata pour rembourser intégralement son prêt ? Quel sera alors le montant de la dernière mensualité ? Quelle somme totale aura-t-elle donnée à la banque ?

B Lien avec les suites

On considère n l'entier naturel correspondant au n-ième mois du remboursement.
On note $u(n)$ le montant de la dette à la fin du n-ième mois et $v(n)$ l'amortissement le n-ième mois.
Pour plus de commodité, on notera $u(0) = 150\,000$. Le premier terme de la suite $(v(n))$ est $v(1)$.

1 À l'aide du tableau d'amortissement de la partie **A**, lire $u(1)$, $u(2)$, $u(50)$ ainsi que $v(1)$, $v(2)$ et $v(50)$.

2 Quel semble être le sens de variation des suites $(u(n))$ et $(v(n))$?

3 **a.** Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u(n+1) = 1{,}00198\,u(n) - 900$.
Quelle autre formule aurait-on pu écrire dans la cellule E3 qui, étirée vers le bas, aurait donné le montant de la dette en fin de mois ?

b. La suite $(u(n))$ peut-elle être arithmétique ? géométrique ? Justifier.

c. Dans la cellule G3 du tableur, écrire la formule : `=F3/F2`.
Étirer la formule vers le bas.
Que remarque-t-on sur la colonne G ? Quelle hypothèse peut-on alors émettre sur la nature de la suite $(v(n))$?

Travaux pratiques

PYTHON 2 Stockage des termes d'une suite dans une liste

SITUATION Une piscine municipale peut contenir 510 m³ d'eau. Au début de l'été, le responsable ajuste la quantité d'eau à 500 m³. Chaque jour, 0,2 % de l'eau s'évapore. Pour compenser cette perte, le responsable ajoute chaque soir 1,2 m³ d'eau dans le bassin.

⇨ **Comment le volume d'eau évolue-t-il ?**

On souhaite calculer, à l'aide d'un programme en Python, les termes d'une suite implicite jusqu'à un rang donné, stocker les résultats dans une liste et exploiter l'affichage de cette liste.
Notons v_n le volume d'eau en m³ dans le bassin au bout de n jours d'exploitation. On a alors $v_0 = 500$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = 0{,}998\, v_n + 1{,}2$. On crée une liste Python pour enregistrer les termes de la suite v. C'est une collection, délimitée par des crochets, de nombres (ou d'autres objets) séparés par des virgules.

1 Implémenter puis exécuter le programme ci-contre. Que contient la liste `L` à la fin de l'exécution du programme ?

2 Que peut-on conjecturer sur le comportement du volume d'eau au fil des jours ?

3 Dans cette liste, le premier terme supérieur à 510 est 510,06708131801395. Pour rechercher sa place dans la liste, taper en bas du programme l'instruction `L.index(510.06708131801395)`(l'affichage dépend de la distribution Python utilisée).
Que signifie le résultat affiché ?

```
u=500  # On initialise la valeur de u
L=[500]  # On crée la liste L contenant u_0
for i in range(100):  # Les deux instructions
                      # suivantes seront ex-
                      # cutées 100 fois
    u=0.998*u+1.2  # On calcule la nouvelle
                   # valeur de u
    L.append(u)      # On stocke la nouvelle
                     # valeur dans la liste L
print(L)
```

PYTHON 3 Colonie de bactéries

SITUATION Un laboratoire pharmaceutique met en culture une colonie de bactéries *E. coli* comptant 5 milliers d'individus à midi. Le technicien de laboratoire estime qu'à chaque minute le nombre de bactéries augmente de 5 %.

⇨ **À quelle heure la colonie dépassera les 10 000 individus ?**

On modélise l'évolution de la population de bactéries par une suite géométrique u de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 1,05. Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre (en milliers) de bactéries en culture n minutes après midi. Pour répondre à la question posée, on peut calculer les termes successifs de la suite jusqu'à ce que l'un soit supérieur à 10. On poursuit donc le calcul de u_n **tant que** $u_n < 10$.

1 Recopier et compléter, en ajoutant des lignes si nécessaire, ce tableau d'avancement jusqu'à une étape suffisante pour résoudre le problème.

Étape	Valeur de n	Valeur de u_n
Départ : étape 0	0	5
1	1	5,25
2	…	

2 La démarche de la question **1** peut être traduite par un algorithme. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre, écrit en pseudo-langage, qui donne des instructions permettant de résoudre le problème donné.

```
u ← ...
n ← ...
Tant que ... faire :
    u ← ...
    n ← ...
Afficher n
```

3 On implémente maintenant cet algorithme en Python. Recopier et compléter le code proposé ci-contre.

```
n = ...
u = ...
while u ... :
    u = ...
    n = ...
print (...)
```